**Ejercicios de refuerzo TEMA IV**

**1.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 - 4x_1 + 4x_3 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**2.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ \frac{1}{2} - 2x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**3.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ \frac{1}{2} - 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**4.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Determinar si $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica con o sin centro y en caso de tener centro calcularlo ¿Es $\mathbb{Q}$ una superficie cuádrica no degenerada? Justifica tu respuesta.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**5.** Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ -3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano $H_1$ de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_1 = \varnothing$. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_1$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_1$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano $H_2$ de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es un punto. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_2$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_2$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Calcular un hiperplano $H_3$ de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_3$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_3 := \mathbb{P}^3 \setminus H_3$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_3 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_3$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_3$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_3$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

**6.** Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}: \ 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 4x_0x_3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(ii) Calcular un hiperplano $H_1$ de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_1$ es un par de rectas. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_1 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_1$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_1$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_1$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iii) Calcular un hiperplano $H_2$ de $\mathbb{P}^3$ tal que $\overline{\mathcal{Q}} \cap H_2$ es una cónica no degenerada. Consideramos el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Clasificar la superficie cuádrica afín $\mathcal{Q}_2 := \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}_2$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}_2$. ¿Tiene la cuádrica $\mathcal{Q}_2$ centro? En caso afirmativo calcularlo.

(iv) Construir una aplicación biyectiva $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{Q}}$ cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado 2.

**7.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2x_1 + 2x_2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $(-1, 1, 0)$.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**8.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ 1 + 2x_1 + 2x_2 + 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y calcular dicho centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

**9.** Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q}: \ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para esta cuádrica.