

ECUACIONES ALGEBRAICAS, CURSO 2023-2024

José F. Fernando y José Manuel Gamboa

Polinomios en varias variables

1. Sean p un número primo impar y s_1, \dots, s_{p-1} las formas simétricas elementales en las indeterminadas x_1, \dots, x_{p-1} . Denotamos $S_i := s_i(1, \dots, p-1) \in \mathbb{Z}$. Demostrar que $S_1, \dots, S_{p-2}, S_{p-1} + 1$ son múltiplos de p .
2. Sea $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ un polinomio no nulo tal que $g(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Demostrar que el polinomio $f := x_n^2 + g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es irreducible.
3. Probar que tres números no nulos $x, y, z \in \mathbb{C}$, convenientemente ordenados, son términos consecutivos de una progresión geométrica si y sólo si

$$(xy + xz + yz)^3 = xyz(x + y + z)^3.$$

4. Consideremos la aplicación

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$$

y el conjunto $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : f(x, y, z) = 0\}$, donde f es el polinomio

$$f(x, y, z) := x^2(y - z) + x(z^2 - y^2) + yz(y - z).$$

(1) Demostrar que φ es sobreyectiva y calcular la fibra del punto $p := (1, 1, 1)$. ¿Qué grado tiene la aplicación φ , esto es, cuántos elementos tiene la fibra que más elementos tiene? Encontrar un punto $q \in \mathbb{C}^3$ cuya fibra conste de menos puntos que el grado de φ .

(2) Factorizar f en producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x, y, z]$.

(3) Encontrar un polinomio $\Delta \in \mathbb{Z}[u, v, w]$ tal que

$$\varphi(\mathbb{C}^3 \setminus M) = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 : \Delta(u, v, w) \neq 0\}.$$

¿Contiene $\varphi(\mathbb{C}^3 \setminus M)$ al punto $(0, -3, 2)$?

5. Se consideran los polinomios

$$f(x, y) := x^2 - 5y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2 \quad \& \quad g(x, y) := x^2 - 7y^2 - 3x - 5y + 2.$$

Encontrar todos los puntos de corte de las cónicas afines

$$C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\} \quad \& \quad C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

Generalidades sobre cuerpos

6. Sea \mathfrak{a} el ideal de $\mathbb{Q}[t]$ generado por los polinomios

$$f(t) := t^4 + t^3 + 2t^2 + t + 1 \quad \& \quad g(t) := t^3 + 4t^2 + 4t + 3.$$

Probar que el cociente $K := \mathbb{Q}[t]/\mathfrak{a}$ es un cuerpo extensión de \mathbb{Q} . Hallar el grado y un elemento primitivo de la extensión $K|\mathbb{Q}$.

7. Calcular el polinomio mínimo de $\alpha := \beta^2 + \beta$ sobre \mathbb{Q} , donde $\beta \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio $f := t^3 + 3t^2 - 3$.
8. (i) Sean $L|K$ una extensión finita y $f \in K[t]$ un polinomio irreducible. Probar que si f tiene alguna raíz en L entonces el grado de f divide al grado $[L : K]$ de la extensión.
(ii) Supongamos que $[L : K]$ es un número primo. Demostrar que cada elemento $\alpha \in L \setminus K$ cumple que $L = K(\alpha)$.

