Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Diciembre (180 minutos): Viernes 19 de Enero de 2024

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen, pero deberán usarse al final del examen para escanearlos.

Ejercicio. Consideramos las curvas afines (cardioides):

$$f := (\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2)^2 + (2\mathtt{x}_1^2 + 2\mathtt{x}_2^2)\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2^2 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2],$$
$$g := (\mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2)^2 - (8\mathtt{x}_1^2 + 8\mathtt{x}_2^2)\mathtt{x}_1 - 16\mathtt{x}_2^2 \in \mathbb{C}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2].$$

(i) Calcular las curvas proyectivas F, G que se obtienen homogeneizando f, g (con respecto a la variable $\mathtt{x}_0$). Determinar los puntos de infinito de f, g, determinar si tienen asíntotas y determinar si tienen alguna rama parabólica.

(ii) Demostrar que F y G son curvas algebraicas irreducibles.

(iii) Demostrar que $\mathrm{Sing}(F) = \{[1 : 0 : 0], [0 : \mathtt{i} : 1], [0 : -\mathtt{i} : 1]\}$ y que cada uno de los tres puntos anteriores es una cúspide ordinaria para F.

(iv) Demostrar que $\mathrm{Sing}(G) = \{[1 : 0 : 0], [0 : \mathtt{i} : 1], [0 : -\mathtt{i} : 1]\}$ y que cada uno de los tres puntos anteriores es una cúspide ordinaria para G.

(v) Demostrar que tanto F como G son curvas aritméticamente racionales y encontrar parametrizaciones polinómicas para ambas curvas.

(vi) Demostrar que $\mathcal{Z}(F, G) = \{[1 : 0 : 0], [0 : \mathtt{i} : 1], [1 : -\mathtt{i} : 1], [-25 : 24 : 32], [-25 : 24 : -32]\}$ y calcular $I_p(F, G)$ para cada $p \in \mathcal{Z}(F, G)$. Comprobar que se cumple el Teorema de Bezout.

(vii) Calcular los puntos regulares de F cuyas rectas tangentes pasan por el punto $[1 : 0 : 0]$ y calcular dichas rectas tangentes. Análogamente, calcular los puntos regulares de G cuyas rectas tangentes pasan por el punto $[1 : 0 : 0]$ y calcular dichas rectas tangentes.

(viii) Demostrar que ni F ni G tienen puntos de inflexión.

(ix) Calcular los dos primeros términos de una parametrización irreducible de cada uno los lugares de F y G en su punto singular $[1 : 0 : 0]$. Comprobar usando dichos lugares que $I_{[1:0:0]}(F, G)$ es el valor obtenido en el apartado (vi). *Ayuda: No es necesario utilizar Newton-Puiseux, ni que alguna de las componentes de la parametrización sea una potencia de la variable.*

(x) Encontrar todas las cúbicas irreducibles C que cumplen: $[1 : 0 : 0] \in \mathcal{Z}(F, H)$ es una cúspide (ordinaria) para H, la recta tangente a H en $[1 : 0 : 0]$ es $\mathtt{x}_2$, $[0 : 0 : 1]$ es un punto de inflexión para H y el cardinal de $\mathcal{Z}(F, H)$ es 5.

Ver la siguiente página para los cálculos facilitados por el profesor.

Datos Relevantes:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(F,G) &= -25x_2^2(x_1^2+x_2^2)^4(4x_1-3x_2)(4x_1+3x_2),\\
\mathrm{Res}_{x_1}(F,G) &= -625x_0^8x_2^6(32x_0-25x_2)(32x_0+25x_2),\\
\mathrm{Res}_{x_2}(F,G) &= 625x_0^8x_1^6(24x_0+25x_1)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Hess}_F = 72(-2x_0^3x_1x_2^2+x_0^2x_1^4-x_0^2x_2^4-2x_0x_1^5-4x_0x_1^3x_2^2-2x_0x_1x_2^4-2x_1^6-6x_1^4x_2^2-6x_1^2x_2^4-2x_2^6).
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(F,\mathrm{Hess}_F) &= -46656x_2^2(x_1^2+x_2^2)^8,\\
\mathrm{Res}_{x_1}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 2176782336x_0^{16}x_2^8,\\
\mathrm{Res}_{x_2}(F,\mathrm{Hess}_F) &= 2176782336x_0^{16}x_1^8.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Hess}_G = 2304(64x_0^3x_1x_2^2+8x_0^2x_1^4-8x_0^2x_2^4+4x_0x_1^5+8x_0x_1^3x_2^2+4x_0x_1x_2^4-x_1^6-3x_1^4x_2^2-3x_1^2x_2^4-x_2^6).
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{x_0}(G,\mathrm{Hess}_G) &= -48922361856x_2^2(x_1^2+x_2^2)^8,\\
\mathrm{Res}_{x_1}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 6127097573297673637724 16x_0^{16}x_2^8,\\
\mathrm{Res}_{x_2}(G,\mathrm{Hess}_G) &= 612709757329767363772416x_0^{16}x_1^8.
\end{aligned}
$$