GEOMETRÍA LINEAL, CURSO 2018-2019

José F. Fernando y José Manuel Gamboa

Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo I

Número I.1 Sean $\mathcal{E}_3 := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^3$ y los vectores

$$u_1 := -e_1 + e_3, \quad u_2 := e_1 \quad \text{y} \quad u_3 := e_2 + e_3.$$

Sean $O = (0,0,0)$ y $O_1 \in \mathbb{R}^3$ el punto cuyas coordenadas respecto de la referencia afín $\mathcal{R}_c := \{O; \mathcal{E}_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ son $O_1 := (-1, 1, -1)$.

(i) Demostrar que $\mathcal{B} := \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{K}^3$.

(ii) Calcular las coordenadas respecto de la referencia afín $\mathcal{R} := \{O_1; \mathcal{B}\}$ de $\mathbb{K}^3$ del punto P cuyas coordenadas respecto de la referencia $\mathcal{R}_c$ son $P := (6, 1, 3)$.

Número I.2 (i) Demostrar que dos puntos distintos P y Q en una recta afín $\mathbb{A}$ constituyen una referencia afín de $\mathbb{A}$.

(ii) Se llama *punto medio* del segmento que une P con Q al punto $M \in \mathbb{A}$ que cumple $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$. Calcular las coordenadas baricéntricas de M respecto de la referencia afín $\mathcal{R}_a := \{P, Q\}$ de $\mathbb{A}$.

Número I.3 Sean $\mathcal{R}_a := \{P_0, P_1, P_2\}$ una referencia afín de un plano afín $\mathbb{A}$ y consideremos los puntos $A, B, C \in \mathbb{A}$ que son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos que unen P_0 con P_1, P_1 con P_2 y P_0 con P_2. Calcular las coordenadas baricéntricas de A, B y C respecto de $\mathcal{R}_a$.

Número I.4 Sean $\mathcal{E}_2 := \{e_1, e_2\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^2$, $r \in \mathbb{K}$ un escalar y los vectores

$$u_1 := e_1 + e_2, \quad u_2 := e_1 - e_2, \quad v_1 := (r+1)e_1 + (r-1)e_2 \quad \text{y} \quad v_2 := -e_1 - e_2.$$

Consideremos las bases $\mathcal{B}_1 := \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\}$ del espacio vectorial $\mathbb{K}^2$ y dos puntos O_1 y O_2 que cumplen $\overrightarrow{O_1O_2} = 2e_1$. ¿Para qué valores de r existe un punto $P \in \mathbb{K}^2$ cuyas coordenadas cartesianas respecto de las referencias cartesianas $\mathcal{R}_c := \{O_1; \mathcal{B}_1\}$ y $\mathcal{R}'_c := \{O_2; \mathcal{B}_2\}$ coinciden y son no nulas? Calcular en tal caso las coordenadas de todos los puntos P que cumplen la condición anterior.

Número I.5 (i) Demostrar que dos puntos distintos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ son independientes.

(ii) Demostrar que tres puntos distintos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ constituyen una referencia proyectiva.

Número I.6 Sean $\mathcal{E}_3 := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^3$ y los vectores $u_0 := e_1$, $u_1 := e_2$, $u_2 := e_3$ y $u_3 := -e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Se consideran los puntos $P_i := [u_i] \in \mathbb{P}^2$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Demostrar que $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ y encontrar una base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^3$ asociada a $\mathscr{R}$.

Número I.7 (i) Demostrar que $P_0 := [1 : 0 : 1]$, $P_1 := [0 : 2 : 1]$, $P_2 := [0 : 0 : 1]$ y $P_3 := [1 : -1 : 0]$ constituyen una referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ de $\mathbb{P}^2$ que tiene a P_3 por punto unidad.

(ii) Determinar las coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ del punto $P := [2 : -2 : 1]$.

Número I.8 Consideramos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ los puntos

$$P_0 := [1:1:1:1], \quad P_1 := [2:4:0:1], \quad P_2 := [-1:2:-1:-1],$$
$$P_3 : = [1:0:2:1] \quad \text{y} \quad P_4 := [1:0:0:0].$$

(i) Demostrar que $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2, P_3; P_4\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^3$.

(ii) Hallar las coordenadas homogéneas respecto de $\mathscr{R}$ del punto $P := [1:2:2:1]$.

Número I.9 (i) Sea $\mathscr{R}_1 := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$.

(i) Probar que $\mathscr{R}_2 := \{P_2, P_3, P_1; P_0\}$ es también una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$.

(ii) Determinar (módulo proporcionalidad) las coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ del punto $P \in \mathbb{P}^2$ cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}_1$ son (x_0, x_1, x_2).

(iii) ¿Cuáles son las coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ del punto $P := [3:2:1]_{\mathscr{R}_1}$?

(iv) ¿Existe algún punto cuyas coordenadas respecto de ambas referencias coincidan? En caso afirmativo, calcular todos.

Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo II

Número II.1 Sean $X_1, \dots, X_r$ subvariedades afines de $\mathbb{A}$. Determinar si la siguiente igualdad es cierta:

$$\sum_{i=1}^{r} X_i = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i : \ P_i \in X_i, \ \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \Big\}. \qquad (1)$$

Número II.2 (i) Consideremos la subvariedad afín X_1 de $\mathbb{K}^5$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de cierta referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$ de $\mathbb{K}^5$ son

$$X_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{x}_0 & = & 1 + \lambda_0 + \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \mathtt{x}_1 & = & 6 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \mathtt{x}_2 & = & - \lambda_0 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \mathtt{x}_3 & = & 1 + \lambda_0 + 2\lambda_2 \\ \mathtt{x}_4 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

Calcular su dimensión, una base de su subespacio de dirección y unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{R}_c$.

(ii) Encontrar ecuaciones paramétricas de la subvariedad afín X_2 de $\mathbb{K}^4$ definida por las ecuaciones implícitas

$$X_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 1 \\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 2 \\ \mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_3 = 0 \end{array} \right.$$

respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_c = \{0; e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Hallar una base del subespacio de dirección de X_2 y calcular la dimensión de X_2.

Número II.3 (i) Obtener unas ecuaciones paramétricas de la intersección de los planos X_1 y X_2 de $\mathbb{K}^3$ cuyas ecuaciones implícitas respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_c = \{0; e_1, e_2, e_3\}$ son:

$$X_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{x}_0 & = & 1 - \lambda_0 - \lambda_1 \\ \mathtt{x}_1 & = & 2 - \lambda_0 + 2\lambda_1 \\ \mathtt{x}_2 & = & - \lambda_0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad X_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{x}_0 & = & 1 + 2\lambda_0 - \lambda_1 \\ \mathtt{x}_1 & = & 1 + \lambda_1 \\ \mathtt{x}_2 & = & 1 - \lambda_0 \end{array} \right.$$

¿Cuál es el subespacio de dirección de dicha intersección? ¿Cuál es su dimensión?

(ii) Sea el plano $X_3 : \{\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 1\}$. Calcular $X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Hallar una ecuación implícita del plano paralelo a $X_1 \cap X_2$ y $X_1 \cap X_3$ que pasa por el punto $(1, 1, -1)$

Número II.4 Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos de un plano afín $\mathbb{A}$ tales que no existen tres de ellos alineados. Se llama *cuadrilátero* de vértices estos cuatro puntos a la unión de los segmentos P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 y P_4P_1. Se dice que el cuadrilátero es un *paralelogramo* si, tras reordenar los vértices si es preciso, las rectas $V(P_1, P_2)$ y $V(P_3, P_4)$ son paralelas y las rectas $V(P_2, P_3)$ y $V(P_4, P_1)$ son paralelas también. Demostrar que el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de otro cuadrilátero es un paralelogramo.

Número II.5 Sean X e Y dos rectas afines coplanarias que se cortan, y sean dos ternas de puntos $A_1, A_2, A_3 \in X$ y $B_1, B_2, B_3 \in Y$. Probar que si se cumple $V(A_1, B_2) || V(A_2, B_3)$ y $V(A_2, B_1) || V(A_3, B_2)$, entonces $V(A_1, B_1) || V(A_3, B_3)$.

Número II.6 Sea $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x^3 - 3x^2 + x - 2\}$. Probar que las rectas que cortan a Γ en tres puntos, tales que uno de ellos es el punto medio del segmento que tiene por extremos a los otros dos, pasan por un punto fijo. Hallar las coordenadas de dicho punto.

Número II.7 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano afín $\mathbb{R}^2$ que cumplen que los segmentos AB y CD que unen A con B y C con D, respectivamente, son bases de un trapecio.

(i) Demostrar que la recta que une el punto E en que se cortan $V(A, D)$ y $V(B, C)$ con el punto F de intersección de las diagonales del trapecio pasa por los puntos medios de las bases.

(ii) Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los pares de lados opuestos del trapecio se cortan en el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Número II.8 Sea $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$. Hallar ecuaciones implícitas respecto de $\mathscr{R}$ de los lados y las diagonales del cuadrilátero de vértices consecutivos P_0, P_1, P_2 y P_3.

Número II.9 Sean $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ y $A \in \mathbb{P}^2$ el punto cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ son $A := [0 : 1 : 1]$. Se traza por A una recta variable X que corta en M a la recta $\mathtt{V}(\{P_0, P_2\})$ y en N a la recta $\mathtt{V}(\{P_0, P_1\})$. Se define $P := \mathtt{V}(\{P_2, N\}) \cap \mathtt{V}(\{P_0, A\})$. Demostrar que todas las rectas $\mathtt{V}(\{M, P\})$ pasan por un punto fijo y calcularlo.

