CURVAS ALGEBRAICAS, CURSO 2025-2026

José F. Fernando

Primeros pasos en Geometría Algebraica

1. Sean K un cuerpo y consideramos los polinomios
$$f(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \mathtt{x}\mathtt{y}^4+\mathtt{x}^3\mathtt{y}^3+\mathtt{x}^2(\mathtt{y}^3+1)-1 \quad \text{y} \quad g(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \mathtt{x}^5+\mathtt{y}(\mathtt{x}^4+\mathtt{x}^3+\mathtt{y}(\mathtt{y}+1)\mathtt{x}+\mathtt{y}).$$
Demostrar que f y g son irreducibles en $K[\mathtt{x},\mathtt{y}]$.

2. Encontrar todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ tales que
$$\mathtt{y}^2+\mathtt{x}^2-\mathtt{y}-3\mathtt{x}=0 \quad \text{e} \quad \mathtt{y}^2-6\mathtt{x}\mathtt{y}-\mathtt{x}^2+11\mathtt{y}+7\mathtt{x}-12=0.$$

3. Sea $p := \mathtt{x}^2\mathtt{y}-3\mathtt{x}\mathtt{y}^2+\mathtt{x}^2-3\mathtt{x}\mathtt{y}$ y $q := \mathtt{y}\mathtt{x}^3-4\mathtt{y}^2-3\mathtt{y}+\mathtt{x}^3+1$. Comprobar que $\operatorname{Res}_{\mathtt{x}}(p,q)\neq 0$ mientras que $\operatorname{Res}_{\mathtt{y}}(p,q)=0$. ¿Cómo se puede explicar esto?

4. Sea $F\in K[\mathtt{x},\mathtt{y}]$ un polinomio homogéneo de grado n con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado K. Demostrar que existen $a\in K\setminus\{0\}$, $r\leq n$ puntos distintos $[a_i:b_i]\in K\mathbb{P}^1$ y enteros positivos $m_i\geq 1$ tales que
$$F = a\prod_{i=1}^{r}(a_i\mathtt{y}-b_i\mathtt{x})^{m_i}$$
Se dice que $[a_i:b_i]$ son las raíces de F y m_i es la multiplicidad de $[a_i:b_i]$ como raíz de F.

5. Descomponer en factores irreducibles el polinomio $\mathtt{x}^4+\mathtt{y}^4$ en $\mathbb{Q}[\mathtt{x},\mathtt{y}]$, $\mathbb{R}[\mathtt{x},\mathtt{y}]$ y $\mathbb{C}[\mathtt{x},\mathtt{y}]$.

6. Demostrar que los divisores de un polinomio homogéneo son necesariamente polinomios homogéneos.

7. (i) Sea K un cuerpo. Calcular los subconjuntos algebraicos de K.
(ii) ¿Es $\mathbb{Z}$ un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}$? ¿Lo es el intervalo $[0,1)$?

8. (i) ¿Es el conjunto $X := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\exp(x)\}$ un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^2$?
(ii) ¿Es el conjunto $X := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\sin(x)\}$ un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^2$?

Estudio local de curvas algebraicas

9. Sean $f,g\in\mathbb{C}[\mathtt{t}]$ dos polinomios. Demostar que $X := \{(f(t),g(t))\in\mathbb{C}^2:\ t\in\mathbb{C}\}$ es un conjunto algebraico de $\mathbb{C}^2$. ¿Es cierto el resultado si cambiamos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$? Calcular el ideal de ceros del conjunto $X := \{(t^2-1,t(t^2-1)):\ t\in\mathbb{C}\}$.

10. Demostrar que el conjunto de puntos de la forma $(t^4+2t^3+t^2-1,t^4+2t^3+2t^2+t)$ con $t\in K$ es una cónica afín del plano K^2. ¿Notas algo extraño? ¿A qué se debe?

11. Obtener una parametrización racional de la curva $\mathcal{Z}(\mathtt{y}^2-\mathtt{x}^2(\mathtt{x}^2-1))$ considerando su intersección con la familia de parábolas $\mathtt{y}-t\mathtt{x}(\mathtt{x}-1)=0$ donde $t\in\mathbb{C}$. ¿Qué interpretación geométrica tiene esta parametrización?