9. Sean K un cuerpo, $a \in K$ y m y n enteros positivos primos entre sí. Demostrar que el polinomio $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^{mn} - a$ es irreducible en $K[\mathfrak{t}]$ si y sólo si los polinomios $g(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^m - a$ y $h(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^n - a$ son irreducibles en $K[\mathfrak{t}]$.
10. Sean K un cuerpo y $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^n - a \in K[\mathfrak{t}]$. Supongamos que f es irreducible en $K[\mathfrak{t}]$. Dados un divisor m de n y una raíz α de f , calcular el polinomio mínimo de α^m sobre K .
11. Sean $E|K$ una extensión algebraica y $\sigma : E \rightarrow E$ un homomorfismo de cuerpos cuya restricción a K es la identidad. Demostrar que σ es sobreyectivo.
12. Hallar los polinomios mínimos de $\alpha := \sqrt[3]{5}$ sobre los cuerpos \mathbb{Q} y $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.
13. Sea $L|K$ una extensión de cuerpos de característica 0. Supongamos que existe un entero positivo n tal que $[K(u) : K] \leq n$ para cada $u \in L$. Demostrar que la extensión $L|K$ es finita, de grado menor o igual que n .
14. Dados $k \in \mathbb{Z} \setminus 7\mathbb{Z}$ y $\alpha_k := 2k\pi/7$ calcular el polinomio mínimo de $u := 2 \cos \alpha_k$ sobre \mathbb{Q} .
15. Sean $E|K$ una extensión de cuerpos y $u \in E$ un elemento no nulo algebraico sobre K .
 - (1) Demostrar que la aplicación $f_u : K(u) \rightarrow K(u)$, $x \mapsto ux$ es un isomorfismo de K -espacios vectoriales
 - (2) Demostrar que el polinomio mínimo de u sobre K es, salvo tal vez el signo, el polinomio característico del endomorfismo f_u .
 - (3) Sean $\mathfrak{i} := \sqrt{-1}$, $r := \sqrt[3]{2}$ y $u := r + \mathfrak{i}$. Demostrar que $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(r, \mathfrak{i})$.
 - (4) Calcular el polinomio mínimo de u sobre \mathbb{Q} .
 - (5) Calcular el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de $v := 1 + r + r^2$.

Cuerpo de descomposición de un polinomio

16. Sean $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y L un cuerpo de descomposición del polinomio $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^p - 3$ sobre \mathbb{Q} . Calcular el grado $[L : \mathbb{Q}]$.
17. Sea α una raíz del polinomio $f := \mathfrak{t}^3 + \mathfrak{t}^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[\mathfrak{t}]$ en un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Z}_2 . Demostrar que $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ es un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Z}_2 .
18. Sean $E|K$ una extensión algebraica y $\sigma : E \rightarrow E$ un homomorfismo de cuerpos cuya restricción a K es la identidad. Demostrar que σ es sobreyectivo.
19. Probar que $u := \operatorname{tg}(2\pi/5)$ es un número algebraico sobre \mathbb{Q} y hallar su polinomio mínimo. ¿Es $\mathbb{Q}(u)$ un cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} de algún polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[\mathfrak{t}]$?
20. Encontrar conjuntos finitos de generadores de las subextensiones $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}|\mathbb{Q}$, donde \mathbb{Q}_f es un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} , en los siguientes casos:

$$f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^9 - 1, \quad f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^4 + 5\mathfrak{t}^2 + 6 \quad \& \quad f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^6 - 8.$$

Encontrar los grados de las extensiones $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$.

21. Sean K un cuerpo en el que el polinomio $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^2 + 1$ no tiene ninguna raíz, y denotemos \mathfrak{i} una raíz de f en un cuerpo de descomposición de f sobre K . Supongamos que todo elemento de $K(\mathfrak{i})$ es el cuadrado de un elemento de $K(\mathfrak{i})$. Probar que toda suma de cuadrados en K es un cuadrado en K y calcular la característica de K .
22. Hallar un elemento primitivo u de la extensión $L|\mathbb{Q}$, donde L es un cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} de $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^3 - 7$. Hallar el polinomio mínimo de u sobre \mathbb{Q} .
23. Sean K un cuerpo, $a \in K \setminus \{0\}$, p un número primo, $f(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^p - a$, $h(\mathfrak{t}) := \mathfrak{t}^p - 1$ y L un cuerpo de descomposición de $f \cdot h$ sobre K .
 - (1) Demostrar que si u es una raíz de f en L toda raíz de f en L es de la forma ζu para cierta raíz $\zeta \in L$ del polinomio h .
 - (2) Demostrar que si f es reducible en $K[\mathfrak{t}]$, entonces f tiene alguna raíz en K .

Grupo de automorfismos de una extensión

24. (1) Dado un primo $p \in \mathbb{Z}$, ¿cuál es el polinomio mínimo de $\sqrt[p]{p}$ sobre \mathbb{Q} ?
 (2) Demostrar que $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
 (3) Calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})|\mathbb{Q}$.
 (4) Calcular el polinomio mínimo de $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ sobre \mathbb{Q} .
25. Sean $L|K$ una extensión de Galois y $\alpha \in L$ tal que el único automorfismo de L que deja fijo α es la identidad. Demostrar que $L = K(\alpha)$.
26. Sea α la raíz séptima real de 5. ¿Cuáles de las siguientes extensiones son de Galois?

