| Nombre: | | Calificación |
|---|---|---|
| Apellidos: | | |
| DNI/Alias | | |
| Titulación | | |

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**Examen Febrero (180 minutos)**: 1 de Febrero de 2017

*Instrucciones:* Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

Sean $f_1 := \mathtt{t}^4 - 10\mathtt{t}^2 + 20$, $f_2 := \mathtt{t}^4 + 10\mathtt{t}^2 + 20$ y $f_3 := \mathtt{t}^4 + \mathtt{t}^3 + \mathtt{t}^2 + \mathtt{t} + 1$ y sea $L$ el cuerpo de descomposición de $f_1 f_2 f_3$ sobre $\mathbb{Q}$. Sea $L_i \subset L$ el cuerpo de descomposición de $f_i$ sobre $\mathbb{Q}$ para $i = 1, 2, 3$. *Ayuda: Puede ser útil a lo largo del ejercicio calcular una expresión explícita en términos de radicales de alguna de las raíces de $f_3$.*

(1) Demostrar que los polinomios $f_1$, $f_2$ y $f_3$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(2) Calcular los grados de las extensiones $L_i|\mathbb{Q}$ para $i = 1, 2, 3$ y de $L|\mathbb{Q}$, y encontrar una cantidad finita de generadores de cada una de ellas.

(3) Demostrar que el grupo de Galois de $G_i := G(L_i : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ para $i = 1, 2, 3$.

(4) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de $L$ en términos de los generadores de $L|\mathbb{Q}$ obtenidos en el apartado (2).

(5) Demostrar que el grupo de Galois de $G := G(L : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(6) Demostrar que $G$ posee exactamente un elemento de orden 1, siete elementos de orden 2 y ocho elementos de orden 4.

(7) Probar que $G$ tiene exactamente un subgrupo de orden 1, siete subgrupos de orden 2, once subgrupos de orden 4, tres subgrupos de orden 8 y un subgrupo de orden 16. Determinar la estructura de cada uno de los subgrupos de orden 4 y de cada uno de los subgrupos de orden 8 (indicando en cada caso, cuántos hay de cada tipo).

(8) Para cada divisor positivo $d$ del grado $[L : \mathbb{Q}]$ calcular cuántas subextensiones tiene $L|\mathbb{Q}$ de grado $d$. ¿Son todas de Galois? ¿Son todas quasiradicales?

(9) Encontrar un conjunto finito de generadores de cada una de las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ de grado 2 y de grado 8.

(10) Encontrar un conjunto finito de generadores de cada una de las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ de grado 4.