12. Demostrar que la aplicación $\varphi : K\mathbb{P}^1 \to K\mathbb{P}^2$, $[\mathtt{t}_0 : \mathtt{t}_1] \to [\mathtt{t}_0^3 : \mathtt{t}_0\mathtt{t}_1^2 - \mathtt{t}_0^3 : \mathtt{t}_1^3 - \mathtt{t}_0^2\mathtt{t}_1]$ está bien definida, que su imagen es $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_1^3)$ y que solo un punto de la imagen tiene dos preimágenes.

13. Parametrizar las siguientes curvas planas afines proyectando desde el punto $(0,0)$ sobre la recta $\mathtt{y} = 1$ y sobre la recta $\mathtt{x} = 1$. ¿Para cuántos valores del parámertro se obtiene el origen? Representa gráficamente las curvas y discutir si se obtendría una parametrización proyectando desde algún otro punto.

    (i) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2 - 2\mathtt{x})$.
    (ii) $\mathcal{Z}(2\mathtt{x}^2 + 7\mathtt{xy} - 4\mathtt{x} + \mathtt{y})$.
    (iii) $\mathcal{Z}(\mathtt{y}^2 - \mathtt{x}^2 + 2\mathtt{x}^3)$.
    (iv) $\mathcal{Z}(\mathtt{y}^2 + \mathtt{x}^3)$.
    (v) $\mathcal{Z}(\mathtt{y}^2 + \mathtt{x}^2 + 2\mathtt{x}^3)$.
    (vi) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}^3 + \mathtt{y}^3 + \mathtt{x}^4)$.
    (vii) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}^2\mathtt{y} - \mathtt{xy}^2 + \mathtt{x}^4)$.

14. Parametrizar los completados proyectivos de las curvas del Ejercicio **??**.

15. Calcular la intersección de cada uno de los siguientes pares de curvas:

    (i) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_1)$ y $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_1^3)$.
    (ii) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1(\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_0)(\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_0))$ y $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1)$.
    (iii) $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0(\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2) + \mathtt{x}_1^3 + \mathtt{x}_2^3)$ y $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_1^3 + \mathtt{x}_2^3 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2)$.

16. Demostrar que las siguientes curvas afínes son irreducibles y calcular sus puntos singulares, multiplicidades y tangentes a las curvas en ellos:

    (i) $f := \mathtt{y}^2 + 2\mathtt{x}^2 - \mathtt{x}^4$.
    (ii) $f := \mathtt{x}^3 + \mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2$
    (iii) $f := \mathtt{x}^6 - \mathtt{x}^2\mathtt{y}^3 - \mathtt{y}^5$.
    (iv) $f := (\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2)^2 - \mathtt{y}(3\mathtt{x}^2 - \mathtt{y}^2)$.

17. Demostrar que las siguientes curvas (proyectivas) son irreducibles y calcular sus puntos singulares, multiplicidades y tangentes a las curvas en ellos:

    (i) $F := \mathtt{x}_1\mathtt{x}_2^4 + \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^4 + \mathtt{x}_0^4\mathtt{x}_1$.
    (ii) $F := \mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2^3 + \mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_2^2$.
    (iii) $F := \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1(\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_0)(\mathtt{x}_1 - \lambda\mathtt{x}_0)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.
    (iv) $F := (\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2)^3 - 27\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2$.
    (v) $F := \mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2^2 + 36\mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_1 + 24\mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_2 + 108\mathtt{x}_0^4$.

18. Encontrar todas las series formales $g \in K[[\mathtt{t}]]$ con $g(0) = 0$ (calculando sus coeficientes hasta grado 3) tales que $f(\mathtt{t}, g(\mathtt{t}))$ o $f(g(\mathtt{t}), \mathtt{t}) = 0$ para los siguientes polinomios:

    (i) $f := 3\mathtt{y}^2 + 4\mathtt{x} - \mathtt{x}^3$.
    (ii) $f := \mathtt{x}^3 + \mathtt{y}^3 - \mathtt{x}^4$.
    (iii) $f := \mathtt{y}^4 + \mathtt{x}^2\mathtt{y} - \mathtt{xy}^2 + \mathtt{x}^4$.

