Ejercicios de refuerzo

1. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [3\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 : \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 : \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 : 2\mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ y concluir que f es una elación.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por un punto común P_0.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una transvección y calcular una referencia afín de $\mathbb{A}_2$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

2. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [-\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 : -\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_3 : -2\mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f está formado por un hiperplano H_1 de $\mathbb{P}^3$ y un punto fijo $P_0 \in \mathbb{P}^3 \setminus H_1$ y concluir que f es una homología.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por el punto P_0.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ es una homotecia y calcular su centro y su razón.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una dilatación y calcular una referencia afín de $\mathbb{A}_2$ tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

3. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3,\ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [2\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_3 : \mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_3 : -3\mathrm{x}_0 - 3\mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 : 2\mathrm{x}_0 - 2\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es la unión de dos rectas L_1 y L_2, que no son coplanarias. Probar que f es una homografía involutiva.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f y probar que todos ellos contienen a L_1 o a L_2.

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f.

(4) Elegid, para $i = 1, 2$, un hiperplano invariante H_i que contiene a L_i y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_i := \mathbb{P}^3 \setminus H_i$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_i} : \mathbb{A}_i \to \mathbb{A}_i$ es una simetría paralela a una dirección W_i con respecto a una recta S_i para $i = 1, 2$. Calcular W_i y S_i para $i = 1, 2$. ¿Que relación existe entre las rectas proyectivas L_1 y L_2 y la dirección W_i y la recta S_i para $i = 1, 2$?