Número II.10 Dadas las rectas ℓ_1 y ℓ_2 del espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones implícitas

$$\ell_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \mathtt{x}_0 & - & \mathtt{x}_1 & + & \mathtt{x}_2 & - & \mathtt{x}_3 & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & + & 2\mathtt{x}_1 & - & 2\mathtt{x}_2 & + & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\ell_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \mathtt{x}_0 & + & 2\mathtt{x}_1 & - & 3\mathtt{x}_2 & + & \mathtt{x}_3 & = & 0 \\ 2\mathtt{x}_0 & & & & & - & \mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

encontrar ecuaciones implícitas de la recta $\ell \subset \mathbb{P}^3$ que corta a ambas y pasa por el punto $P := [0 : 1 : 0 : 1]$.

Número II.11 Sean $a \in \mathbb{K}$ y los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$:

$$P_1 := [1 : 2 : -1 : 1], \quad P_2 := [1 : -1 : 2 : -1], \quad P_3 := [3 : 0 : 1 : 1]$$

y $Q_a := [-1 : 1 : 0 : a]$.

(i) Hallar todos valores de a para los que las rectas proyectivas $X := \mathtt{V}(\{P_1, P_2\})$ e $Y_a := \mathtt{V}(\{P_3, Q_a\})$ se cortan.

(ii) Hallar ecuaciones implícitas de $X + Y_a$ para cada valor de a.

Número II.12 ¿Es el conjunto $M := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^2$?

Número II.13 En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^4$ se consideran los puntos

$$P_1 := [1 : 0 : -1 : 0 : 1], \quad P_2 := [0 : 1 : 0 : 1 : -1] \quad \text{y} \quad P_3 := [2 : 2 : -2 : 1 : 2],$$

y denotamos $X_1 := \mathtt{V}(\{P_1, P_2, P_3\})$ a la menor subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^4$ que los contiene. Sea X_2 la subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^4$ que tiene a

$$X_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} \mathtt{x}_0 & - & \mathtt{x}_1 & & & & & + & \mathtt{x}_4 & = & 0 \\ 2\mathtt{x}_0 & & & + & \mathtt{x}_2 & - & \mathtt{x}_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

por ecuaciones implícitas respecto de la referencia estándar.

(i) Encontrar ecuaciones implícitas de X_1 respecto de la referencia estándar y calcular $\dim(X_1)$.

(ii) Calcular la dimensión de $X_1 + X_2$ y $X_1 \cap X_2$.

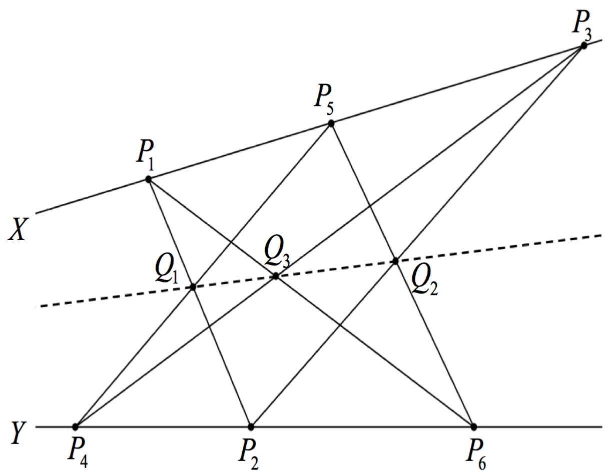
Número II.14 (i) Sean X_1 y X_2 dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}^3$ y sea $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (X_1 \cup X_2)$. Demostrar que existe una única recta $Y \subset \mathbb{P}^3$ que contiene a P y corta a X_1 y a X_2.

(iii) Obtener ecuaciones implícitas de Y en el caso en que $P := [0:1:0:1]$,

$$X_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \mathtt{x}_0 & & & - & \mathtt{x}_2 & + & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \\ 2\mathtt{x}_0 & + & \mathtt{x}_1 & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$X_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \mathtt{x}_0 & & & & & + & \mathtt{x}_3 & = & 0 \\ & & 2\mathtt{x}_1 & - & 3\mathtt{x}_2 & + & \mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Número II.15 (Teorema de Pappus) Sean X e Y dos rectas del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y $O := X \cap Y$. Sean P_1, P_3 y P_5 tres puntos distintos en X y P_2, P_4 y P_6 tres puntos distintos en Y, todos ellos distintos de O. Para $i = 1, \ldots, 5$ sea $Z_i := \mathtt{V}(\{P_i, P_{i+1}\})$ la recta que pasa por P_i y P_{i+1}, y sea $Z_6 := \mathtt{V}(\{P_6, P_1\})$. Demostrar que los puntos $Q_1 := Z_1 \cap Z_4$, $Q_2 := Z_2 \cap Z_5$ y $Q_3 := Z_3 \cap Z_6$ están alineados.



Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo III

Número III.1 (i) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines y sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ referencias cartesianas de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$. Sean $f_1, \dots, f_k : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ aplicaciones afines y sean $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$. Demostrar que

$$M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}\Big(\sum_{i=1}^k \mu_i f_i\Big) = \sum_{i=1}^k \mu_i M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(f_i).$$

(ii) ¿Sigue siendo cierto el resultado si cambiamos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ por referencias afines $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de los espacios afines $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$?

Número III.2 (i) Demostrar que la composición de dos homotecias de un espacio afín $\mathbb{A}$ del mismo centro C y razones r_1 y r_2 es la homotecia de centro C y razón $r_1 r_2$.

(ii) Demostrar que la composición de dos homotecias de centros distintos C_1 y C_2 y razones r_1 y r_2 cuyo producto $r_1 r_2 = 1$ es una traslación. Calcular el vector de traslación.

(iii) Demostrar que la composición de dos homotecias de centros distintos C_1 y C_2 y razones r_1 y r_2 cuyo producto $r_1 r_2 \neq 1$ es una homotecia cuyo centro está alineado con los puntos C_1 y C_2.

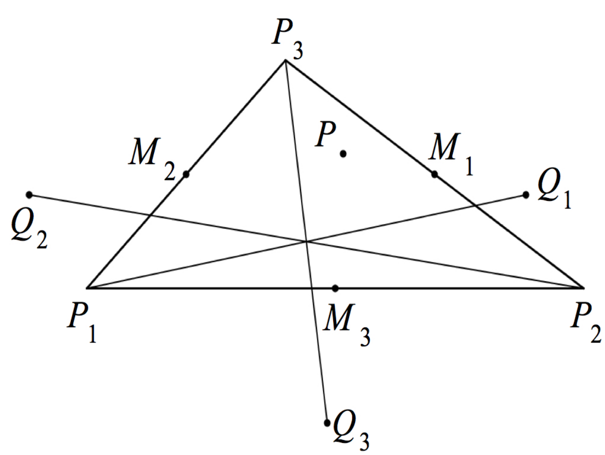
Número III.3 Sean P_1, P_2 y P_3 tres puntos no alineados en un plano afín $\mathbb{A}$, y sean M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de los lados P_2P_3, P_1P_3 y P_1P_2 del triángulo Δ de vértices P_1, P_2 y P_3. Para cada $P \in \mathbb{A}$ se consideran sus simétricos Q_1, Q_2 y Q_3 respecto de M_1, M_2 y M_3.

(i) Demostrar que las rectas $V(P_1, Q_1)$, $V(P_2, Q_2)$ y $V(P_3, Q_3)$ son concurrentes.

(ii) Demostrar que la aplicación

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A},\ P \mapsto f(P) = V(P_1, Q_1) \cap V(P_2, Q_2) \cap V(P_3, Q_3)$$

es afín e identificarla.



Número III.4 Determinar los puntos fijos y las rectas y planos invariantes de la aplicación afín

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3 : (\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}) \mapsto (1 - 5\mathtt{x} + 2\mathtt{y} - 7\mathtt{z}, -1 + 2\mathtt{x} - \mathtt{y} + 3\mathtt{z}, 4\mathtt{x} + 5\mathtt{z}).$$

Número III.5 En $\mathbb{K}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones implícitas respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R} := \{O; e_1, e_2, e_3\}$

$$L := \begin{cases} \mathtt{x} - \mathtt{y} + \mathtt{z} = 2 \\ \mathtt{x} + \mathtt{y} - \mathtt{z} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad X := \begin{cases} \mathtt{x} + \mathtt{y} = 1 \\ \mathtt{y} + \mathtt{z} = 1 \end{cases}$$

Sean $u_1 := e_2 - e_3$, $u_2 := e_1 - e_2 + 2e_3$ y $W := L[u_1, u_2]$ el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$ generado por u_1 y u_2. Sean $\pi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ la proyección sobre X paralela a W y $\sigma : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ la simetría de $\mathbb{K}^3$ respecto a X paralela a W. Calcular ecuaciones implícitas de $\pi(L)$ y $\sigma(L)$.

Número III.6 Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín sin puntos fijos. ¿Tiene $f^2 := f \circ f$ algún punto fijo?

Número III.7 Sean $a \in \mathbb{K}$ y $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación afín que deja fijos todos los puntos de las rectas cuyas ecuaciones implícitas respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R} := \{O; e_1, e_2, e_3\}$ son

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\mathtt{x} & + & a\mathtt{y} & & & = & 0 \\ \mathtt{x} & - & 2\mathtt{y} & + & \mathtt{z} & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \mathtt{x} & - & a\mathtt{y} & + & 2\mathtt{z} & = & 1 \\ \mathtt{x} & & & + & \mathtt{z} & = & 1 \end{array} \right.$$

y transforma el punto de coordenadas $(0, 0, 2)$ respecto de $\mathcal{R}$ en el punto de coordenadas $(0, 1, 3)$ respecto de $\mathcal{R}$. Calcular a y la matriz de f respecto de $\mathcal{R}$.