$$\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \alpha)|\mathbb{Q}(\alpha), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-5})|\mathbb{Q} \quad \& \quad \mathbb{R}(\sqrt{-7})|\mathbb{R}.$$

27. Sean K un cuerpo de característica 0 tal que todo polinomio de $K[t]$ de grado impar tiene alguna raíz en K y $L|K$ una extensión de Galois. Demostrar que el orden del grupo de Galois $G(L : K)$ es potencia de 2.
28. Sean $L|\mathbb{Q}$ una subextensión de Galois de $\mathbb{C}|\mathbb{Q}$ y denotemos $i := \sqrt{-1}$ y

$$\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a + ib \mapsto a - ib \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

- (1) Demostrar que $\sigma(L) = L$.
 (2) Probar que $\tau := \sigma|_L$ es un elemento del grupo de Galois $G(L : \mathbb{Q})$ cuyo cuerpo fijo es $L \cap \mathbb{R}$.
 (3) Probar que τ es la identidad si $L \subset \mathbb{R}$ y tiene orden 2 en caso contrario.
 (4) Sean $f \in \mathbb{Q}[t]$ y $\mathbb{Q}_f \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} . Supongamos que $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$ es impar. Probar que todas las raíces de f en \mathbb{C} son números reales.
29. Sean $\alpha := e^{\pi i/3}$ y β una raíz del polinomio $f(t) := t^4 - 6t^2 + 6$. Encontrar conjuntos finitos de generadores de la clausura de Galois $L|\mathbb{Q}$ de las siguientes extensiones y calcular en cada caso el grado de la extensión $L|\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\beta)|\mathbb{Q} \quad \& \quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})|\mathbb{Q}.$$

30. (1) Probar que los polinomios $g(t) := t^2 + 4$, $h(t) := t^3 + 4$ y $f(t) := t^6 + 4$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[t]$.
 (2) Demostrar que $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$ es un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} .
 (3) Calcular el grado de la extensión $L|\mathbb{Q}$.
 (4) ¿Cuál es el orden del grupo de Galois $G(L : \mathbb{Q})$? Probar que es un grupo diédrico.
 (5) Encontrar conjuntos finitos de generadores de todas las subextensiones no triviales de $L|\mathbb{Q}$ y determinar cuáles son de Galois.
31. Sean K un cuerpo de característica 0 y $f \in K[t]$ un polinomio irreducible. Sea K_f un cuerpo de descomposición de f sobre K y supongamos que el grupo de Galois $G(K_f : K)$ es cíclico. Probar que el discriminante $\Delta(f)$ es el cuadrado de un elemento de K si y sólo si el orden del grupo $G(K_f : K)$ es impar.
32. Sean K un cuerpo de característica cero y $f \in K[t]$ un polinomio irreducible de grado 3. Sea K_f un cuerpo de descomposición de f sobre K . Demostrar que $G(K_f : K) \simeq \mathbb{Z}_3$ si el discriminante $\Delta(f)$ de f es el cuadrado de un elemento de K mientras que $G(K_f : K) \simeq \mathbb{S}_3$ si $\Delta(f)$ no es el cuadrado de un elemento de K .
33. (1) Probar que $h(t) := t^4 + 1$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[t]$.
 (2) Sea L un cuerpo de descomposición de h sobre \mathbb{Q} . Encontrar un elemento primitivo de la extensión $L|\mathbb{Q}$.
 (3) ¿Cuál es el orden del grupo de Galois $G(L : \mathbb{Q})$? Demostrar que es abeliano y calcular sus coeficientes de torsión.
 (4) Encontrar elementos primitivos de todas las subextensiones no triviales de $L|\mathbb{Q}$ y determinar cuáles son de Galois.

Grupo de Galois de algunos polinomios

34. (1) Hallar el polinomio ciclotómico Φ_9 y su grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(\Phi_9)$.
 (2) Sea $L \subset \mathbb{C}$ un cuerpo de descomposición de Φ_9 sobre \mathbb{Q} . Expresar como extensiones simples las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ y en cada caso encontrar el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de un elemento primitivo.
35. Sean n y k dos números enteros positivos tales que, o bien n es impar o bien tanto n como k son pares. Utilizar, si se desea, el Teorema del número primo de Dirichlet para demostrar que existen números enteros u, v tales que

