EXAMEN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Ingeniero en Informática – 11 de septiembre de 2009

Duración: 3 horas

NOMBRE Y APELLIDOS:

GRUPO:

1. [1.5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} 2x \equiv 12 \pmod{7} \\ 3x \equiv -3 \pmod{5} \\ x \equiv 20 \pmod{14} \end{cases}$$

2. *a*) [0.75 puntos] Halla el resto de dividir $2^{62} + 3^{62}$ entre 13.

   b) [0.75 puntos] Calcula las raíces en $\mathbb{Z}_5[x]$ del polinomio $x^{223} + 2x^{61} + 3x^{54} + 6$.

3. *a*) [0.5 puntos] Encuentra un homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{12}$ distinto del homomorfismo nulo.

   b) Considera los enteros $n \geq 2$, $m \geq 2$ y $k \geq 1$, y la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{Z}_n & \to & \mathbb{Z}_m \\ & [a]_n & \mapsto & [ka]_m \end{array}$$

   1) [0.5 puntos] Estudia para qué valores de k la aplicación f_k está bien definida.
   2) [0.5 puntos] Estudia en qué casos f_k es un homomorfismo de grupos.
   3) [0.5 puntos] Estudia en qué casos f_k es un homomorfismo de anillos.

4. *a*) [0.75 puntos] Demuestra que en el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[x]$ todos los ideales son principales. ¿Ocurre lo mismo en $\mathbb{Z}[x]$?

   b) [0.75 puntos] Considera el homomorfismo evaluación

$$\begin{array}{rccc} ev_{\sqrt{2}} : & \mathbb{Q}[x] & \to & \mathbb{R} \\ & f(x) & \mapsto & f(\sqrt{2}) \end{array}$$

   Prueba que el núcleo de $ev_{\sqrt{2}}$ es el ideal principal generado por el polinomio $x^2 - 2$.

5. [2 puntos] Estudia la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios:

   a) $f = x^4 + 3x - 1$.
   b) $f = 3x^5 - 72x^4 + 45x - 36$.
   c) $f = x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 21x^2 + 2x - 14$.

   Indica en cuáles de los casos anteriores $\mathbb{Q}[x]/(f)$ es cuerpo. Calcula además el inverso de la clase del polinomio $x^3 + 3$ en $\mathbb{Q}[x]/(f)$ en alguno de los apartados *a*, *b* o *c* anteriores.

6. [1.5 puntos] Determinar el grupo cociente G/H, indicando su rango, sus factores invariantes y sus divisores elementales, donde $G = \mathbb{Z}^4$ y H es el subgrupo de G generado por los elementos $a = (2, 14, 4, 2)$, $b = (-2, 4, 18, 12)$ y $c = (2, 26, 16, 14)$. Indica si el cociente $\mathbb{Z}/H$ puede tener un elemento de orden 4 o uno de orden 6, justificando la respuesta.