EXAMEN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
2° Ingeniería Informática

15 de Septiembre de 2007. TIEMPO: 3 horas

Dar respuestas breves y razonadas a las siguientes preguntas

1. (1,75 ptos.)

(a) Resolver la ecuación diofántica $18x - 7y = 48$.

(b) Sean a, b, p enteros con p primo. Demuestra que

$$(a+b)^p = a^p + b^p \mod p.$$

2. (1,75 ptos.) Consideramos los conjuntos de matrices siguientes:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) = \{A \in M_2(\mathbf{R}) / \det A \neq 0\}, \quad \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) = \{A \in M_2(\mathbf{R}) / \det A = 1\}.$$

(a) Probar que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ es un grupo y que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

(b) Indicar un homomorfismo de grupos $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}^*$.

(c) Mostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ es un subgrupo normal de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ y calcular el grupo cociente $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ usando el primer teorema de isomorfía.

3. (2 ptos.) Se considera el grupo abeliano G generado por a, b, c, d con las relaciones siguientes:

$$12a + 6b + 6c - 6d = 0, \quad 2b - 4c - 12d = 0.$$

(a) Calcular los coeficientes de torsión y el rango de G.

(b) Encontrar, si existe, un elemento de orden k, para $k = 2, 4, 6, 12$, en algún grupo isomorfo a G.

4. (2 ptos.) Estudiar si son isomorfos los siguientes pares de anillos justificando la respuesta.

(a) $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$ y $\mathbf{R}[x]/(x^2-1)$.

(b) $\mathbf{Z}_{27}$ y $\mathbf{Z}_3[x]/(x^3 - x + 1)$.

(c) $\mathbf{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ y $\mathbf{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$.

(d) $\mathbf{Z}_4[x]$ y $\mathbf{Z}_2[x]$.

5. (2, 5 ptos.)

(a) En $\mathbf{Q}[x]$ hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$P = x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 4, \quad Q = x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 4.$$

¿Está el polinomio $x^3 + 2x + 5$ en el ideal generado por P y Q en $\mathbf{Q}[x]$?

(b) Probar que el anillo cociente $L = \mathbf{Q}[x]/(x^3 + 2x + 4)$ es un cuerpo. Dar una base e indicar la dimensión de L como espacio vectorial sobre $\mathbf{Q}$.

(c) Hallar el elemento inverso para la multiplicación de $\overline{x-1} \in L$.