

Ejercicios de refuerzo

1. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [3x_0 - x_1 + x_3 : x_0 + x_1 + x_3 : x_0 - x_1 + 2x_2 + x_3 : 2x_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es un hiperplano H_1 de \mathbb{P}^3 y concluir que f es una elación.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por un punto común P_0 .

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f .

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1 . Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_2$ es una transvección y calcular una referencia afín de \mathbb{A}_2 tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

2. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [-x_0 - x_1 + x_3 : -x_0 - x_1 - x_3 : -2x_2 : x_0 - x_1 - x_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f está formado por un hiperplano H_1 de \mathbb{P}^3 y un punto fijo $P_0 \in \mathbb{P}^3 \setminus H_1$ y concluir que f es una homología.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f distintos de H_1 y demostrar que todos ellos pasan por el punto P_0 .

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f .

(4) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1$ es una homotecia y calcular su centro y su razón.

(5) Elegid un hiperplano H_2 invariante para f distinto de H_1 . Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_2$ es una dilatación y calcular una referencia afín de \mathbb{A}_2 tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}_2}$ tenga tantos coeficientes nulos como sea posible.

3. Consideramos la homografía

$$f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [2x_0 + x_1 + 2x_3 : x_0 + 2x_1 - 2x_3 : -3x_0 - 3x_1 - 3x_2 : 2x_0 - 2x_1 - x_3].$$

(1) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es la unión de dos rectas L_1 y L_2 , que no son coplanarias. Probar que f es una homografía involutiva.

(2) Calcular todos los hiperplanos invariantes para f y probar que todos ellos contienen a L_1 o a L_2 .

(3) Calcular todas las rectas invariantes para f .

(4) Elegid, para $i = 1, 2$, un hiperplano invariante H_i que contiene a L_i y consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_i := \mathbb{P}^3 \setminus H_i$. Demostrar que $f|_{\mathbb{A}_i} : \mathbb{A}_i \rightarrow \mathbb{A}_i$ es una simetría paralela a una dirección W_i con respecto a una recta S_i para $i = 1, 2$. Calcular W_i y S_i para $i = 1, 2$. ¿Que relación existe entre las rectas proyectivas L_1 y L_2 y la dirección W_i y la recta S_i para $i = 1, 2$?

4. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 - 2x_1 : -x_1 : 2x_0 - 2x_1 - x_2 : 2x_0 - 2x_1 - x_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f .

(ii) Calcular las rectas invariantes para f .

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 : x_0 - x_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : x_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

5. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [4x_0 - x_1 + x_3 : 2x_0 + x_1 + 2x_3 : 6x_0 - 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 : x_0 - x_1 + 4x_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los planos invariantes para f . Calcular el punto proyectivo $P_0 \in \mathbb{P}^3$ por el que pasan todos los hiperplanos invariantes para f .

(ii) Calcular las rectas invariantes para f .

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 : x_0 - x_1 + x_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una traslación y calcular el vector v de dicha traslación.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : x_0 - x_3 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una transvección y encontrar una referencia cartesiana \mathcal{R} de \mathbb{A} tal que la matriz de $f|_{\mathbb{A}}$ tenga tantos ceros como sea posible.

6. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [-3x_0 + 2x_2 : x_0 - x_1 - x_2 : -4x_0 + 3x_2 : -x_0 + x_2 - x_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f .

(ii) Calcular las rectas invariantes para f .

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 : x_0 - x_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : x_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

7. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la proyección cónica de centro la recta $L_1 := \{x_0 - x_1 = 0, x_0 + x_1 = 0\}$ y base $L_2 := \{x_0 + x_1 + x_2 = 0, x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

(i) Calcular la matriz de π con respecto a la referencia proyectiva estándar.

(ii) Consideramos el hiperplano $H : x_0 + 2x_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$. Demostrar que $\pi(H) \subset H$ y que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(iii) Sea $\sigma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \bar{\sigma} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ . Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f .

(iv) Demostrar que para cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ existe una recta invariante para f que pasa por P .

8. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la aplicación proyectiva

$$\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [3x_0 - x_2 + x_3 : x_0 + 2x_1 - x_2 + x_3 : x_0 + x_2 + x_3 : -2x_0 + 2x_2]$$

(i) Demostrar que π es una proyección cónica y calcular su centro Z y su base X .

(ii) Demostrar que si H es un hiperplano que contiene a Z entonces $\pi(Z) \subset H$.

(iii) Elegid un hiperplano H_1 que contiene a Z y consideramos el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(iv) Sea $\sigma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \bar{\sigma} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ . Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f .

(v) Demostrar que para cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ existe una recta invariante para f que pasa por P .

9. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la aplicación proyectiva

$$\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [6x_0 - 4x_2 : 2x_0 + 4x_1 + 4x_3 : 3x_0 - x_2 : -3x_0 + 2x_2]$$

(i) Demostrar que π es una proyección cónica y calcular su centro Z y su base X .

(iii) Sea L la recta de ecuaciones $x_0 + x_2 = 0, x_0 - x_1 = 0$. Calcular $\pi(L)$.

(ii) Demostrar que $H := f^{-1}([0 : 1 : 0 : 0])$ es un hiperplano de \mathbb{P}^3 y que $f(H) \subset H$.

(iv) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$. Demostrar que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(v) Sea $\sigma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ la simetría asociada a ρ y sea $f := \bar{\sigma} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de σ . Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f .