Número III.8 Sean $n \geq 2$ un número entero y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación inyectiva que transforma rectas en rectas y conserva el paralelismo. Denotemos $0 \in \mathbb{R}^n$ el vector nulo. Demostrar que:

(i) Para cada par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ se cumplen las igualdades:

$$f(u + v) + f(0) = f(u) + f(v) \quad \text{y} \quad f(u - v) - f(0) = f(u) - f(v).$$

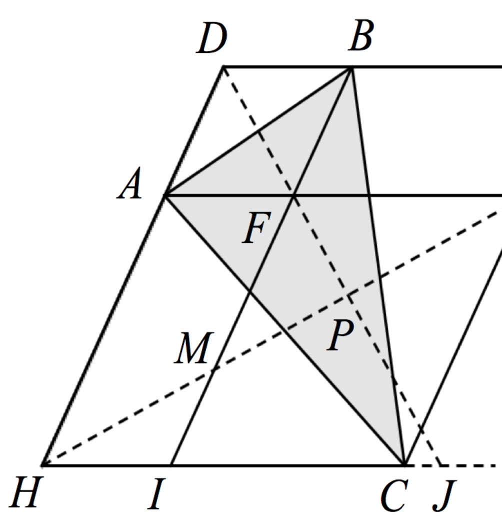
(ii) Para cada vector $u \in \mathbb{R}^n$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$f(\lambda u) - f(0) = \lambda(f(u) - f(0)).$$

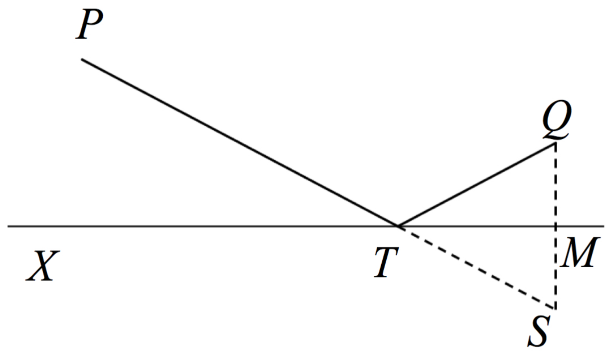
(iii) Probar que f es una aplicación afín biyectiva.

Número III.9 ¿Cuál es la aplicación afín que transforma cada recta en otra paralela y deja fijos al menos dos puntos?

Número III.10 Sea Δ un triángulo de vértices A, B y C contenido en el plano afín $\mathbb{K}^2$. Sean L_1 y L_2 dos rectas de $\mathbb{K}^2$ no paralelas. Para cada lado de Δ se considera el paralelogramo cuyos lados son paralelos a L_1 y L_2, respectivamente y una de cuyas diagonales es el lado elegido en Δ. Demostrar que las diagonales de estos tres paralelogramos que no contienen a los lados de Δ son rectas concurrentes.



Número III.11 Un rayo de luz parte del punto $P := (1,0,1)$. ¿En qué punto del plano $X \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $\mathtt{x} + 2\mathtt{y} + 3\mathtt{z} = 1$ se reflejará para que pase por el punto $Q := (2,1,1)$?



Número III.12 (i) Estudiar si la aplicación proyectiva $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ definida por

$$\lambda \mathtt{y}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathtt{x}^t, \tag{2}$$

donde $\mathtt{x} := [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3]$ e $\mathtt{y} := [\mathtt{y}_0 : \mathtt{y}_1 : \mathtt{y}_2 : \mathtt{y}_3]$, es una proyección cónica. En caso afirmativo calcular su centro y su imagen.

(ii) Hallar ecuaciones implícitas de $\pi^{-1}(P)$, donde $P := [1 : -1 : 0 : -1]$.

(iii) Hallar ecuaciones implícitas de la imagen por π de la recta

$$L := \{\mathtt{x}_1 = 0,\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 0\}.$$

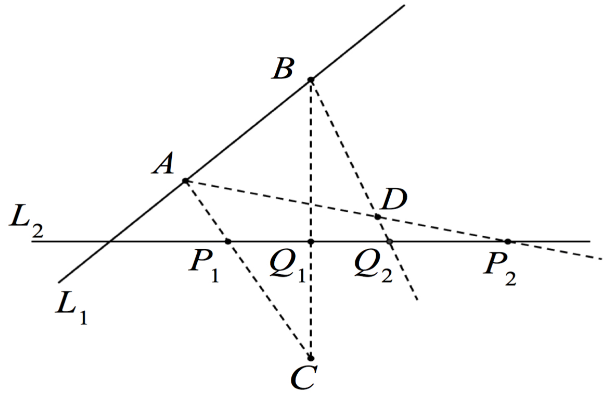
(iv) Hallar ecuaciones implícitas de la imagen inversa por π de $\pi(L)$. ¿Cuál es la dimensión de $\pi^{-1}(\pi(L))$?

Número III.13 Encontrar la matriz respecto de la referencia estándar $\mathscr{R}$ de $\mathbb{P}^2$ de la homografía $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ que transforma las rectas $L_1 := \{\mathtt{x}_0 = 0\}$, $L_2 := \{\mathtt{x}_1 = 0\}$ y $L_3 := \{\mathtt{x}_2 = 0\}$, en las rectas $f(L_1) := \{\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0\}$, $f(L_2) := \{\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_2 = 0\}$ y $f(L_3) := \{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0\}$ y deja fijo el punto $P := [1 : 1 : 1]$.

Número III.14 Sean A_1, A_2, B_1 y B_2 cuatro puntos distintos en $\mathbb{P}^2$ que no están sobre una recta. Demostrar que A_1, A_2, B_1 y B_2 están en posición general si y sólo si existe una homografía involutiva $\sigma : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $\sigma(A_1) = B_1$ y $\sigma(A_2) = B_2$.

Número III.15 Sean P_1, P_2 y P_3 tres puntos distintos en $\mathbb{P}^1$. Caracterizar las matrices respecto de cualquier referencia proyectiva de las homografías $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ que cumplen $f(P_1) = P_2$, $f(P_2) = P_3$ y $f(P_3) = P_1$.

Número III.16 Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas en $\mathbb{P}^2$ y $A, B \in L_1 \setminus L_2$ dos puntos distintos. Sean $C, D \in \mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ dos puntos distintos. Demostrar que existe una única homografía $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = D$ y $f(L_2) = L_2$.



Número III.17 Sean L_1 y L_2 dos rectas de $\mathbb{P}^2$ y $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$. Se considera la proyección cónica $\pi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ de centro P e imagen L_2. La aplicación proyectiva $\pi|_{L_1} : L_1 \dashrightarrow L_2$ recibe el nombre de *perspectividad.*

(i) Comprobar que $\pi|_{L_1} : L_1 \to L_2$ es una homografía.

(ii) Demostrar que el punto de corte $O := L_1 \cap L_2$ cumple $\pi(O) = O$.

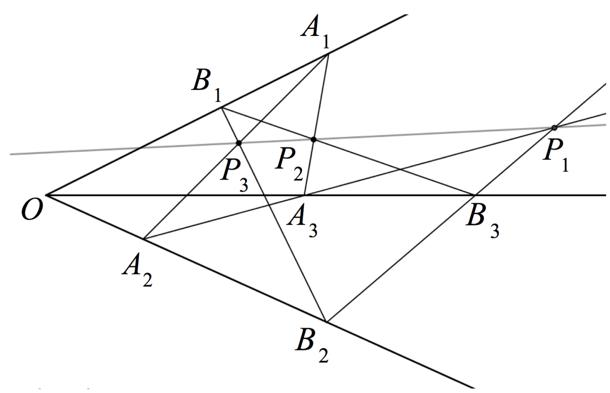
(iii) Sea $f : L_1 \to L_2$ una homografía con $f(O) = O$. Demostrar que f es una perspectividad, es decir, es la restricción a L_1 de una proyección cónica de $\mathbb{P}^2$ de imagen L_2.

(iv) ¿Cómo se puede calcular el centro de π empleando sólo la perspectividad f?

Número III.18 (Teorema de Desargues) Sean A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 seis puntos distintos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados. Se dice que los triángulos Δ_1 y Δ_2 de vértices A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 *están en perspectiva* si las rectas $\mathtt{V}(A_1, B_1)$, $\mathtt{V}(A_2, B_2)$ y $\mathtt{V}(A_3, B_3)$ son concurrentes en cierto punto O distinto de los seis anteriores. Demostrar que en tal caso los puntos

$$P_1 := \mathtt{V}(A_2, A_3) \cap \mathtt{V}(B_2, B_3), \quad P_2 := \mathtt{V}(A_1, A_3) \cap \mathtt{V}(B_1, B_3) \quad \text{y}$$
$$P_3 := \mathtt{V}(A_1, A_2) \cap \mathtt{V}(B_1, B_2)$$

están alineados.



Número III.19 Sea $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación afín que satisface las condiciones

$$f(1,0) = (2,2,0), \quad f(-1,1) = (0,-1,1) \quad \text{y} \quad f(1,2) = (-2,0,-2).$$

(i) Calcular $f(0,0)$ y la matriz de la aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ respecto de las bases estándar $\mathcal{B}_1 := \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B}_2 := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{K}^3$, respectivamente. Calcular la matriz de f respecto de las referencias cartesianas estándar $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ de $\mathbb{K}^2$ y $\mathbb{K}^3$, respectivamente.

