Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen Enero (180 minutos): Miércoles 18 de Junio de 2025

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del exámen.

Ejercicio. Consideramos el polinomio $f := \mathtt{t}^8 - 32$. Sea L el cuerpo de descomposición de f y denotemos $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$.

(1) Demostrar que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{32}, \mathtt{i})$ y que los elementos $(\sqrt[8]{32})^k$ no pertenecen a $\mathbb{Q}$ para $k = 1, \ldots, 7$.

(2) Calcular la factorización de f como producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}[\mathtt{t}]$ y calcular los términos independientes de dichos factores irreducibles.

(3) Demostrar que el polinomio f es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y calcular el grado de la extension $L|\mathbb{Q}$. [*Ayuda: Puede ser útil usar los dos apartados anteriores.*]

(4) Demostrar que el grupo de Galois $G(L : K)$ of L over K está generado por la restricción a L de la conjugación compleja y por el automorfismo φ de L que transforma $\sqrt[8]{32}$ en $\sqrt[8]{32}\exp(2\pi\mathtt{i}/8)$ y deja fija la unidad imaginaria. Decidir si $G(L : K)$ es o no abeliano y si $L|K$ es una extensión radical. En caso afirmativo proporcionar una torre de resolución de $L|K$. [*Ayuda: Para hacer los cáculos puede ser útil calcular $\varphi(\exp(2\pi\mathtt{i}/8))$ y para ello puede ser importante usar la representación de $\sqrt{2}$ en función de $\sqrt[8]{32}$.*]

(5) Demostrar que $G(L : K)$ contiene exactamente un elemento de orden 1, cinco elementos de orden 2, seis elementos de orden 4 y cuatro elementos de orden 8. [*Ayudas: Puede ser útil recordar, para no hacer demasiadas cuentas, que un elemento de un grupo y su inverso tienen el mismo orden o que si un elemento de un grupo tiene orden n y d es un divisor de n, entonces el elemento elevado a la d-ésima potencia tiene orden $\frac{n}{d}$.*]

(6) Demostrar que $G(L : K)$ tiene cinco subgrupos de orden 2. Demostrar que $G(L : K)$ tiene exactamente un subgrupo normal de orden 2.

(7) Demostrar que $G(L : K)$ tiene exactamente tres subgrupos cíclicos de orden 4, de los cuáles solo uno de ellos es normal, y dos subgrupos de orden 4 isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, de los cuales ninguno de ellos es normal.

(8) Demostrar que $G(L : K)$ tiene exactamente tres subgrupos de orden 8, uno isomorfo a D_4, otro isomorfo a Q_8 y otro isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. Determinar cuáles de ellos son normales.

(9) Demostrar que $L|K$ tiene exactamente tres subextensiones de grado 2 y cinco subextensiones de de grado 4. Calcular generadores para cada una de ellas y determinar cuáles de ellas son de Galois.

(10) Demostrar que $L|K$ tiene exactamente cinco subextensiones de grado 8. Calcular generadores para cada una de ellas y determinar cuáles de ellas son de Galois.