19. Calcular los primeros términos de las raíces de Puiseux de los polinomios (en la variable $\mathtt{y}$):

    (i) $\mathtt{x}^4 - \mathtt{x}^3\mathtt{y} + 3\mathtt{x}^2\mathtt{y}^3 - 3\mathtt{xy}^5 + \mathtt{y}^7$.
    (ii) $2\mathtt{x}^5 - \mathtt{x}^3\mathtt{y} + 2\mathtt{x}^2\mathtt{y}^2 - \mathtt{xy}^3 + 2\mathtt{y}^5$.
    (iii) $(\mathtt{x}^2 + 4\mathtt{x}^3 + 6\mathtt{x}^4) - 4\mathtt{x}^4\mathtt{y} + (-2\mathtt{x} - 4\mathtt{x}^2 - 2\mathtt{x}^3)\mathtt{y}^2 + \mathtt{y}^4$.

20. Demostrar que una cónica no singular no tiene puntos de inflexión.

Teorema de Bézout

21. Calcular los lugares en el origen de las siguientes curvas:
    (i) $F := \mathtt{y}^{12} - \mathtt{x}^{15} + \mathtt{x}^{30}$.
    (ii) $F := \mathtt{y}^2 - \mathtt{x}^2 + \mathtt{x}^5 + \mathtt{y}^2\mathtt{x}^3$.
    (iii) $F := \mathtt{y}^6 - \mathtt{y}^2\mathtt{x}^4 + \mathtt{x}^{11}$.
    (iv) $F := (\mathtt{y}^2 - \mathtt{x}^3)(\mathtt{y}^3 - \mathtt{x}^4) + \mathtt{x}^{11}$.
    (v) $F := \mathtt{y}^3 + \mathtt{x}\mathtt{y}^2 + 2\mathtt{x}^4 + \mathtt{x}^2\mathtt{y}^3$.

22. Proporcionar la ecuación de una curva cuyos lugares en el origen correspondan a las raíces de Puiseux $\mathtt{y} = \eta(\mathtt{x}^{7/3} \pm \sqrt{-1}\mathtt{x}^{17/6})$ donde $\eta^3 = 1$.

23. Consideramos los polinomios

$$F := \mathtt{x}_1^3 + \mathtt{x}_2^3 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2,$$
$$G := 2\mathtt{x}_1^3 - 4\mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2 + 3\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_2^3 - 2\mathtt{x}_2^2\mathtt{x}_0.$$

    (i) Comprobar que $[0:0:1]$ no es un cero ni de F ni de G y que F y G no poseen ningún cero común en la recta $\mathtt{x}_0$.
    (ii) Calcular $\mathrm{Res}_{\mathtt{y}}(f,g)$ donde $f := F(1,\mathtt{x},\mathtt{y})$ y $g := G(1,\mathtt{x},\mathtt{y})$.
    (iii) Calcular los ceros comunes de los polinomios F y G y su multiplicidad de intersección en cada uno de ellos.
    (iv) Encontrar los lugares de f y g centrados en el $(0,0)$. Calcular el orden de f en los de g y el orden de g en los de f.

24. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos $F_\lambda := \mathtt{x}_0^3\mathtt{x}_2^3 - 3\lambda\mathtt{x}_1^5\mathtt{x}_2 - 3\lambda\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1^5 + 5\lambda\mathtt{x}_1^6$.
    (i) Calcular las tangentes a F_λ en los puntos $p_1 := [1:0:0]$ y $p_2 := [0:0:1]$. Encontrar algún valor de λ para el que el punto $p_3 := [1:1:1]$ sea un punto singular de F_λ.
    (ii) Encontrar la ecuación reducida G de la cónica que pasa por el punto p_3 y cuyas tangentes en los puntos p_1 y p_2 son respectivamente $\mathtt{x}_2$ y $\mathtt{x}_0$.
    (iii) Sean G la cónica del apartado anterior, λ el valor calculado en el apartado (i) y $F := F_\lambda$. Calcular los ceros comunes de F y G y la multiplicidad de intersección de F y G en cada uno de ellos.

25. Sea $F := \mathtt{x}_0(\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2)^2 - \mathtt{x}_1^5$ y $G := \mathtt{x}_1^4 + \mathtt{x}_1^3\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_2^2$. Calcular la multiplicidad de intersección de F y G en cada uno de sus ceros comunes.

