

Ejercicios de refuerzo TEMA IV

1. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} : 1 - 4x_1 + 4x_3 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_∞ su cónica de infinito.

(i) Determinar si \mathcal{Q} es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es \mathcal{Q} una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q} es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q} .

(iii) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R}' del hiperplano de infinito \mathbb{A}_∞ respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q}_∞ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q}_∞ . Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q} .

2. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} : \frac{1}{2} - 2x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_∞ su cónica de infinito.

(i) Determinar si \mathcal{Q} es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es \mathcal{Q} una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q} es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q} .

(iii) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R}' del hiperplano de infinito \mathbb{A}_∞ respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q}_∞ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q}_∞ . Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q} .

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} : \frac{1}{2} - 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_∞ su cónica de infinito.

(i) Determinar si \mathcal{Q} es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es \mathcal{Q} una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q} es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q} .

(iii) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R}' del hiperplano de infinito \mathbb{A}_∞ respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q}_∞ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q}_∞ . Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q} .

4. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} : 1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de \mathcal{Q} y \mathcal{Q}_∞ su cónica de infinito.

(i) Determinar si \mathcal{Q} es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo. ¿Es \mathcal{Q} una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q} es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q} .

(iii) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\bar{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\bar{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R}' del hiperplano de infinito \mathbb{A}_∞ respecto de la que la ecuación de \mathcal{Q}_∞ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar \mathcal{Q}_∞ . Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q} .

5. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de \mathbb{P}^3 de ecuación:

$$\bar{\mathcal{Q}} : -3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\bar{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\bar{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano H_1 de \mathbb{P}^3 tal que $\bar{\mathcal{Q}} \cap H_1 = \emptyset$. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \bar{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q}_1 . ¿Tiene la cuádrica \mathcal{Q}_1 centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano H_2 de \mathbb{P}^3 tal que $\bar{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es un punto. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \bar{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q}_2 . ¿Tiene la cuádrica \mathcal{Q}_2 centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Calcular un hiperplano H_3 de \mathbb{P}^3 tal que $\bar{\mathcal{Q}} \cap H_3$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_3 := \mathbb{P}^3 \setminus H_3$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_3 := \bar{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_3$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q}_3 . ¿Tiene la cuádrica \mathcal{Q}_3 centro? En caso afirmativo calcularlo.

6. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de \mathbb{P}^3 de ecuación:

$$\bar{\mathcal{Q}} : 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 4x_0x_3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva \mathcal{R} de \mathbb{RP}^3 respecto de la que la ecuación de $\bar{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\bar{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano H_1 de \mathbb{P}^3 tal que $\bar{\mathcal{Q}} \cap H_1$ es un par de rectas. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \bar{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q}_1 . ¿Tiene la cuádrica \mathcal{Q}_1 centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano H_2 de \mathbb{P}^3 tal que $\bar{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \bar{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica \mathcal{Q}_2 . ¿Tiene la cuádrica \mathcal{Q}_2 centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Construir una aplicación biyectiva $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{\mathcal{Q}}$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2.