(ii) Calcular la matriz respecto de las referencias estándar de la extensión proyectiva $\overline{f} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ de f. Calcular $\overline{f}([1:1:1])$.

(iii) Determinar el centro de $\overline{f}$ y una ecuación implícita de su imagen.

Número III.20 Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una homografía que transforma la recta $\ell_1 := \mathtt{V}(P_1, P_2)$ en la recta $\ell_2 := \mathtt{V}(Q_1, Q_2)$, donde

$$P_1 := [0:3:1], \quad P_2 := [4:5:1], \quad Q_1 := [4:1:1] \quad \text{y} \quad Q_2 := [10:0:1].$$

Se sabe, además, que para cada $t \in \mathbb{K}$ se cumple

$$f(tP_1 + P_2) = sQ_1 + Q_2, \quad \text{donde} \quad ts = -2(t+3).$$

Calcular $P := f(O)$ y $Q := f^{-1}(O)$, donde $O := \ell_1 \cap \ell_2$. Encontrar una ecuación implícita de la recta $\mathtt{V}(P, Q)$, que se denomina *eje de la homografía f*.

Número III.21 Se consideran la recta $L := \{\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ y el plano afín $X := \mathbb{P}^2 \setminus L$. Sea $\eta : X \to X$ la homotecia de centro $P_0 := [1:0:1] \in X$ que transforma el punto $P_1 := [1:-1:1]$ en $P := [2:-1:2]$.

(i) Calcular la razón de esta homotecia.

(ii) Hallar la matriz de su extensión proyectiva respecto de la referencia estándar $\mathscr{R}$ del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.

Número III.22 Sea $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la homografía cuya matriz respecto de la referencia estándar $\mathscr{R}$ es la clase de equivalencia de la matriz

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que el conjunto de puntos fijos de f es la unión de una recta, que denotamos L, y un punto situado en $\mathbb{P}^2 \setminus L$.

(ii) Demostrar que la restricción de f al plano afín $X := \mathbb{P}^2 \setminus L$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo IV

Número IV.1 Demostrar que la definición de cuádricas equivalentes define realmente una relación de equivalencia. Atención: Cuidado con el orden de las bases!

Número IV.2 Calcular el conjunto de centros de la cónica afín $\mathcal{Q}$ cuya ecuación respecto de la referencia cartesiana estándar es

$$5\mathtt{x}^2 + 10\mathtt{xy} + 2\mathtt{y}^2 - 10\mathtt{x} - 4\mathtt{y} = 0.$$

Número IV.3 Demostrar con detalle que si dos ecuaciones

$$\varepsilon_1 + \mathtt{z}_1^2 + \cdots + \mathtt{z}_r^2 = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 + \mathtt{z}_1^2 + \cdots + \mathtt{z}_{r'}^2 = 0$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$ o 1, definen cuádricas afines de $\mathbb{K}^n$ afínmente equivalentes, entonces $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $r = r'$.

Número IV.4 Demostrar con detalle que si dos ecuaciones

$$\varepsilon_1 + \mathtt{z}_1^2 + \cdots + \mathtt{z}_s^2 - \mathtt{z}_{s+1}^2 - \cdots - \mathtt{z}_r^2 = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 + \mathtt{z}_1^2 + \cdots + \mathtt{z}_{s'}^2 - \mathtt{z}_{s'+1}^2 - \cdots - \mathtt{z}_{r'}^2 = 0$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$ o 1, definen cuádricas afines de $\mathbb{K}^n$ afínmente equivalentes, entonces $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $r = r'$ y, o bien $\varepsilon_1 = 1$ y entonces $s = s'$, o bien $\varepsilon_1 = 0$ y entonces $s = s'$ o $s = r - s'$.

Número IV.5 Encontrar una ecuación de la cónica afín $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $O := (0,0)$, $A := (2,0)$, $B = (0,3)$, $C := (1,1)$ y $D := (-2,2)$ y clasificarla.

Número IV.6 Sean $a > 0$ un número real distinto de 1, los puntos $A_1 := (a,0)$, $A_2 := (-a,0)$ y M un punto variable en la recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$ cuya ecuación respecto de la referencia estándar es $\mathtt{y} = \mathtt{x} + 1$. Sea Q el punto de corte de la recta r_1 perpendicular desde A_1 a la recta ℓ_2 que une M y A_2 con la recta r_2 perpendicular desde A_2 a la recta ℓ_1 que une M y A_1. Determinar la naturaleza del lugar geométrico de los puntos Q así obtenidos.

Número IV.7 Encontrar ecuaciones de las rectas $L \subset \mathbb{K}^2$ que cortan a la cónica de ecuación $\mathcal{Q} := \{\mathtt{x}^2 + 2\mathtt{xy} - 4\mathtt{y} - 3 = 0\}$ en un sólo punto y que pasan por el punto $P := (2,-1)$. Para cada una de estas rectas L encontrar las coordenadas del punto $L \cap \mathcal{Q}$.

Número IV.8 Se trazan todas las rectas del plano que pasan por $P := (2,-1)$ y cortan a la curva

$$C := \{\mathtt{y}(\mathtt{x}^2 - 5\mathtt{x} + 4) = \mathtt{x}\} \subset \mathbb{R}^2$$

en otros dos puntos más. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que tienen dicho par de puntos por extremos es una cónica y clasificarla.

Número IV.9 Hallar una ecuación implícita del lugar geométrico Γ de los baricentros de los triángulos equiláteros cuyos vértices están situados sobre la cónica de ecuación $\mathcal{Q} := \{4\mathtt{x}^2 + \mathtt{y}^2 = 4\}$. Comprobar que Γ es una cónica y clasificarla.

Número IV.10 Sean a y b números reales positivos y $\mathcal{Q}$ la cónica $b^2\mathtt{x}^2 + a^2\mathtt{y}^2 = a^2b^2$.

(i) Clasificar $\mathcal{Q}$.

(ii) Encontrar una ecuación implícita del lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de $\mathcal{Q}$ que son vistas desde su centro bajo ángulo recto.

Número IV.11 Sean a, b y c tres números reales tales que la cuádrica afín $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 + 2a\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 - 2b\mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 + c = 0$$

tiene un único centro, que está contenido en la recta $\ell := \{\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 2,\ \mathtt{x}_3 + a = 0\}$. Se sabe, además, que la intersección $\mathcal{Q} \cap \{\mathtt{x}_2 = 0\}$ es una recta.

(i) Determinar todos los valores de a, b y c que cumplen las condiciones anteriores y en cada caso calcular el centro de $\mathcal{Q}$.

(ii) ¿Cuál es la ecuación reducida de $\mathcal{Q}$? Hallar una referencia cartesiana de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que $\mathcal{Q}$ adopte su ecuación reducida.

Número IV.12 Se dice que una recta proyectiva $\ell \subset \mathbb{P}^2$ es *tangente* a la cónica proyectiva $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^2$ si la intersección $\mathcal{Q} \cap \ell$ consta de un único punto. Encontrar una cónica proyectiva que sea tangente a la recta de ecuación $\{\mathtt{x}_0 = \mathtt{x}_2\}$ y pase por los puntos

$$P_1 := [0:1:2], \quad P_2 := [0:0:1], \quad P_3 := [2:1:2] \quad \text{y} \quad P_4 := [3:0:1].$$

Número IV.13 (i) Sean $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2$ dos rectas proyectivas distintas y $\mathcal{Q} := \ell_1 \cup \ell_2$. Sean $\mathtt{x}A\mathtt{x}^t = 0$ una ecuación de $\mathcal{Q}$ y $x := [x_0 : x_1 : x_2]$ las coordenadas del punto de intersección $\ell_1 \cap \ell_2$. Demostrar que $xA = 0$.

(ii) Calcular los puntos en que se cortan dos cónicas $\mathcal{Q}_a$ y $\mathcal{Q}_b$ para dos valores distintos $a, b \in \mathbb{K}$.

(iii) ¿Para qué valor de $a \in \mathbb{K}$ la cónica $\mathcal{Q}_a \subset \mathbb{P}^2$ de ecuación

$$\mathtt{x}_1^2 - 3\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + a\mathtt{x}_0^2 = 0$$

es un par de rectas?

(iv) Para el valor hallado en el apartado anterior obtener ecuaciones de dichas rectas.

Número IV.14 Sea $\mathtt{y}A\mathtt{y}^t = 0$ la ecuación de una cónica no degenerada $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^2$ y sea $x := [x_0 : x_1 : x_2]$ las coordenadas de un punto $P \in \mathcal{Q}$.

(i) Probar que $xA\mathtt{y}^t = 0$ es la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{Q}$ en el punto P.

(ii) Sea $Q \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{Q}$. Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de $\mathcal{Q}$ con las rectas tangentes a $\mathcal{Q}$ que pasan por Q. Esta recta se denomina *polar* de Q respecto de $\mathcal{Q}$.

Número IV.15 Encontrar la ecuación de una cónica no degenerada $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^2$ que pase por los puntos $A := [0:0:1]$ y $B := [0:1:1]$, su recta tangente en el punto $P := [1:1:1]$ sea $\{\mathtt{x}_0 = \mathtt{x}_2\}$ y tenga a la recta de ecuación $\{3\mathtt{x}_1 = 4\mathtt{x}_2\}$ por polar del punto $Q := [2:4:3]$.

