EXAMEN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
2° Ingeniería Informática

11 de Junio de 2007

TIEMPO: 3 horas

Dar respuestas breves pero razonadas a las siguientes preguntas:

[1].- (1.5 puntos).

(a) Encontrar enteros p y q tales que $1 = 13p + 55q$.

(b) Definir un isomorfismo de grupos $\phi : \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{55} \to \mathbb{Z}_{715}$, indicando explícitamente la imagen de un par (a, b).

[2].- (2 puntos).

Se considera le grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{20}^*$ formado por los elementos del anillo $\mathbb{Z}_{20}$ que admiten un inverso para el producto.

(a) ¿Cúal es el orden de este grupo?

(b) Dar una lista de las clases de isomorfía de los grupos abelianos de ese orden, indicando los coeficientes de torsión y los divisores elementales correspondientes a cada clase.

(c) ¿Cúal de los elementos de esa lista es isomorfo a $\mathbb{Z}_{20}^*$?.

[3].- (2. puntos).

Demostrar que el conjunto G formado por las siguientes matrices,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

es un grupo con el producto de matrices. ¿Es G cíclico? ¿Es G abeliano? Encontrar si lo hubiera un subgrupo de G con k elementos, en los casos $k = 2, 3, 4$.

[4].- (1.5 puntos).

En $\mathbb{Q}[x]$ consideramos los polinomios

$$F = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6, \quad G = x^4 - 1.$$

(a) Hallar un generador del ideal $I = (F, G)$ en $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Estudiar si $\mathbb{Q}[x]/I$ es un cuerpo.

[5].- (3 puntos).

Sea $P = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $L = \mathbb{Z}_3[x]/(P)$ y $\alpha = \bar{x} \in L$.

(a) Probar que L es un cuerpo. Indicar su característica y su cardinal. Dar una base de L como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$.

(b) Indicar los órdenes posibles de los elementos del grupo multiplicativo $(L^*, \cdot)$.

(c) Calcular el orden de α en el grupo $(L^*, \cdot)$.

(d) Mostrar que la clase del polinomio $x^6 - x^3 + x - 1$ en L es un elemento del grupo multiplicativo L^* y calcular su inverso.

(e) Consideramos ahora el anillo de polinomios $L[y]$ con coeficientes en el cuerpo L. Probar que el anillo cociente $L[y]/(y^2 + 1)$ es un cuerpo. *Sugerencia:* utilizar los resultados del apartado (b).