Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Enero (180 minutos): Viernes 17 de Enero de 2025

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen, pero deberán usarse al final del examen para escanear el examen.

Ejercicio. Consideramos las cuárticas:

$$f := 3(\mathtt{x}_1^2+\mathtt{x}_2^2)^2 + 6(\mathtt{x}_1^2+\mathtt{x}_2^2) - 8\mathtt{x}_1(\mathtt{x}_1^2 - 3\mathtt{x}_2^2) - 1 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2] \text{ (hipocicloide tricúspide)}$$

$$g := 9(\mathtt{x}_1^2+\mathtt{x}_2^2)^2 - 10(\mathtt{x}_1^2+\mathtt{x}_2^2) + 1 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2].$$

[*Ayuda: El conjunto de los ceros reales de f admite la paramatrización trigonométrica dada por* $\mathtt{t} \mapsto (\frac{1}{3}(2\cos(t) + \cos(2\mathtt{t}), 2\sin(t) - \sin(2\mathtt{t})))$]

(i) Calcular las curvas proyectivas F, G que se obtienen homogeneizando f, g (con respecto a la variable $\mathtt{x}_0$). Determinar los puntos de infinito de f, g, determinar si tienen asíntotas y determinar si tienen alguna rama parabólica.

(ii) Consideramos la afinidad $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ (\mathtt{x},\mathtt{y}) \mapsto (-\frac{1}{2}\mathtt{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathtt{y}, \frac{\sqrt{3}}{2}\mathtt{x} - \frac{1}{2}\mathtt{y})$. Demostrar que tanto f como g son invariantes salvo proporcionalidad al componer con φ.

(iii) Demostrar que $\mathrm{Sing}(F) = \{[1:1:0], [2:-1:\sqrt{3}], [2:-1:-\sqrt{3}]\}$ y que cada uno de los tres puntos anteriores es una cúspide ordinaria para F.

(iv) Demostrar que F es una curvas algebraica irreducible.

(v) Demostrar que $\mathrm{Sing}(G) = \{[0:\sqrt{-1}:1], [0:-\sqrt{-1}:1]\}$ y calcular parametrizaciones polinómicas de las componentes irreducibles de G.

(vi) Demostrar que F es una curva aritméticamente racional y encontrar una parametrización polinómica para F.

(vii) Demostrar que $\mathcal{Z}(F,G) = \{[1:1:0], [2:-1:\sqrt{3}], [2:-1:-\sqrt{3}], [-3:1:0], [6:1:\sqrt{3}], [6:1:-\sqrt{3}], [0:\sqrt{-1}:1], [0:-\sqrt{-1}:1]\}$ y calcular $I_p(F,G)$ para cada $p \in \mathcal{Z}(F,G)$. Comprobar que se cumple el Teorema de Bezout.

(viii) Demostrar que tanto F como G no tienen puntos de inflexión.

(ix) Calcular los puntos regulares de F cuyas rectas tangentes pasan por el punto $[1:0:0]$ y calcular dichas rectas tangentes.

(x) Calcular los dos primeros términos de una parametrización irreducible de cada uno los lugares de F y G en su punto singular $[1:1:0]$. Comprobar usando dichos lugares que $I_{[1:1:0]}(F,G)$ es el valor obtenido en el apartado (vii).

Para mejorar la calificación:

(xi) Encontrar todas las cúbicas irreducibles C que cumplen: $[1:1:0]$ es una nodo (ordinario) para H, las rectas tangentes a H en $[1:1:0]$ son $\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2$ y $\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2$, $[0:0:1]$ es un punto de inflexión para H con tangente $\mathtt{x}_0$ y pasan por el punto $[1:0:0]$.

Ved la siguiente página para encontrar los cálculos facilitados por el profesor.

Datos Relevantes:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(F,G) &= 36864(x_1^2+x_2^2)^2x_2^4(3x_1^2-x_2^2)^4,\\
\mathrm{Res}_{x_1}(F,G) &= 2985984x_0^4x_2^4(x_0^2-12x_2^2)^2(3x_0^2-4x_2^2)^2,\\
\mathrm{Res}_{x_2}(F,G) &= 36864x_0^4(x_0+3x_1)^2(x_0-x_1)^2(x_0+2x_1)^4(x_0-6x_1)^4.
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Hess}_F = -x_0^6+9x_0^4x_1^2+9x_0^4x_2^2-16x_0^3x_1^3+48x_0^3x_1x_2^2+9x_0^2x_1^4+18x_0^2x_1^2x_2^2+9x_0^2x_2^4-x_1^6-75x1^4x_2^2+45x_1^2x_2^4-9x_2^6.$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 2985984x_2^8(3x_1^2-x_2^2)^8,\\
\mathrm{Res}_{x_1}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 2985984x_2^8(3x_0^2-4x_2^2)^8,\\
\mathrm{Res}_{x_2}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 2985984(x_0+2x_1)^{16}(x_0-x_1)^8.
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Hess}_G = x_0(5x_0^2-9x_1^2-9x_2^2)(5x_0^4-2x_0^2x_1^2-2x_0^2x_2^2+45x_1^4+90x_1^2x_2^2+45x_2^4).$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 722204136308736(x_1^2+x_2^2)^{12},\\
\mathrm{Res}_{x_1}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 722204136308736x_0^{24},\\
\mathrm{Res}_{x_2}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 722204136308736x_0^{24}.
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = -4(x_0+2x_1)(x_0^2-2x_0x_1+x_1^2-3x_2^2)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(F,\tfrac{\partial F}{\partial x_0}) &= 110592(3x_1^2-x_2^2)^4x_2^4,\\
\mathrm{Res}_{x_1}(F,\tfrac{\partial F}{\partial x_0}) &= 110592(3x_0^2-4x_2^2)^4x_2^4,\\
\mathrm{Res}_{x_2}(F,\tfrac{\partial F}{\partial x_0}) &= 36864(x_0+2x_1)^8(x_0-x_1)^4.
\end{aligned}
$$