Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Diciembre (180 minutos): Miércoles 22 de Diciembre de 2021

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Elegir uno de los apartados entre Extra 1 y Extra 2. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen.

Ejercicio. Consideramos las curvas afines:

$$f := -\mathtt{x}_1^4 + \mathtt{x}_1^3\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_2 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2],$$
$$g := -\mathtt{x}_1^3 + \mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_2 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2].$$

(i) Calcular las curvas proyectivas F, G que se obtienen homogeneizando f, g (con respecto a la variable $\mathtt{x}_0$). Determinar los puntos de infinito de f, g, calcular las asíntotas y determinar si tienen alguna rama parabólica.

(ii) Demostrar que F y G son curvas algebraicas irreducibles.

(iii) Demostrar que $\operatorname{Sing}(F) = \{[0:0:1]\}$, calcular $\mathrm{m}_{[0:0:1]}(F)$ y las rectas tangentes a F en $[0:0:1]$.

(iv) Demostrar que $\operatorname{Sing}(G) = \{[0:0:1]\}$, calcular $\mathrm{m}_{[0:0:1]}(G)$ y las rectas tangentes a F en $[0:0:1]$.

(v) Demostrar que las curvas F y G son parametrizables y encontrar parametrizaciones polinómicas de F y de G.

(vi) Demostrar que $\mathcal{Z}(F, G) = \{[0:0:1], [1:0:0], [0:1:1], [2:2:1]\}$ y calcular $I_p(F, G)$ para cada $p \in \mathcal{Z}(F, G)$. Comprobar que se cumple el Teorema de Bezout.

(vii) Demostrar que no existe ningún punto regular de F cuya recta tangente pasa por el punto $[0:0:1]$. Análogamente, demostrar que no existe ningún punto regular de G cuya recta tangente pasa por el punto $[0:0:1]$.

(viii) Demostrar que el conjunto de los puntos de inflexión de F es $\operatorname{Flex}(F) = \{[0:1:1], [1:0:0], [\frac{1}{\sqrt[3]{2}} : 1 : \frac{2}{3}], [\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\omega : 1 : \frac{2}{3}], [\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\omega^2 : 1 : \frac{2}{3}]\}$ donde $\omega := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})$. Si L_p es la recta tangente a F en p para cada $p \in \operatorname{Flex}(F)$, calcular $I_p(F, L_p)$ para cada $p \in \operatorname{Flex}(F)$. *Ayuda: No es necesario calcular las rectas tangentes L_p.*

(ix) Demostrar que el conjunto de los puntos de inflexión de F es $\operatorname{Flex}(G) = \{[1:0:0], [\frac{1}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{3}{4}], [-\frac{1}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{3}{4}]\}$. Si L'_q es la recta tangente a F en q para cada $q \in \operatorname{Flex}(G)$, calcular $I_q(G, L_q)$ para cada $q \in \operatorname{Flex}(G)$. *Ayuda: No es necesario calcular las rectas tangentes L'_q.*

(x) Extra 1: Encontrar una cuártica H que cumple: $\{[1:0:0], [0:0:1]\} \subset \mathcal{Z}(F, H)$, la recta tangente a H en $[0:0:1]$ es $\mathtt{x}_0$, la recta tangente a H en $[1:0:0]$ es $\mathtt{x}_2$, $I_{[0:0:1]}(F, H) \geq 9$ e $I_{[1:0:0]}(F, H) \geq 4$.

(xi) Extra 2: Calcular los dos primeros términos de una parametrización irreducible de cada uno los lugares de F y G en el punto $[0:0:1]$. Comprobar usando dichos lugares que $I_{[0:0:1]}(F, G)$ es el valor obtenido en el apartado anterior. *Ayuda: No es necesario utilizar Newton-Puiseux, ni que alguna de las componentes de la parametrización sea una potencia de la variable.*

Ver la siguiente página para los cálculos facilitados por el profesor.

Datos Relevantes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(F,G) &= -\mathtt{x}_1^6\mathtt{x}_2^2(\mathtt{x}_1-2\mathtt{x}_2)(-\mathtt{x}_2+\mathtt{x}_1)^2,\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(F,G) &= \mathtt{x}_0^8\mathtt{x}_2^3(\mathtt{x}_0-2\mathtt{x}_2),\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(F,G) &= -\mathtt{x}_1^3\mathtt{x}_0^2(\mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1).
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Hess}_F = 54\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1(2\mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_1-\mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_2-\mathtt{x}_1^3\mathtt{x}_2).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 157464\mathtt{x}_1^{18}(-\mathtt{x}_2+\mathtt{x}_1)(2\mathtt{x}_1-3\mathtt{x}_2)^3,\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 8503056\mathtt{x}_0^{19}\mathtt{x}_2^2(16\mathtt{x}_0^3-27\mathtt{x}_2^3),\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 54\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1^2(\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_0)(2\mathtt{x}_0^3-\mathtt{x}_1^3)(\mathtt{x}_0^2-\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_1^2).
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Hess}_G = 24\mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_1-8\mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_2-8\mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 64\mathtt{x}_1^6(3\mathtt{x}_1-4\mathtt{x}_2)^2,\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 512\mathtt{x}_0^6\mathtt{x}_2(27\mathtt{x}_0^2-16\mathtt{x}_2^2),\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 8\mathtt{x}_1(3\mathtt{x}_0^2-\mathtt{x}_1^2)(\mathtt{x}_0^2+\mathtt{x}_1^2).
\end{aligned}$$