



Nombre:		Calificación
Apellidos:		
Posición:		
Titulación:		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Enero (180 minutos): Viernes 16 de Enero de 2026

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseáis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como la posición que ocupáis en el aula. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del examen, pero deberán usarse al final del mismo para escanear el examen realizado.

Ejercicio. Consideramos las cuárticas:

$$f := x_1^2 - x_2^2 - x_1^4 \in \mathbb{C}[x_1, x_2] \text{ (Leminiscata de Geronio)}$$

$$g := (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2] \text{ (Leminiscata de Bernoulli)}.$$

(1) Calcular las curvas proyectivas F, G que se obtienen homogeneizando f, g (con respecto a la variable x_0). Determinar los puntos de infinito de f, g , determinar si tienen asíntotas y determinar si tienen alguna rama parabólica.

(2) Demostrar que F, G son curvas algebraicas irreducibles.

(3) Demostrar que $\text{Sing}(F) = \{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ y que $[1 : 0 : 0]$ es un nodo ordinario para F , mientras que $[0 : 0 : 1]$ tiene dos lugares que comparten tangente.

(4) Demostrar que $\text{Sing}(G) = \{[1 : 0 : 0], [0 : \sqrt{-1} : 1], [0 : -\sqrt{-1} : 1]\}$ y que en todos ellos G tiene un nodo ordinario.

(5) Demostrar que F no es una curva aritméticamente racional, pero que admite una parametrización polinómica. [Ayuda: La aplicación polinómica $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 x_2)$ transforma la curva algebraica afín $x_1^2 + x_2^2 - 1$ en la curva algebraica afín f .]

(6) Demostrar que G es una curva aritméticamente racional y encontrar una parametrización polinómica para G . [Ayuda: La aplicación racional $\varphi : \mathbb{C}^2 \setminus \{x_1^2 + x_2^2 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2})$ transforma la curva algebraica afín $x_1^2 - x_2^2 - 1$ en la curva algebraica afín g .]

(7) Demostrar que $\mathcal{Z}(F, G) = \{[1 : 0 : 0], [1 : 1 : 0], [1 : -1 : 0], [\frac{1}{\sqrt{6}i} : \frac{1}{\sqrt{2}i} : 0], [-\frac{1}{\sqrt{6}i} : \frac{1}{\sqrt{2}i} : 0], [\frac{1}{\sqrt{6}i} : -\frac{1}{\sqrt{2}i} : 0], [-\frac{1}{\sqrt{6}i} : -\frac{1}{\sqrt{2}i} : 0]\}$ y calcular $I_p(F, G)$ para cada $p \in \mathcal{Z}(F, G)$. Comprobar que se cumple el Teorema de Bezout.

(8) Demostrar que F tiene exactamente cuatro puntos de inflexión: $[\frac{2}{\sqrt{3}i} : \sqrt{2}i : 1], [-\frac{2}{\sqrt{3}i} : \sqrt{2}i : 1], [\frac{2}{\sqrt{3}i} : -\sqrt{2}i : 1], [-\frac{2}{\sqrt{3}i} : -\sqrt{2}i : 1]$, mientras que G no tiene puntos de inflexión.

(9) Calcular los puntos regulares de F y de G cuyas rectas tangentes pasan por $[0 : 0 : 1]$.

(10) Calcular los tres primeros términos de una parametrización irreducible de cada uno los lugares de F en su punto singular $[1 : 0 : 0]$. Comprobar usando dichos lugares que $I_{[1:0:0]}(F, G)$ es el valor obtenido en el apartado (7).

Para mejorar la calificación:

(11) Encontrar todas las cúbicas irreducibles C que cumplen: $[1 : 0 : 0]$ es un nodo (ordinario) para C , las rectas tangentes a C en $[1 : 0 : 0]$ son $x_1 - x_2$ y $x_1 + x_2$, $[0 : 0 : 1]$ es un punto de inflexión para C con tangente x_0 y C pasa por el punto $[1 : 1 : 0]$.

Ved la siguiente página para encontrar los cálculos facilitados por el profesor.

DATOS RELEVANTES:

$$\text{Res}_{x_0}(F, G) = x_2^4(x_1 - x_2)^2(x_2 + x_1)^2(2x_1^2 + x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_1}(F, G) = x_2^{12}(6x_0^2 + x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_2}(F, G) = (x_0 - x_1)^2(x_0 + x_1)^2(3x_0^2 - x_1^2)^2x_1^8.$$

$$\text{Hess}_F = 24x_0^2(x_0^2x_1^2 - x_0^2x_2^2 + 2x_1^4 + 6x_1^2x_2^2).$$

$$\text{Res}_{x_0}(F, \text{Hess}_F) = 5184x_1^{12}(x_1 - x_2)^2(x_2 + x_1)^2(x_1^2 + 2x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_1}(F, \text{Hess}_F) = 26873856x_0^{12}x_2^8(3x_0^2 + 4x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_2}(F, \text{Hess}_F) = 5184x_0^4x_1^8(3x_0^2 - 2x_1^2)^2.$$

$$\text{Hess}_G = -\frac{1}{4}x_0^4x_1^2 + \frac{1}{4}x_0^4x_2^2 - x_0^2x_1^4 - 6x_0^2x_1^2x_2^2 - x_0^2x_2^4 - x_1^6 - x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^6.$$

$$16\text{Res}_{x_0}(G, \text{Hess}_G) = 81(x_1 - x_2)^2(x_2 + x_1)^2(x_1^2 + x_2^2)^8,$$

$$16\text{Res}_{x_1}(G, \text{Hess}_G) = 6561x_0^{16}x_2^8,$$

$$16\text{Res}_{x_2}(G, \text{Hess}_G) = 6561x_0^{16}x_1^8.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_0^2x_2$$

$$\text{Res}_{x_0}(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}) = 4x_1^8x_2^2,$$

$$\text{Res}_{x_1}(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}) = 16x_0^8x_2^4,$$

$$\text{Res}_{x_2}(F, \frac{\partial F}{\partial x_2}) = 4x_0^4x_1^2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 2x_0^2x_2 + 4x_1^2x_2 + 4x_2^3$$

$$\text{Res}_{x_0}(G, \frac{\partial G}{\partial x_2}) = 4x_2^2(3x_1^2 - x_2^2)^2(x_1^2 + x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_1}(G, \frac{\partial G}{\partial x_2}) = 16x_2^4x_0^4(3x_0^2 + 8x_2^2)^2,$$

$$\text{Res}_{x_2}(G, \frac{\partial G}{\partial x_2}) = -16x_1^2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1)x_0^4(x_0^2 + 8x_1^2)^2.$$

$$\sqrt{1 - x_1^2} = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{8}x_1^4 + \dots$$

