Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Diciembre (180 minutos): Miércoles 21 de Diciembre de 2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Elegir uno de los apartados entre Extra 1 y Extra 2. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen.

Ejercicio. Consideramos las curvas afines:

$$f := -3\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_1^3 + 4\mathtt{x}_2^4 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2],$$
$$g := -3\mathtt{x}_1^2 + 4\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1^3 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2].$$

(i) Calcular las curvas proyectivas F, G que se obtienen homogeneizando f, g (con respecto a la variable $\mathtt{x}_0$). Determinar los puntos de infinito de f, g, determinar si tienen asíntotas y determinar si tienen alguna rama parabólica.

(ii) Demostrar que F y G son curvas algebraicas irreducibles.

(iii) Demostrar que $\mathrm{Sing}(F) = \{[1:0:0]\}$, calcular $\mathrm{m}_{[1:0:0]}(F)$ y las rectas tangentes a F en $[1:0:0]$.

(iv) Demostrar que $\mathrm{Sing}(G) = \{[1:0:0]\}$, calcular $\mathrm{m}_{[1:0:0]}(G)$ y las rectas tangentes a F en $[1:0:0]$.

(v) Demostrar que G es una curva aritméticamente racional, mientras que F no lo es. Encontrar una parametrización polinómica de G y demostrar que F no es parametrizable.

(vi) Demostrar que $\mathcal{Z}(F, G) = \{[1:0:0], [-1:3:0], [1:1:1], [-1:-1:1], [-1:2:1], [1:-2:1]\}$ y calcular $I_p(F, G)$ para cada $p \in \mathcal{Z}(F, G)$. Comprobar que se cumple el Teorema de Bezout.

(vii) Calcular los puntos regulares de F cuyas rectas tangentes pasan por el punto $[0:0:1]$ y calcular dichas rectas tangentes. Análogamente, calcular los puntos regulares de G cuyas rectas tangentes pasan por el punto $[0:0:1]$ y calcular dichas rectas tangentes.

(viii) Demostrar que el conjunto de los puntos de inflexión de G es $\mathrm{Flex}(G) = \{[0:0:1], [-\sqrt{-1} : 4\sqrt{-1} : 2], [\sqrt{-1} : -4\sqrt{-1} : 2]\}$. Si L'_q es la recta tangente a G en q para cada $q \in \mathrm{Flex}(G)$, calcular $I_q(G, L'_q)$ para cada $q \in \mathrm{Flex}(G)$. *Ayuda: No es necesario calcular las rectas tangentes* L'_q.

(ix) Demostrar que el conjunto de los puntos de inflexión $\mathrm{Flex}(F)$ de F está formado por los 10 puntos siguientes:

$$[0:1:0], [-1:3:0], \Big[-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{-1} : 2 : \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}\Big].$$

Si L_p es la recta tangente a F en p para cada $p \in \mathrm{Flex}(F)$, calcular $I_p(F, L_p)$ para cada $p \in \mathrm{Flex}(F)$. *Ayuda: No es necesario calcular las rectas tangentes* L_p.

(x) Extra 1: Calcular los dos primeros términos de una parametrización irreducible de cada uno los lugares de F y G en el punto singular $[1:0:0]$. Comprobar usando dichos lugares que $I_{[1:0:0]}(F, G)$ es el valor obtenido en el apartado (vi). *Ayuda: No es necesario utilizar Newton-Puiseux, ni que alguna de las componentes de la parametrización sea una potencia de la variable.*

(xi) Extra 2: Encontrar todas las cúbicas H que cumplen: $\{[1:0:0], [0:0:1]\} = \mathcal{Z}(G, H)$, la recta tangente a H en $[0:0:1]$ es $\mathtt{x}_0$, las rectas tangentes a H en $[1:0:0]$ son $\sqrt{3}\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_2$ y $\sqrt{3}\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2$, $I_{[1:0:0]}(G, H) = 6$ e $I_{[0:0:1]}(G, H) = 3$. Demostrar que si a dichas cúbicas les añadimos G constituyen un haz de cúbicas, encontrar las cúbicas de dicho haz que son reducibles y comprobar que dichas cúbicas reducibles generan el haz.

Ver la siguiente página para los cálculos facilitados por el profesor.

Datos Relevantes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(F,G) &= -4x_2^2(x_1-x_2)(x_2+x_1)(x_1-2x_2)^2(x_1+2x_2)^2,\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(F,G) &= -64x_2^6(x_0-x_2)^3(x_0+x_2)^3,\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(F,G) &= 16x_1^4(3x_0+x_1)^2(x_0-x_1)^2(2x_0+x_1)^4.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Hess}_F = -432x_1^2x_2^2(12x_0^2+4x_0x_1+x_1^2).$$

$$\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(F,\mathrm{Hess}_F) = 1679616x_1^4x_2^4(x_1^4+16x_2^4)^2,$$
$$\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(F,\mathrm{Hess}_F) = -20639121408x_2^{14}(9x_0^4+12x_0^3x_2+8x_0^2x_2^2+4x_0x_2^3+x_2^4)(9x_0^4-12x_0^3x_2+8x_0^2x_2^2-4x_0x_2^3+x_2^4),$$
$$\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(F,\mathrm{Hess}_F) = 34828517376x_1^{12}x_0^2(3x_0+x_1)^2(12x_0^2+4x_0x_1+x_1^2)^4.$$

$$\mathrm{Hess}_G = -288x_0x_1^2+384x_0x_2^2+384x_1x_2^2.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_0}(G,\mathrm{Hess}_G) &= -96x_1(x_1^2+4x_2^2)(3x_1^2-4x_2^2),\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_1}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 226492416x_2^6x_0(4x_0^2+x_2^2),\\
\mathrm{Res}_{\mathtt{x}_2}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 147456x_1^6(4x_0+x_1)^2.
\end{aligned}$$