Número IV.16 Clasificar la cuádrica proyectiva $\mathcal{Q}$ del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^3$ que respecto de la referencia proyectiva estándar tiene por ecuación

$$\varphi(\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3) = \mathtt{x}_0^2 + 3\mathtt{x}_1^2 + 3\mathtt{x}_2^2 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 = 0.$$

Número IV.17 Se consideren las cónicas proyectivas del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^3$ definidas por las ecuaciones

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \mathtt{x}_1^2 + \mathtt{x}_2^2 - 4\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 &= 0 \\ \mathtt{x}_3 &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_3^2 - 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_3 &= 0 \\ \mathtt{x}_1 &= 0 \end{cases}$$

(i) Obtener una ecuación de la cuádrica $\mathcal{Q}$ que contiene a Γ_1 y Γ_2 y pasa por el punto $P := [0:1:0:1]$.

(ii) Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Clasificar la cuádrica afín $\mathcal{Q}'$ que se obtiene al afinizar la anterior considerando $\{\mathtt{x}_0 = 0\}$ como plano del infinito.

Número IV.18 Se consideran en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^3$ las rectas proyectivas

$$\ell_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{x}_2 & = & 0 \\ \mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \ell_2 : \left\{ \begin{array}{lcr} \mathtt{x}_1 & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & = & \mathtt{x}_2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \ell_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathtt{x}_0 & = & \mathtt{x}_1 \\ \mathtt{x}_0 & = & \mathtt{x}_3 \end{array} \right.$$

(i) Demostrar que la unión de las rectas de $\mathbb{RP}^3$ que cortan estas tres es una cuádrica. Hallar una ecuación implícita y clasificarla.

(ii) Clasificar la cuádrica afín que se obtiene al afinizar la anterior considerando $\{\mathtt{x}_0 = 0\}$ como plano del infinito.

Número IV.19 Se consideran la cónica $\mathcal{Q} := \{\mathtt{x}_1^2 = 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_2\}$ y la recta $\ell := \{\mathtt{x}_0 = 2\mathtt{x}_2\}$ del plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$.

(i) Encontrar las coordenadas de los puntos de intersección P_0 y P_1 de $\mathcal{Q}$ y ℓ.

(ii) Sea $P_2 := [2 : 0 : 1] \in \ell$. Escribir un punto genérico $P \in \ell$ en términos de la referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1; P_2\}$ de la recta ℓ.

(iii) Consideremos la inmersión del plano afín $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{RP}^2$ respecto de la que la recta ℓ es la recta de infinito. Clasificar la cónica afín $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap (\mathbb{RP}^2 \setminus \ell)$.

Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo V

Número V.1 (Teorema de Menelao en el plano afín) Sean A, B y C tres puntos no alineados situados en un plano afín $\mathbb{A}$. Sean

$$D \in V(\{A,B\}) \setminus \{A,B\}, \quad E \in V(\{A,C\}) \setminus \{A,C\} \quad \text{y} \quad F \in V(\{B,C\}) \setminus \{B,C\},$$

Sea $L_1 := V(D,E)$ y suponemos que la recta L_2 paralela a L_1 que pasa por el punto A corta a la recta $V(B,C)$. Demostrar que los puntos D, E y F están alineados si y sólo si

$$[F,C,B] \cdot [E,A,C] \cdot [D,B,A] = 1.$$

Número V.2 (Teorema de Ceva en el plano afín) Sean A, B y C tres puntos no alineados situados en un plano afín $\mathbb{A}$. Sean

$$D \in V(\{A,B\}) \setminus \{A,B\}, \quad E \in V(\{A,C\}) \setminus \{A,C\} \quad \text{y} \quad F \in V(\{B,C\}) \setminus \{B,C\}$$

tales que $V(\{A,F\}) \cap V(\{B,E\}) \neq \varnothing$. Demostrar que las rectas $V(\{A,F\})$, $V(\{B,E\})$ y $V(\{C,D\})$ son concurrentes si y sólo si

$$[D,B,A] \cdot [F,C,B] \cdot [E,A,C] = -1.$$

Número V.3 En un ejemplo de teoría definimos el baricentro de un triángulo en el plano afín. Sugerimos emplear el Teorema de Ceva V.2, para demostrar que las medianas de un triángulo, esto es, las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios del lado opuesto, se cortan en un punto, denominado baricentro.

Número V.4 Sea G el baricentro del triángulo Δ de vértices A, B y C del plano afín $\mathbb{R}^2$. Se traza una recta L que pasa por G y corta a la recta $V(A,B)$ en un punto P, distinto de A y B, del segmento que tiene estos puntos por extremos, y a la recta $V(A,C)$ en un punto Q, distinto de A y C, del segmento que tiene por extremos A y C. Demostrar que

$$[P,A,B] \cdot [Q,A,C] \leq \frac{1}{4}.$$

Número V.5 (i) Probar que los puntos $A := [1 : -1 : 0]$, $B := [0 : 1 : -1]$ y $C := [1 : 1 : -2]$ de $\mathbb{P}^2$ están alineados.

(ii) Encontrar puntos P_1 y P_2 en la recta $L := \mathtt{V}(A,B)$ tales que $[A,B,C,P_1] = -\frac{1}{2}$ y $[A,B,P_2,P_1] = -\frac{2}{3}$.

Número V.6 En una recta afín L se consideran cuatro puntos distintos A, B, C y D. Sean $P_0 \in L$ y $\mathcal{R} := \{P_0; \overrightarrow{u}\}$ una referencia cartesiana en L respecto de la que las coordenadas de los puntos A, B, C y D son, respectivamente, a, b, c y d. Probar que:

(i) Si $P_0 = A$, entonces $[A,B,C,D] = -1$ si y sólo si $\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

(ii) Si $P_0 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, entonces $[A,B,C,D] = -1$ si y sólo si $a^2 = cd$.

Número V.7 (i) Determinar los puntos fijos A y B de la homografía

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ [x_0 : x_1] \mapsto [-x_1 : 2x_0 + 3x_1].$$

(ii) Calcular la razón doble $[A,B,P,f(P)]$ donde $P := [2 : 5]$.

Número V.8 Sean $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ una homografía distinta de la identidad y

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

su matriz respecto de la referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2]\}$ de $\mathbb{P}^1$.

(i) Demostrar que f es una involución, es decir, $f^2 := f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$, si y sólo si la traza $\mathrm{tr}(M) := a + d$ es nula.

(ii) Demostrar que f es una involución si y sólo si existen dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$ tales que $f(P_1) = P_2$ y $f(P_2) = P_1$.

(iii) Demostrar que si f es una involución, entonces f tiene, exactamente, 0 o 2 puntos fijos y que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces tiene dos puntos fijos.

(iv) Demostrar que si f no es una involución entonces es composición de dos involuciones.

Número V.9 Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ tales que no hay tres de ellos alineados. Se definen

$$Q_1 : = \mathtt{V}(P_1, P_2) \cap \mathtt{V}(P_3, P_4), \qquad Q_2 := \mathtt{V}(P_1, P_3) \cap \mathtt{V}(P_2, P_4),$$
$$Q_3 : = \mathtt{V}(Q_1, Q_2) \cap \mathtt{V}(P_2, P_3) \quad \text{y} \quad Q_4 := \mathtt{V}(Q_1, Q_2) \cap \mathtt{V}(P_1, P_4)$$

Demostrar que los puntos Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 constituyen una cuaterna armónica.

Número V.10 (Teorema de Menelao en el plano proyectivo) En el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ se consideran una referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{A_1, A_2, A_3; U\}$ y tres puntos $P_1 \in \mathtt{V}(A_2, A_3)$, $P_2 \in \mathtt{V}(A_1, A_3)$ y $P_3 \in \mathtt{V}(A_1, A_2)$. Consideremos los puntos

$$U_i := \mathtt{V}(A_1, U) \cap \mathtt{V}(A_2, A_3), \;\; U_2 := \mathtt{V}(A_2, U) \cap \mathtt{V}(A_1, A_3) \;\; \text{y} \;\; U_3 := \mathtt{V}(A_3, U) \cap \mathtt{V}(A_1, A_2).$$

Demostrar que los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados si y sólo si

$$[A_2, A_3, U_1, P_1] \cdot [A_3, A_1, U_2, P_2] \cdot [A_1, A_2, U_3, P_3] = -1.$$

Número V.11 (Teorema de Ceva en el plano proyectivo) En el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ se tienen una referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{A_1, A_2, A_3; U\}$ y tres puntos

$$P_1 \in \mathtt{V}(A_2, A_3), \quad P_2 \in \mathtt{V}(A_1, A_3) \quad \text{y} \quad P_3 \in \mathtt{V}(A_1, A_2).$$

Consideremos los puntos

$$U_i := \mathtt{V}(A_1, U) \cap \mathtt{V}(A_2, A_3), \;\; U_2 := \mathtt{V}(A_2, U) \cap \mathtt{V}(A_1, A_3) \;\; \text{y} \;\; U_3 := \mathtt{V}(A_3, U) \cap \mathtt{V}(A_1, A_2).$$

Probar que las rectas $\mathtt{V}(A_1, P_1)$, $\mathtt{V}(A_2, P_2)$ y $\mathtt{V}(A_3, P_3)$ son concurrentes si y sólo si

$$[A_2, A_3, U_1, P_1] \cdot [A_3, A_1, U_2, P_2] \cdot [A_1, A_2, U_3, P_3] = 1.$$

Número V.12 Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos en posición general en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y consideremos $L_1 := \mathtt{V}(P_2, P_3)$, $L_2 := \mathtt{V}(P_1, P_3)$ y $L_3 := \mathtt{V}(P_1, P_2)$. Consideremos los puntos

$$Q_1 := L_1 \cap \mathtt{V}(P_1, P_4), \quad Q_2 := L_2 \cap \mathtt{V}(P_2, P_4) \quad \text{y} \quad Q_3 := L_3 \cap \mathtt{V}(P_3, P_4).$$

Sean $R_1 \in L_1$, $R_2 \in L_2$ y $R_3 \in L_3$ tales que

$$[P_2, P_3, Q_1, R_1] = [P_3, P_1, Q_2, R_2] = [P_1, P_2, Q_3, R_3] = -1.$$

Demostrar que los puntos R_1, R_2 y R_3 están alineados.