26. Verificar el teroema de Bézout para los pares de curvas siguientes:
    (i) $F := (\mathtt{x}^2 - \mathtt{y})^2 - \mathtt{x}^5$, $G := \mathtt{x}^4 + \mathtt{x}^3\mathtt{y} - \mathtt{y}^2$.
    (ii) $F := \mathtt{y}^4 - \mathtt{y}^2 + \mathtt{x}^4 = 0$, $G := \mathtt{y}^4 - 2\mathtt{y}^3 + (1-\mathtt{x})\mathtt{y}^2 - 2\mathtt{x}^2\mathtt{y} + \mathtt{x}^4$.

27. Obtener los lugares de Puiseux en el origen de la curva $F := \mathtt{y}^2 - \mathtt{y}^3 - 2\mathtt{y}\mathtt{x}^2 + \mathtt{x}^4$. De dos formas distintas:
    (i) Calculando directamente las raíces de Puiseux de la ecuación.
    (ii) Utilizando la parametrización $\mathtt{x} := \mathtt{t}(\mathtt{t}^2 - 1)$ e $\mathtt{y} := (\mathtt{t}^2 - 1)^2$

28. ¿Poseen algún lugar común dos curvas planas proyectivas irreducibles distintas?

Aplicaciones

29. Sea $\mathfrak{H}$ el haz de cónicas generado por las cónicas de ecuaciónes $\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2$ y $\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2$.
    (i) Hallas los puntos base de $\mathfrak{H}$.
    (ii) Determinar si $\mathfrak{H}$ puede ser generado por cónicas reducibles y, en caso afirmativo, hallar tales generadores reducibles.

30. Consideramos los puntos proyectivos p_i de coordenadas $[\pm 1 : \pm 1 : 1]$ y los puntos $q_1, \ldots, q_5$ de coordenadas $[0 : 5 : 1]. \ldots, [0 : 9 : 1]$. Calcular el conjunto de las cúbicas que pasan por $p_1, \ldots, p_4, q_1, \ldots, q_5$.

31. Identificamos cada punto $u := [u_{00} : u_{01} : u_{02} : u_{11} : u_{12} : u_{22}] \in K\mathbb{P}^5$ con la cónica de $K\mathbb{P}^2$ de ecuación $Q_u := u_{00}\mathtt{x}_0^2 + u_{01}\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 + u_{02}\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + u_{11}\mathtt{x}_1^2 + u_{12}\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + u_{22}\mathtt{x}_2^2 = 0$.
    (i) Compruébese que el hiperplano de $K\mathbb{P}^5$ de ecuación $\mathtt{u}_{01} = 0$ no corresponde al conjunto de cónicas que pasan por un punto fijo de $K\mathbb{P}^2$.
    (ii) Caracterizar en términos de $u \in K\mathbb{P}^5$ cuándo la recta $\mathtt{x}_2 = 0$ es tangente a la cónica Q_u.

32. Determinar el sistema lineal de cúbicas que cortan a $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_1^2)$ solo en el punto $[1 : 0 : 0]$. Encontrar alguna de ellas que sea irreducible.

33. Demostrar que el conjunto de las rectas tangentes a la curva $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1^3)$ forma una curva de $(K\mathbb{P}^2)^*$ dando una ecuación en las variables $\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2$ que caracterice cuándo la recta de ecuación $\mathtt{a}_0\mathtt{x}_0 + \mathtt{a}_1\mathtt{x}_1 + \mathtt{a}_2\mathtt{x}_2$ es tangente a $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1^3)$. *Ayuda:* Parametrizar la curva $\mathcal{Z}(\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_1^3)$ y para cada uno de sus puntos calcular la recta tangente en función de los parámetros. Comprobar que entonces el conjunto de rectas tangentes se puede parametrizar también.

34. Determinar el conjunto de las cúbicas que son singulares en el punto $[1 : 0 : 0]$, pasan por los puntos $[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]$ con tangentes respectivas $\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1$ y $\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2$ y además pasan por el punto $[0 : 1 : 1]$. ¿Cuántas de estas cúbicas son reducibles? ¿Cuántas tienen otro punto singular aparte del $[1 : 0 : 0]$?

35. Encontrar una paramatrización de la curva $\mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_0^2\mathtt{x}_2^2 = 0$.