$$\text{mcd}(u, n) = \text{mcd}(v, n) = 1 \quad \& \quad k = u + v.$$

36. Sean K un cuerpo de característica 0 y $f \in K[t]$ un polinomio irreducible de grado 3. Sea L un cuerpo de descomposición de f sobre K . ¿Qué se puede decir acerca del número de extensiones $L|E$ de grado 2, donde $K \subset E \subset L$?
37. Sean u, v y w las raíces en \mathbb{C} del polinomio $f(t) := t^3 - 3t + 1$. Sean $a := u^2v^2$, $b := u^2w^2$ y $c := v^2w^2$.
 (1) Calcular los coeficientes del polinomio $g(t) := (t - a)(t - b)(t - c)$. ¿Es g irreducible en $\mathbb{Q}[t]$?
 (2) Calcular el discriminante de g y el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(g)$.
38. Encontrar infinitas ternas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ que satisfagan la igualdad $x^2 - 3y^2 = z^2$.
39. Sean $p > 5$ un número primo y $f_p(t) := t^4 + pt + p \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f_p)$.
40. Sean p un número primo y supongamos que el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es cíclico, donde $f(t) := t^3 - pt + p$. Demostrar que $p \equiv 1 \pmod{3}$.
41. Sean K un cuerpo de característica 0 y $a, b \in K$ tales que el polinomio $f(t) := t^4 + at^2 + b$ es irreducible en $K[t]$. Hallar, en función de los valores de a y b , el grupo de Galois de f sobre K .
42. Sean $f_1(t) := t^4 - 2t^2 + 2$, $f_2(t) := t^3 + 9t + 18$, L_i el cuerpo de descomposición de f_i sobre \mathbb{Q} y L el menor subcuerpo de \mathbb{C} que contiene a L_1 y L_2 .
 (i) Probar que el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f_1)$ es isomorfo al grupo diedral \mathcal{D}_4 de orden 8.
 (ii) Sean v y w dos raíces de f_1 en L_1 que no son opuestas. Calcular el polinomio mínimo de w sobre $\mathbb{Q}(v)$.
 (iii) Probar que f_2 tiene tres raíces distintas u_1, u_2 y u_3 en L_2 , que el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f_2) \cong \mathcal{S}_3$ y que $G_{L_1}(f_2)$ es isomorfo a \mathbb{Z}_3 .
 (iv) Demostrar que $[L : \mathbb{Q}] = 24$.
 (v) Probar que $L_1|\mathbb{Q}$ es la única subextensión de $L|\mathbb{Q}$ de grado 8.
 (vi) Demostrar que $\mathbb{Q}(u_i)|\mathbb{Q}$, con $i = 1, 2, 3$ son todas las subextensiones de grado 3 de la extensión $L|\mathbb{Q}$.
 (vii) Demostrar que existe un único automorfismo $\rho \in G(L : \mathbb{Q})$ tal que $\rho(v) = w$, $\rho(w) = -v$ y $\rho(u_1) = u_2$. Calcular el grado $[F : \mathbb{Q}]$, donde $F = \text{Fix}(\rho)$ es el cuerpo fijo de ρ .
 (viii) Hallar un elemento primitivo θ de la extensión $F|\mathbb{Q}$ y el polinomio mínimo $P_{\mathbb{Q}, \theta}$ de θ sobre \mathbb{Q} .

Resolubilidad por radicales

43. Sean K un cuerpo y los polinomios de $K[t]$ de grado n

$$f(t) := \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad \& \quad g(t) := \sum_{i=0}^n a_{n-i} t^i.$$

Mostrar que f es resoluble por radicales sobre K si y sólo si g lo es.

44. (1) Estudiar si el polinomio $f(t) := t^6 - 3t^4 + 6t^2 - 3$ es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} .
 (2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de f . Calcular el polinomio mínimo de $\alpha^2 - 1$ sobre \mathbb{Q} .

45. Sean $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ dos polinomios resolubles por radicales.

- (1) ¿Se puede asegurar que también $f + g$ es resoluble por radicales?
 (2) ¿Se puede asegurar que fg es resoluble por radicales?

46. ¿Es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} el polinomio

$$h(t) := t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1?$$

47. ¿Es $f := t^5 - 5t^4 + 5 \in \mathbb{Q}[t]$ resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} ?