Número V.13 (Teorema de Fano) Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos en $\mathbb{P}^2$ en posición general. Se llama *cuadrilátero completo* determinado por estos cuatro vértices al formado por las seis rectas $L_{ij} := \mathtt{V}(P_i, P_j)$, donde $1 \leq i < j \leq 4$. Se definen los puntos

$$Q_1 := L_{14} \cap L_{23}, \quad Q_2 := L_{13} \cap L_{24}, \quad Q_3 := L_{12} \cap L_{34} \quad \text{y} \quad Q_4 := L_{34} \cap \mathtt{V}(Q_1, Q_2).$$

Demostrar que $[Q_3, Q_4, P_3, P_4] = -1$.

Número V.14 En el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ se consideran las rectas cuyas ecuaciones respecto de la referencia proyectiva estándar son

$$L_1 := \{2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 = 0\}, \quad L_2 := \{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 0\}, \quad L_3 := \{\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + 2\mathtt{x}_2 = 0\} \quad \text{y}$$

$$L_4 := \{\mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 + 5\mathtt{x}_2 = 0\}.$$

Comprobar que se trata de cuatro rectas que forman parte de un haz y calcular la razón doble $[L_1, L_2, L_3, L_4]$.

Número V.15 Se consideran los puntos de $\mathbb{P}^2$ de coordenadas

$$A := [1:0:0], \quad B := [1:1:-2], \quad C := [1:3:0] \quad \text{y} \quad D := [1:1:1].$$

(i) Calcular las coordenadas de los puntos

$$P := \mathtt{V}(A, C) \cap \mathtt{V}(B, D), \quad Q := \mathtt{V}(A, B) \cap \mathtt{V}(C, D) \quad \text{y} \quad R := \mathtt{V}(A, D) \cap \mathtt{V}(B, C).$$

(ii) Se consideran las siguientes rectas del haz de base el punto Q:

$$L_1 := \mathtt{V}(Q, B), \quad L_2 := \mathtt{V}(Q, C), \quad L_3 := \mathtt{V}(Q, P) \quad \text{y} \quad L_4 := \mathtt{V}(Q, R).$$

Calcular la razón doble $[L_1, L_2, L_3, L_4]$.

Ejercicios y problemas propuestos del Capítulo VI

Número VI.1 Consideramos el enunciado $\mathfrak{E}$: *Si L y L' son dos rectas que no se cortan de un espacio proyectivo de dimensión* 3*, y H es un plano que no contiene a ninguna de ellas, entonces existe exactamente una recta L'' contenida en H que corta a L y a L'*. Determinar cual es su enunciado dual $\mathfrak{E}^*$.

Número VI.2 Sea $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ una homografía de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ de dimensión 3 sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que no tiene puntos fijos. Determinar cuántas rectas invariantes puede tener f y la incidencia entre ellas.

Número VI.3 (Rectas tangentes) Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica proyectiva no degenerada y sea $P \in \mathcal{Q}$. Una recta L que pasa por P se dice que es tangente a $\mathcal{Q}$ en P si $L \subset T_P\mathcal{Q}$. Probar que:

(i) Una recta L que pasa por $P \in \mathcal{Q}$ es tangente a $\mathcal{Q}$ en L si y sólo si o está contenida en $\mathcal{Q}$ o $L \cap \mathcal{Q} = \{P\}$.

(ii) Si $L \subset \mathcal{Q}$ es una recta, entonces L es tangente a $\mathcal{Q}$ en todos los puntos regulares por los que pasa, es decir, $L \subset T_Q\mathcal{Q}$ para cada $Q \in \mathcal{Q}$.

(iii) Probar que si $\mathcal{Q}$ es una cónica no degenerada, entonces para todo $P \in \mathcal{Q}$ se cumple $\mathcal{Q} \cap T_P\mathcal{Q} = \{P\}$.

Número VI.4 (Asíntotas) Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica afín no degenerada con centro C del espacio afín $\mathbb{A}$ y sea $\overline{\mathcal{Q}}$ su completación proyectiva. Denotamos $\mathcal{Q}_\infty = \overline{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q}$. Se dice que una recta $L \subset \mathbb{A}$ es una *asintóta* de $\mathcal{Q}$ si $C \in L$ y la dirección de L define un punto de $\mathcal{Q}_\infty$. Probar que:

(i) Si L es una asíntota, entonces su completada proyectiva $\overline{L}$ es tangente a $\overline{\mathcal{Q}}$ en un punto de infinito.

(ii) Si $\mathcal{Q}$ es una cónica la afirmación recíproca de (i) también es cierta.

(iii) $\mathcal{Q}$ tiene un diámetro H tal que $f_{\mathcal{Q}}(\overline{H}) \in \overline{H}$ si y sólo si $\mathcal{Q}$ tiene asíntotas.

Número VI.5 (Homografía inducida por una cuádrica) Sea L una recta de $\mathbb{P}(E)$ que no es tangente a una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(E)$ no degenerada.

(i) Demostrar que la polaridad $f_{\mathcal{Q}}$ induce una homografía $f_{\mathcal{Q}}|_L : L \to \mathbb{P}(E^*)$, y la colección de hiperplanos $\mathfrak{F} := \{f(P) \in \mathbb{P}(E^*) : \ P \in L\}$ es una recta de $\mathbb{P}(E^*)$, es decir, un haz de hiperplanos de P.

(ii) Demostrar que la base X del haz $\mathfrak{F}$ no corta a L.

(iii) Consideramos la homografía $g : \mathfrak{F} \to L, \ H \mapsto H \cap L$. Probar que la composición $g \circ f|_L : L \to L$ es homografía involutiva y sus puntos fijos son exactamente $L \cap \mathcal{Q}$.

(iv) Probar que si $L \cap \mathcal{Q} = \{A, B\}$, entonces para cada punto $P \in L \setminus \{A, B\}$ se cumple $[A, B, P, f(P) \cap L] = -1$.

Número VI.6 (Cuádrica dual) Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}(E)$ no degenerada y sea $\mathcal{Q}^* = \{T_P\mathcal{Q} : \ P \in \mathcal{Q}\}$.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}^*$ es una cuádrica no degenerada de $\mathbb{P}(E^*)$.

(ii) Sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathscr{R}^*$ su referencia proyectiva dual. Calcular una ecuación de $\mathcal{Q}^*$ con respecto a $\mathscr{R}^*$ a partir de una ecuación de $\mathcal{Q}$ con respecto a $\mathscr{R}$.

(iii) Para cada $H \in \mathcal{Q}^*$ calcular $T_H\mathcal{Q}^*$.

(iv) Demostrar que $\mathcal{Q}^{**} = \mathcal{Q}$ trámite la identificación $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^{**})$.

Soluciones a los ejercicios del Capítulo I

Número VI.1 Sean $\mathcal{E}_3 := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^3$ y los vectores

$$u_1 := -e_1 + e_3, \quad u_2 := e_1 \quad \text{y} \quad u_3 := e_2 + e_3.$$

Sean $O := (0,0,0)$ y $O_1 \in \mathbb{R}^3$ el punto cuyas coordenadas respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e} := \{O; \mathcal{E}_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ son $O_1 := (-1, 1, -1)$.

(i) Demostrar que $\mathcal{B} := \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{K}^3$.

(ii) Calcular las coordenadas respecto de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c := \{O_1; \mathcal{B}\}$ de $\mathbb{K}^3$ del punto P cuyas coordenadas respecto de la referencia $\mathcal{R}_{c,e}$ son $P := (6, 1, 3)$.

Solución. (i) Basta observar que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

(ii) Si x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas del punto P respecto de la referencia $\mathcal{R}_c$, entonces

$$\begin{aligned} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OP} = e_1 - e_2 + e_3 \\ + 6e_1 + e_2 + 3e_3 = 7e_1 + 4e_3 = 7u_2 + 4(u_1 + u_2) = 4u_1 + 11u_2, \end{aligned}$$

luego las coordenadas son $x_1 = 4$, $x_2 = 11$ y $x_3 = 0$. □

Número VI.2 (i) Demostrar que dos puntos distintos P y Q en una recta afín $\mathbb{A}$ constituyen una referencia afín de $\mathbb{A}$.

(ii) Se llama *punto medio* del segmento que une P con Q al punto $M \in \mathbb{A}$ que cumple $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$. Calcular las coordenadas baricéntricas de M respecto de la referencia afín $\mathcal{R}_a := \{P, Q\}$ de $\mathbb{A}$.

Solución. (i) Como $P \neq Q$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ es no nulo, luego constituye una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E subyacente a la recta afín $\mathbb{A}$ pues $\dim(E) = 1$.

