



Nombre:		Calificación
Apellidos:		
Posición:		
Titulación:		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Enero (180 minutos): Viernes 09 de Enero de 2026

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como la posición que ocupáis en el aula. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los móviles deberán estar apagados durante la realización del examen, pero deberán usarse al final del mismo para escanear el examen realizado.

Ejercicio. Consideramos el polinomio $f := t^6 - 3t^3 + 3$. Sea L el cuerpo de descomposición de f y denotemos $i := \sqrt{-1}$, $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{36})$, $\eta := \zeta^4 = \exp(\frac{2\pi i}{9})$ y $\omega := \zeta^{12} = \exp(\frac{2\pi i}{3})$.

(1) Demostrar que el polinomio f es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$ y que $\alpha := \sqrt[6]{3}\zeta$ es una de las raíces de f en $\mathbb{C}$.

(2) Calcular la factorización de f como producto de factores de grado 1 en $\mathbb{C}[t]$ y demostrar que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \eta)$.

(3) Calcular el grado de la extensión $L|\mathbb{Q}$. [Ayuda: Puede ser útil calcular las subextensiones de $\mathbb{Q}(\eta)|\mathbb{Q}$.]

(4) Demostrar que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega, 2\cos(\frac{2\pi}{9}))$ y que el grupo de Galois $G(L : K)$ of L over K es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathcal{S}_3$.

(5) Encontrar dos automorfismos de $G(L : K)$ que constituyan un sistema de generadores de $G(L : K)$. Decidir si $G(L : K)$ es o no abeliano y si $L|K$ es una extensión radical. En caso afirmativo proporcionar una torre de resolución de $L|K$.

(6) Demostrar que $G(L : K)$ contiene exactamente un elemento de orden 1, tres elementos de orden 2, ocho elementos de orden 3 y seis elementos de orden 6.

(7) Demostrar que $G(L : K)$ tiene exactamente diez subgrupos propios cíclicos de los cuales: tres tienen orden 2, cuatro tienen orden 3 y tres tienen orden 6. Determinar cuáles de los subgrupos anteriores son normales.

(8) Demostrar que $G(L : K)$ tiene exactamente dos subgrupos propios no cíclicos de los cuales: uno es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ y otro es isomorfo a $\mathcal{S}_3$. Determinar cuáles de los subgrupos anteriores son normales.

(9) Calcular cuántas subextensiones tiene $L|\mathbb{Q}$ de cada grado y determinar cuántas de ellas son de Galois.

(10) Calcular generadores para cada una de las subextensiones de $L|K$ y determinar cuáles de ellas son de Galois.