Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Enero (180 minutos): Jueves 12 de Enero de 2023

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen.

Ejercicio. Sean $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ y $\xi := e^{2\pi\mathtt{i}/5}$ y consideramos $L_1 := \mathbb{Q}(\alpha)$, $L_2 := \mathbb{Q}(\xi)$ y $L := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$.

(1) Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois y demostrar que $[L : Q] = 16$.

(2) Demostrar que $G(L_i : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$ para $i = 1, 2$ y construir un isomorfismo entre $G(L : \mathbb{Q})$ y $G(L_1 : \mathbb{Q}) \times G(L_2 : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

(3) Encontrar una torre cíclica para $G(L : \mathbb{Q})$ y una torre de resolución para $L|\mathbb{Q}$.

(4) Demostrar que $G(L : \mathbb{Q})$ tiene exactamente un elemento de orden 1, tres elementos de orden 2, y doce elementos de orden 4.

(5) Demostrar que $G(L : \mathbb{Q})$ tiene tres subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, seis subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_4$ y tres subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(6) Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ tiene 3 subextensiones de grado 2 y calcular generadores de cada una de ellas.

(7) Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ tiene 7 subextensiones de grado 4 y calcular generadores de cada una de ellas.

(8) Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ tiene 3 subextensiones de grado 8 y calcular generadores de cada una de ellas.

(9) Demostrar que $G(L[\mathtt{i}] : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

(10) Calcular todos los $n \geq 1$ tales que $e^{2\pi\mathtt{i}/n} \in L[\mathtt{i}]$.