# EXAMEN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Ingeniero en Informática – 2 de septiembre de 2011

Duración: 3 horas

## NOMBRE Y APELLIDOS:

## GRUPO:

1. [1,5 puntos]

   a) Resuelve el siguiente sistema de congruencias

   $$x = 2 \mod 5, \quad 2x = 1 \mod 7, \quad 3x = 4 \mod 11$$

   b) Determina el resto de dividir $(13)^{226}$ entre 15.

2. [2 puntos] Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $H$ un subgrupo de $G$.

   a) Si $a \in G$ comprueba que el conjunto $aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ es un subgrupo de $G$. Prueba que $H$ es un subgrupo normal si y sólo si $aHa^{-1} = H$ para todo $a$ en $G$.

   b) En el grupo diédrico $D_4$ denotamos por $r$ la rotación de ángulo $\pi/2$ y por $s$ la simetría axial de forma que $r \circ s = s \circ r^3$. Sea $H$ el subgrupo generado por $s$. Halla los subgrupos de $D_4$ de la forma $aHa^{-1}$ para $a \in D_4$. ¿Es $H$ un subgrupo normal?

3. [1,5 puntos] Enumera las clases de isomorfía de los grupos abelianos de orden 108, indicando divisores elementales, factores invariantes y un grupo representando cada clase. Estudia si alguno de estos grupos tiene elementos de orden 9 dando un ejemplo en el caso de que los tenga. ¿Cúales de estos grupos puede ser generado por dos elementos?

4. [1,5 puntos] En $\mathbb{Z}_2[x]$ consideramos los polinomios $f = x^4 + 1$ y $g = x^3 + x + 1$.

   a) Prueba que el máximo común divisor de $f$ y $g$ es igual a 1 y halla una identidad de Bezout entre $f$ y $g$.

   b) *Una versión del teorema chino del resto para polinomios*: Halla un polinomio $h$ en $\mathbb{Z}_2[x]$ tal que el resto de dividir $h$ entre $f$ sea igual a $x$ y el resto de dividir $h$ entre $g$ sea igual a 1.

5. [1,5 puntos] Consideramos los siguientes anillos:

   $$\begin{aligned} A &= \mathbb{Z}_2[x]/(x^4+1), & B &= \mathbb{Z}_9, \\ C &= \mathbb{Q}[x]/(x^4+9x+3), & D &= \mathbb{Z}_3[x]/(x^4+x+1). \end{aligned}$$

   Indica cuáles de los anillos anteriores son cuerpos. Indica para cada uno de los anillos $A, B, C$ y $D$ si hay divisores de cero dando un ejemplo en el caso de que hubiera.

6. [2 puntos] Consideramos el polinomio $f = x^2+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ y el anillo cociente $k = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$. Denotamos por $\alpha$ la clase $[x] \mod f$ en $k$.

   a) Indica cuáles son los elementos de $k$ y prueba que $k$ es cuerpo.

   b) Halla el inverso de $1 + \alpha$ para el producto.

   c) Indica los órdenes posibles de los elementos del grupo de unidades $k^*$.

   d) Prueba que $1+\alpha$ tiene orden 8 en $k^*$ y halla un entero $1 < n < 8$ tal que $(1+\alpha)^n = \alpha$.