(ii) Consideramos la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c := \{P; \overrightarrow{PQ}\}$ de $\mathbb{A}$ y observamos que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PM} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \quad \rightsquigarrow \quad M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = P + \lambda_1\overrightarrow{PQ}.$$

Por tanto $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_0 := 1 - \lambda_1 = \frac{1}{2}$. Así, de acuerdo con la Definición §**??**, las coordenadas baricéntricas de M respecto de $\mathcal{R}_a$ son $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. □

Número VI.3 Sean $\mathcal{R}_a := \{P_0, P_1, P_2\}$ una referencia afín de un plano afín $\mathbb{A}$ y consideremos los puntos $A, B, C \in \mathbb{A}$ que son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos que unen P_0 con P_1, P_1 con P_2 y P_0 con P_2. Calcular las coordenadas baricéntricas de A, B y C respecto de $\mathcal{R}_a$.

Solución. Consideremos la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c := \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ de $\mathbb{A}$ y observamos que, por ser A el punto medio del segmento que une P_0 con P_1,

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AP_1} = 2\overrightarrow{P_0A} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{P_0A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} \quad \rightsquigarrow \quad A = P_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}.$$

Análogamente se tiene

$$B = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{y} \quad C = P_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2}.$$

Como P_0 es el origen de la referencia $\mathcal{R}_c$ debemos modificar la escritura de la penúltima igualdad como sigue:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0B} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1B} = \overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \\ = \overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0P_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_2}). \end{aligned}$$

En consecuencia,
$$A = P_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} + 0\cdot\overrightarrow{P_0P_2}, \quad B = P_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2}$$
$$C = P_0 + 0\cdot\overrightarrow{P_0P_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2},$$
luego las coordenadas baricéntricas de A, B y C respecto de $\mathcal{R}_a$ son
$$A \rightsquigarrow \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\Big), \quad B \rightsquigarrow \Big(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \quad \text{y} \quad C \rightsquigarrow \Big(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\Big).$$
□

Número VI.4 Sean $\mathcal{E}_2 := \{e_1, e_2\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^2$, $r \in \mathbb{K}$ un escalar y los vectores
$$u_1 := e_1 + e_2, \quad u_2 := e_1 - e_2, \quad v_1 := (r+1)e_1 + (r-1)e_2 \quad \text{y} \quad v_2 := -e_1 - e_2.$$
Consideremos las bases $\mathcal{B}_1 := \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\}$ del espacio vectorial $\mathbb{K}^2$ y dos puntos O_1 y O_2 que cumplen $\overrightarrow{O_1O_2} = 2e_1$. ¿Para qué valores de r existe un punto $P \in \mathbb{K}^2$ cuyas coordenadas respecto de las referencias cartesianas $\mathcal{R}_c := \{O_1; \mathcal{B}_1\}$ y $\mathcal{R}'_c := \{O_2; \mathcal{B}_2\}$ coinciden y ambas son no nulas? Calcular en tal caso las coordenadas de todos los puntos P que cumplen la condición anterior.

Solución. Comenzamos calculando la matriz de cambio de referencia
$$C_{\mathcal{R}'_c,\mathcal{R}_c} := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a^t & C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \end{array}\right)$$
donde $a := (a_1, a_2)$ son las coordenadas cartesianas del punto O_2 con respecto a la referencia $\mathcal{R}_c$ y $C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ es la matriz de cambio de base entre las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$. Pero
$$a_1u_1 + a_2u_2 = \overrightarrow{O_1O_2} = 2e_1 = u_1 + u_2 \quad \rightsquigarrow \quad a_1 = 1,\, a_2 = 1,$$
mientras que
$$v_1 = (r+1)e_1 + (r-1)e_2 = r(e_1+e_2) + (e_1 - e_2) = ru_1 + u_2 \quad \text{y} \quad v_2 = -u_1,$$
por lo que
$$C_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad C_{\mathcal{R}'_c,\mathcal{R}_c} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Así, si denotamos (x_1, x_2) a las coordenadas cartesianas del punto P respecto de ambas referencias, se tiene
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 1 & + & rx_1 & - & x_2 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & & \end{array}\right.$$
En consecuencia, $(1-r)x_1 = 1 - x_2 = -x_1$, o sea, $(2-r)x_1 = 0$. Por hipótesis $x_1 \neq 0$, así que $r = 2$.

Por último, el sistema anterior se reduce a la única ecuación $x_2 = 1 + x_1$, luego los puntos buscados son aquéllos cuya segunda coordenada respecto de $\mathcal{R}_c$ excede en una unidad a la primera. □

Número VI.5 (i) Demostrar que dos puntos distintos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ son independientes.

(ii) Demostrar que tres puntos distintos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ constituyen una referencia proyectiva.

Solución. El segundo apartado se deduce directamente del primero, pues tres puntos de $\mathbb{P}^1$ constituyen una referencia proyectiva si dos cualesquiera de ellos son independientes. Para resolver el primer apartado basta observar que si u_0, u_1 son vectores de $\mathbb{K}^2$ y los puntos $P_0 := [u_0]$ y $P_1 := [u_1]$ son distintos entonces u_0 y u_1 no son proporcionales, luego son linealmente independientes. Esto equivale a decir que los puntos P_0 y P_1 son independientes. □

Número VI.6 Sean $\mathcal{E}_3 := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^3$ y los vectores $u_0 := e_1$, $u_1 := e_2$, $u_2 := e_3$ y $u_3 := -e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Se consideran los puntos $P_i := [u_i] \in \mathbb{P}^2$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Demostrar que $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ y encontrar una base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^3$ asociada a $\mathscr{R}$.

Solución. Sea $\mathscr{B} := \{v_0, v_1, v_2\}$, donde $v_0 := -e_1, v_1 := 2e_2$ y $v_2 := 3e_3$. Nótese que $\mathscr{B}$ es una base de $\mathbb{K}^3$ pues sus miembros son proporcionales a los de $\mathcal{E}_3$. Además es base asociada a $\mathscr{R}$, luego ésta es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$, ya que $P_i = [u_i] = [v_i]$ para $i = 0, 1, 2$ y $P_3 = [u_3]$ con $u_3 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3 = v_0 + v_1 + v_2$. □

Número VI.7 (i) Demostrar que $P_0 := [1 : 0 : 1]$, $P_1 := [0 : 2 : 1]$, $P_2 := [0 : 0 : 1]$ y $P_3 := [1 : -1 : 0]$ constituyen una referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ de $\mathbb{P}^2$ que tiene a P_3 por punto unidad.

(ii) Determinar las coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ del punto $P := [2 : -2 : 1]$.

Solución. (i) Buscamos escalares a, b, c tales que

$$(2, -2, 0) = a(1, 0, 1) + b(0, 2, 1) + c(0, 0, 1) = (a, 2b, a + b + c),$$

o sea, $a = 2$, $b = -1$ y $c = -1$. Por tanto, los vectores $u_0 := (2, 0, 2)$, $u_1 := (0, -2, -1)$, $u_2 := (0, 0, -1)$ y $u_3 := (2, -2, 0)$ cumplen

$$P_i = [u_i] \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad u_3 = u_0 + u_1 + u_2.$$

Esto prueba que $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ que tiene a P_3 por punto unidad.

(ii) Las coordenadas x_0, x_1 y x_2 de P respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la igualdad

$$(2, -2, 1) = x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 = (2x_0, -2x_1, 2x_0 - x_1 - x_2),$$

esto es, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. □

Número VI.8 Consideramos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ los puntos

$$P_0 := [1 : 1 : 1 : 1], \quad P_1 := [2 : 4 : 0 : 1], \quad P_2 := [-1 : 2 : -1 : -1],$$
$$P_3 : = [1 : 0 : 2 : 1] \quad \text{y} \quad P_4 := [1 : 0 : 0 : 0].$$

(i) Demostrar que $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2, P_3; P_4\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^3$.
(ii) Hallar las coordenadas homogéneas respecto de $\mathscr{R}$ del punto $P := [1 : 2 : 2 : 1]$.

Solución. (i) Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{K}^4$:

$$u_0 := (1, 1, 1, 1), \quad u_1 := (2, 4, 0, 1), \quad u_2 := (-1, 2, -1, -1) \quad \text{y} \quad u_3 := (1, 0, 2, 1),$$

que constituyen una base del espacio vectorial $\mathbb{K}^4$ ya que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Probaremos que $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva demostrando que existe una base $\mathscr{B} := \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ formada por vectores $v_i := \lambda_i u_i$ proporcionales a los anteriores, con $\lambda_i \neq 0$, cuya suma es el vector $v_4 := (1, 0, 0, 0)$, que cumple $P_4 = [v_4]$. Así $\mathscr{R}$ es la referencia proyectiva cuyo punto unidad es P_4 asociada a la base $\mathscr{B}$. Hay pues que hallar escalares λ_i que cumplan la igualdad $v_4 = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i u_i$, esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al resolver este sistema obtenemos $\lambda_0 = -\frac{8}{3}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ y $\lambda_3 = 1$. Por tanto, la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^4$ asociada a la referencia $\mathscr{R}$ está formada por los vectores

$$v_0 := -\frac{8}{3}(1,1,1,1),\;\; v_1 := (2,4,0,1),\;\; v_2 := -\frac{2}{3}(-1,2,-1,-1) \;\text{ y }\; v_3 := (1,0,2,1).$$

(ii) Las coordenadas homogéneas $x := (x_0, x_1, x_2, x_3)$ del punto P respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la igualdad $(1,2,2,1) = \sum_{i=0}^{3} x_i v_i$, esto es,

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{8}{3} & 4 & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{8}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o sea $x_0 = -\frac{1}{4}$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$. Multiplicando por -4 obtenemos las coordenadas $[1:0:4:-4]$ de P respecto de la referencia proyectiva $\mathscr{R}$. □

Número VI.9 Sea $\mathscr{R}_1 := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$.