48. Sean K un cuerpo de característica 0 y $a, b, c, d \in K$. ¿Es resoluble por radicales sobre K el polinomio

$$f(t) := t^8 + at^7 + bt^6 + ct^5 + dt^4 + ct^3 + bt^2 + at + 1?$$

49. Sean $\xi := e^{2\pi i/7}$ y $L := \mathbb{Q}(\xi)$.

- (i) ¿Cuántas subextensiones de grado dos posee la extensión $L|\mathbb{Q}$? Obtener elementos primitivos de dichas subextensiones y los polinomios mínimos sobre \mathbb{Q} de dichos elementos.
 (ii) ¿Contiene L a $i := \sqrt{-1}$? Sea $\gamma := e^{\pi i/7}$. Demostrar que $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
 (iii) ¿Es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} el polinomio

$$h(t) := t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1?$$

50. Sean $f := t^7 - 7$ y L un cuerpo de descomposición de f sobre \mathbb{Q} .

- (i) Calcular el grado de la extensión $L|\mathbb{Q}$ y encontrar generadores suyos.
 (ii) Describir los \mathbb{Q} -automorfismos de L .
 (iii) ¿Es abeliano el grupo de Galois $G := G(L : \mathbb{Q})$? ¿Es resoluble?
 (iv) ¿Qué números enteros son órdenes de elementos de G . ¿Cuántos elementos tiene G de cada orden?
 (v) Demostrar que todos los subgrupos de G cuyo orden divide a 6 son cíclicos.
 (vi) Encontrar un sistema generador de G formado por dos elementos. Exhibir una torre normal con factores cíclicos para el grupo G y una torre de resolución para la extensión $L|\mathbb{Q}$.
 (vii) Para cada divisor positivo d del orden de G calcular el número de subgrupos de G de orden d .
 (viii) ¿Cuántos subgrupos normales tiene G ? ¿De qué órdenes?
 (ix) Para cada divisor positivo d del grado $[L : \mathbb{Q}]$ calcular cuántas subextensiones tiene $L|\mathbb{Q}$ de grado d . ¿Cuántas de estas subextensiones son de Galois?
 (x) Encontrar generadores de cada subextensión de $L|\mathbb{Q}$.

51. Sean K un cuerpo de característica 0 y t, x_1, \dots, x_n indeterminadas sobre K . Denotamos s_1, \dots, s_n las formas simétricas elementales en las indeterminadas x_1, \dots, x_n y consideramos el polinomio

$$f(t) := t^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} s_{n-j} t^j = \prod_{k=1}^n (t - x_k)$$

y el cuerpo $L := K(s_1, \dots, s_n)$. Demostrar que si c_1, \dots, c_n son elementos de K distintos dos a dos y $E := K(x_1, \dots, x_n)$, entonces $u := \sum_{k=1}^n c_k x_k$ es un elemento primitivo de la extensión $E|L$.

52. (**Ternas pitagóricas**) Emplear el Teorema 90 de Hilbert para demostrar que una terna (x, y, z) de números enteros no nulos primos dos a dos cumple $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo si existen $s, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $s \neq 0$ y

$$(sx, sy, sz) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2).$$

53. (**Forma aditiva del Teorema 90 de Hilbert**) (i) Sean $L|K$ una extensión de Galois y $x \in L$. Se llama *traza* de x a

$$\mathbb{T}(x) := \sum_{\sigma \in G(L:K)} \sigma(x).$$

Demostrar que $\mathbb{T}(x) \in K$.

(ii) Supongamos que K tiene característica 0 y que el grupo de Galois $G(L:K) := \langle \sigma \rangle$ es cíclico. Demostrar que la traza de un elemento $x \in L$ es nula si y sólo si existe $\alpha \in L$ tal que $x = \alpha - \sigma(\alpha)$.