36. Demostrar que una cuártica con cuatro puntos dobles es reducible.

37. **Teorema de Pappus.** Sean L_1 y L_2 dos rectas del plano proyectivo $K = \mathbb{P}^2$ y $\{o\} := L_1 \cap L_2$. Sean a_1, a_2 y a_3 tres puntos distintos de los ceros de L_1 y b_1, b_2 y b_3 tres puntos distintos en los ceros de L_2, todos ellos distintos de o. Sea L_{ij} la recta que une a_i con b_j para $1 \leq i, j \leq 3$ con $i \neq j$. Demostrar que los puntos $\{p_1\} = \mathcal{Z}(L_{12}, L_{21})$, $\{p_2\} = \mathcal{Z}(L_{13}, L_{31})$ y $\{p_3\} = \mathcal{Z}(L_{23}, L_{32})$ están alineados.

38. **Teorema de Pascal II.** Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{CP}^2$. Sea L_{ij} la recta que une a_i con b_j para $1 \leq i, j \leq 3$ con $i \neq j$. Supongamos que los puntos $\{p_1\} = \mathcal{Z}(L_{12}, L_{21})$, $\{p_2\} = \mathcal{Z}(L_{13}, L_{31})$ y $\{p_3\} = \mathcal{Z}(L_{23}, L_{32})$ están alineados. Demostrar que existe una cónica que pasa por los puntos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

39. Determinar bajo que condiciones dados seis puntos de inflexión de una cúbica no singular existe una cónica que pasa por ellos. Decidir si dicha cónica es irreducible o no.

40. (i) Comprobar que la cúbica $F := \mathtt{x}_1^2\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_0^3 - 4\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2^2$ es no singular y que $o := [0 : 1 : 0]$ es uno de sus puntos de inflexión.

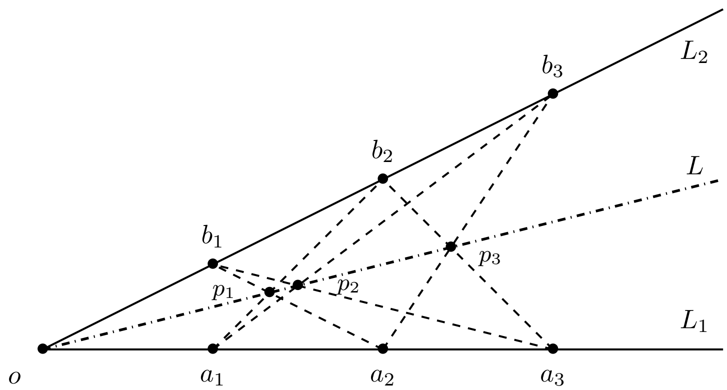

Figura 1: Teorema de Pappus.

(ii) Consideramos el conjunto Z de los ceros de F y la estructura de grupo con neutro o. Dados los puntos $a := [0 : 0 : 1]$ y $b := [2 : 4 : 1]$, encontrar un tercer punto $c \in Z$ de modo que el conjunto $G := \{o, a, b, c\}$ es un subgrupo de Z. ¿Es cíclico?

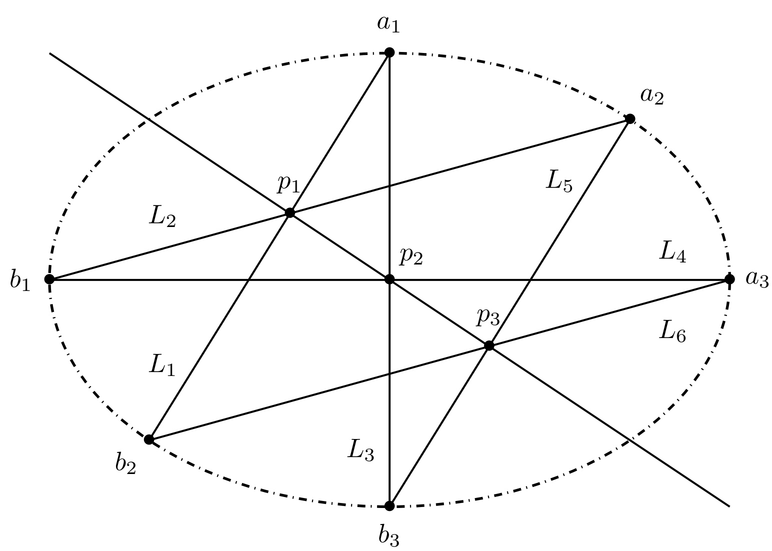

Figura 2: Teorema de Pascal II.