Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen de Enero (180 minutos): 11 de Enero de 2018

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación (si no me lo habéis dado antes). Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Sean $Z := [0 : 1 : 1] \in \mathbb{P}^2$ y L la recta de $\mathbb{P}^2$ de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Sea $\pi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ la proyección de centro Z sobre la recta L.

(i) Calcular la matriz de la proyección π con respecto a la referencia estándar de $\mathbb{P}^2$.

(ii) Calcular una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ con respecto a la que la matriz de π sea diagonal.

(iii) Calcular la imagen inversa y la imagen directa por π de la recta de ecuación $x_0 + x_1 - x_2 = 0$.

(iv) Consideramos el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$ y la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Demostrar que ρ es una proyección afín y calcular una referencia afín de $\mathbb{A}$ respecto de la que la matriz de π blue sea diagonal.

2. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [2x_1 : x_0 + x_1 : 2x_0 - 2x_1 + 2x_2 : -x_0 + x_1 + 2x_3].$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos y los planos invariantes para f. ¿Qué tipo de homografía es f?

(ii) Demostrar que por cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ pasa una recta invariante de f. ¿Existe algún punto por el que pase más de una? En caso afirmativo, ¿Cuántas rectas invariantes pueden pasar por un punto? ¿Qué tipos de homografías obtenemos al restringir f a cada una de las rectas invariantes de f?

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 :\ x_0 - x_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A}_1 := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}_1} : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 :\ x_0 + x_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una dilatación. Encontrar una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f sea diagonal.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} :\ 2 + 2x_1 + 2x_2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

Sean $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $(-1, 0, 1)$.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente?

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente?

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.