Cuerpos finitos

54. Calcular el inverso de 8 en \mathbb{F}_{29} .
55. Sean $f \in \mathbb{F}_p[t]$ un polinomio irreducible y θ una raíz de f en un cuerpo de descomposición E de f sobre \mathbb{F}_p . Sea n el orden de θ en el grupo multiplicativo $E^* = E \setminus \{0\}$. Demostrar que f divide a $t^n - 1$ en $\mathbb{F}_p[t]$.
56. Sea α un generador del grupo cíclico formado por los elementos no nulos del cuerpo \mathbb{F}_{1024} . Demostrar que $\mathbb{F}_{1024} = \mathbb{F}_2(\alpha^3)$.
57. Sean p un número primo impar y $a \in \mathbb{F}_p$ un elemento que no es el cuadrado de otro elemento de \mathbb{F}_p . Sea n un entero positivo. Demostrar que a es el cuadrado de un elemento de \mathbb{F}_{p^n} si y sólo si n es par.
58. (1) Probar que el polinomio $f(t) := t^3 + 2t + 2 \in \mathbb{F}_3[t]$ es irreducible.
(2) Sea u una raíz de f en una extensión de \mathbb{F}_3 . Hallar las raíces cúbicas de $u + 2$ en $\mathbb{F}_3(u)$.
59. ¿Es irreducible en $\mathbb{F}_{256}[t]$ el polinomio $f(t) := t^3 + t + 1$?
60. (1) Sean $i := \sqrt{-1}$ y $A := \mathbb{Z}[i]$ el anillo de los enteros de Gauss. Demostrar que el cociente $E := A/7A$ es un cuerpo finito y calcular cuántos elementos tiene.
(2) Determinar el cuerpo primo K de E y un elemento primitivo ξ de la extensión $E|K$. Calcular el polinomio mínimo de ξ sobre K .
(3) ¿Cuántos elementos $\alpha \in E$ cumplen la igualdad $E = K(\alpha)$?
(4) ¿Cuántos cuerpos isomorfos a K contiene E ?
61. (1) Factorizar $t^{16} - t$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_2[t]$.
(2) Factorizar $t^9 - t$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_3[t]$.
62. Escribir las tablas de sumar y multiplicar del cuerpo de 9 elementos.
63. Sean K un cuerpo con 2^{10} elementos y $\alpha \in K^*$ un generador del grupo multiplicativo $K^* := K \setminus \{0\}$. Encontrar un elemento primitivo de cada subextensión de $K|\mathbb{F}_2$.

64. ¿Tiene alguna raíz el polinomio $f(t) := t^2 - [7]_{23} \in \mathbb{F}_{23}[t]$ en el cuerpo \mathbb{F}_{23} ?
65. Sean $K := \mathbb{F}_{31}$ y $f(x, y) := 317x^2 - 151xy + 40y^2$. Decidir si existe algún punto $(a, b) \in K^2$ con alguna coordenada no nula en el que se anula la forma cuadrática f .
66. (1) Sea p un primo tal que $q := 2p+1$ es primo y $p \equiv 3 \pmod{4}$. Demostrar que $2^p \equiv 1 \pmod{q}$.
 (2) ¿Es primo el número $2^{59} - 1$?

Extensiones transcendentales

67. Sean $F := K(t)$ y $L := K(t^2/(1+t^3))$, donde K es un cuerpo y t es una indeterminada. Demostrar que la extensión $F|L$ es algebraica y simple y calcular su grado $[F : L]$.
68. Sean $E|K$ una extensión de cuerpos y $u \in E \setminus K$.
 (1) Demostrar que existe una subextensión $L|K$ de $E|K$ maximal entre las que no contienen a u .
 (2) Demostrar que u es algebraico sobre L y que la extensión $E|L$ es algebraica.
69. Sea $\{u, v\}$ una base de trascendencia de la extensión de cuerpos $L|K$. Calcular el grado de trascendencia de la extensión $K(u^2, uv)|K$.
70. Sean $E|K$ una extensión de cuerpos y $x, y \in E$. Determinar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
 (1) Si x o y es transcendente sobre K entonces $x + y$ o xy es transcendente sobre K .
 (2) Si x es transcendente sobre K pero y es algebraico sobre K , entonces $x + y$ es transcendente sobre K .
 (3) Si x es transcendente sobre K mientras que y es algebraico sobre K , entonces xy es transcendente sobre el cuerpo K .
 (4) Si tanto x como y son elementos transcendentales sobre K entonces, x, y son algebraicamente independientes sobre K .
 (5) Si x es transcendente sobre K e y es transcendente sobre $K(x)$, entonces x, y son algebraicamente independientes sobre K .
71. Utilizar el Teorema de Lindemann-Weierstrass para demostrar que para cada número algebraico $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ los números $\sinh \alpha$, $\cosh \alpha$ y $\tanh \alpha$ son transcendentales.
72. Emplear el Teorema de Gelfond-Schneider para probar que $e^{-\pi/2}$ es un número transcendente. ¿Es transcendente e^π ?