Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Enero (180 minutos): Lunes 15 de Enero de 2024

Ejercicio. Consideramos el polinomio $f := \mathtt{t}^4 - 6\mathtt{t}^2 - 3\mathtt{t} + 3 \in \mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y sea L el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Denotamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ las raíces de f.

(1) Demostrar que tanto f como su resolvente $g := \mathtt{t}^3 + 12\mathtt{t}^2 + 24\mathtt{t} + 9$ son polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(2) Demostrar que el grupo de Galois de f es $\mathcal{S}_4$. *Ayuda: puede ser útil saber que* $\Delta(f) = 9099 = 3^3 \cdot 367$.

(3) Demostrar que $\mathcal{S}_4$ tiene exactamente un elemento de orden 1, nueve elementos de orden 2, ocho elementos de orden 3 y seis elementos de orden 4.

(4) Demostrar que $\mathcal{S}_4$ tiene exactamente un subgrupo de orden 1, nueve subgrupos de orden 2, cuatro subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y tres subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_4$. Decidir cuáles de ellos son subgrupos normales.

(5) Demostrar que $\mathcal{S}_4$ tiene exactamente tres subgrupos isomorfos a $\mathcal{D}_4$. Decidir cuáles de ellos son subgrupos normales.

(6) Demostrar que $\mathcal{S}_4$ tiene exactamente cuatro subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_3$ y cuatro subgrupos isomorfos a $\mathcal{S}_3$. Decidir cuáles de ellos son subgrupos normales.

(7) Demostrar que todas las raíces de f son reales. *Ayuda: Puede ser útil utilizar el teorema de Bolzano.*

(8) Calcular todas las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ de grado potencia de 2, indicar un sistema finito de generadores para cada una de ellas y explicar cuáles son de Galois.

(9) Demostrar que $E := \mathbb{Q}(\alpha_i, \alpha_j)|\mathbb{Q}$ es una extensión de grado 12 para cualquier par de raíces α_i, α_j distintas de f y que las raíces de g son $\beta_1 := -(\alpha_1 + \alpha_2)^2$, $\beta_2 := -(\alpha_1 + \alpha_3)^2$ y $\beta_3 := -(\alpha_1 + \alpha_4)^2$. *Ayuda: Puede ser útil tener en cuenta que el coeficiente del monomio* $\mathtt{t}^3$ *de* f *es cero.*

(10) Calcular todas las subextensiones de $L|\mathbb{Q}$ de grados 3, 6 y 12, indicar un sistema finito de generadores para cada una de ellas y explicar cuáles son de Galois. *Ayuda: Puede ser útil demostrar que tanto* $\mathbb{Q}(\alpha_1 + \alpha_2)|\mathbb{Q}(\beta_1)$ *como* $\mathbb{Q}((\alpha_1 + \alpha_2)\delta)|\mathbb{Q}(\beta_1)$ *son extensiones de grado 2, donde* $\delta := \sqrt{\Delta(f)}$.