(i) Probar que $\mathscr{R}_2 := \{P_2, P_3, P_1; P_0\}$ es también una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$.

(ii) Determinar (módulo proporcionalidad) las coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ del punto $P \in \mathbb{P}^2$ cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}_1$ son (x_0, x_1, x_2).

(iii) ¿Cuáles son las coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ del punto $P := [3:2:1]_{\mathscr{R}_1}$?

(iv) ¿Existe algún punto cuyas coordenadas respecto de ambas referencias coincidan? En caso afirmativo, calcular todos.

Solución. (i) Sean $u_i \in \mathbb{K}^3$ vectores tales que $P_i = [u_i]$ para $i = 0,1,2,3$. Como $\mathscr{R}_1$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$, las ternas $\{u_0, u_1, u_2, u_3\} \setminus \{u_i\}$ son vectores linealmente independientes, luego $\mathscr{R}_2$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$.

Podemos suponer que $u_3 = u_0 + u_1 + u_2$ y buscamos $a, b, c \in \mathbb{K}$ tales que

$$u_0 = au_2 + bu_3 + cu_1 = au_2 + b(u_0 + u_1 + u_2) + cu_1 = bu_0 + (b+c)u_1 + (a+b)u_2,$$

luego $b = 1$, $c = -1$ y $a = -1$. Esto significa que los vectores $v_0 := u_0$, $v_1 := -u_1$, $v_2 := -u_2$ y $v_3 := u_3$ cumplen

$$P_i = [v_i] \quad \text{para} \quad i = 0,1,2,3 \quad \text{y} \quad v_0 = v_2 + v_3 + v_1.$$

(ii) Si (y_0, y_1, y_2) son las coordenadas del punto P respecto de la referencia $\mathscr{R}_2$ se tiene

$$\begin{aligned} x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 &= y_0v_2 + y_1v_3 + y_2v_1 = -y_0u_2 + y_1u_3 - y_2u_1 \\ &= -y_0u_2 + y_1(u_0 + u_1 + u_2) - y_2u_1 = y_1u_0 + (y_1 - y_2)u_1 + (y_1 - y_0)y_2, \end{aligned}$$

luego $x_0 = y_1$, $x_1 = y_1 - y_2$ y $x_2 = y_1 - y_0$, así que las coordenadas de P respecto de la referencia $\mathscr{R}_2$ son

$$y_0 = x_0 - x_2, \quad y_1 = x_0 \quad \text{e} \quad y_2 = x_0 - x_1.$$

(iii) Aplicando lo que acabamos de probar resulta $P = [2:3:1]_{\mathscr{R}_2}$.

(iv) Debemos decidir si existen $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{K}$, no todos nulos y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tales que

$$x_0 - x_2 = \lambda x_0, \quad x_0 = \lambda x_1 \quad \text{y} \quad x_0 - x_1 = \lambda x_2.$$

Por tanto, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\mathtt{x}_0 & & & - & \mathtt{x}_2 & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & - & \lambda\mathtt{x}_1 & & & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & - & \mathtt{x}_1 & - & \lambda\mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

admite una solución no trivial, y por tanto

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2).$$

Esto nos lleva a distinguir dos casos, según que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En el primer caso $\lambda = 1$, así que $x_2 = 0$ y $x_0 = x_1$, luego el único punto cuyas coordenadas respecto de ambas referencias coinciden es $P := [1 : 1 : 0]_{\mathscr{R}_1} = [1 : 1 : 0]_{\mathscr{R}_2}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos las soluciones adicionales, $\lambda = \pm\mathtt{i}$, donde $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$. Se tiene

$$x_2 = (1-\lambda)x_0 \quad \text{y} \quad x_1 = x_0 - \lambda x_2 = x_0 - \lambda(1-\lambda)x_0 = (\lambda^2 + 1 - \lambda)x_0 = -\lambda x_0,$$

así que para $\lambda = \pm\mathtt{i}$ obtenemos los puntos

$$P_1 := [1 : -\lambda : (1-\lambda)]_{\mathscr{R}_1} = [1 : -\lambda : (1-\lambda)]_{\mathscr{R}_2}$$

cuyas coordenadas respecto de ambas referencias coinciden. $\square$

Soluciones a los ejercicios del Capítulo II

Número II.1 Sean $X_1, \dots, X_r$ subvariedades afines de $\mathbb{A}$. Determinar si la siguiente igualdad es cierta:

$$\sum_{i=1}^r X_i = \Big\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i : \ P_i \in X_i, \ \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \Big\}. \tag{1}$$

Solución. La afirmación es falsa y para probarlo proponemos el siguiente ejemplo. Consideramos las rectas afines de $\mathbb{A} := \mathbb{K}^3$ definidas por las ecuaciones implícitas:

$$X_1 := \{\mathtt{x}_1 = 0, \ \mathtt{x}_2 = 0\} \quad \text{y} \quad X_2 := \{\mathtt{x}_0 = 0, \ \mathtt{x}_2 = 1\}.$$

Estas rectas no se cortan pues la tercera coordenada de los puntos de X_1 vale 0 y la de los puntos de X_2 vale 1. Además estas rectas no son paralelas ya que sus subespacios de dirección no coinciden:

$$\overrightarrow{X_1} = \{\mathtt{x}_1 = 0, \ \mathtt{x}_2 = 0\} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{X_2} = \{\mathtt{x}_0 = 0, \ \mathtt{x}_2 = 0\}.$$

En consecuencia X_1 y X_2 no son coplanarias, luego la menor subvariedad afín que las contiene tiene dimensión mayor que 2, es decir, $X_1 + X_2 = \mathbb{K}^3$. Sin embargo, el miembro de la derecha de la igualdad propuesta en el enunciado es

$$\begin{aligned}\Sigma := \{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 : P_1 \in X_1, \ P_2 \in X_2, \ \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \\ = \{\lambda(x_0, 0, 0) + (1-\lambda)(0, x_1, 1) : \lambda, x_0, x_1 \in \mathbb{K}\} \\ = \{(\lambda x_0, (1-\lambda)x_1, 1-\lambda) : \ \lambda, x_0, x_1 \in \mathbb{K}\},\end{aligned}$$

y $\Sigma \neq \mathbb{K}^3$ porque, por ejemplo, $(0,1,0) \notin \Sigma$. $\square$

Número II.2 (i) Calcular la dimensión de la subvariedad afín X_1 de $\mathbb{K}^5$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de cierta referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$ de $\mathbb{K}^5$ son

$$X_1 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \mathtt{x}_2 = 6 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \mathtt{x}_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \mathtt{x}_4 = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \mathtt{x}_5 = \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

Hallar una base de su dirección y unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{R}_c$.

(ii) Encontrar ecuaciones paramétricas de la subvariedad afín X_2 de $\mathbb{K}^4$ definida por las ecuaciones implícitas

$$X_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 - \mathtt{x}_4 = 1 \\ \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_4 = 2 \\ \mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 - 3\mathtt{x}_4 = 0 \end{cases}$$

respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e} = \{0; e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Hallar una base del subespacio de dirección de X_2 y calcular la dimensión de X_2.

Solución. (i) Denotamos $\mathcal{R}_c = \{O; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ la referencia cartesiana del enunciado. El subespacio de dirección $\overrightarrow{X_1}$ de X_1 está generado por los vectores

$$v_1 = u_1 - u_3 + u_4, \quad v_2 = u_1 + 2u_2 - u_3 + u_5 \quad \text{y} \quad v_3 = 3u_1 + 2u_2 - 3u_3 + 2u_4 + u_5,$$

que son linealmente dependientes, porque $2v_1 + v_2 = v_3$. Así $\overrightarrow{X_1} = L[v_1, v_2]$, y estos dos vectores son linealmente independientes, luego $\dim(X_1) = \dim(\overrightarrow{X_1}) = 2$ y una base de $\overrightarrow{X_1}$ es la formada por los vectores v_1 y v_2. Además, el punto cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}_c$ son $(\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \mathtt{x}_4, \mathtt{x}_5)$ pertenece a X_1 si y sólo si

$$2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathtt{x}_1 - 1 & 1 & 1 \\ \mathtt{x}_2 - 6 & 0 & 2 \\ \mathtt{x}_3 & -1 & -1 \\ \mathtt{x}_4 - 1 & 1 & 0 \\ \mathtt{x}_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \det\begin{pmatrix} \mathtt{x}_3 & -1 & -1 \\ \mathtt{x}_4 - 1 & 1 & 0 \\ \mathtt{x}_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} \mathtt{x}_2 - 6 & 0 & 2 \\ \mathtt{x}_3 - 1 & 1 & 0 \\ \mathtt{x}_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} \mathtt{x}_1 - 1 & 1 & 1 \\ \mathtt{x}_4 - 1 & 1 & 0 \\ \mathtt{x}_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Sin más que efectuar el cálculo de estos determinantes se obtienen las siguientes ecuaciones implícitas para X_1:

$$X_1 : \begin{cases} \mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_4 + \mathtt{x}_5 = 1 \\ \mathtt{x}_2 - 2\mathtt{x}_5 = 6 \\ \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_4 - \mathtt{x}_5 = 0 \end{cases}$$

(ii) Es fácil reconocer que la tercera ecuación de X_2 es el doble de la primera menos la segunda, así que se trata de resolver el sistema de ecuaciones

$$X_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 - \mathtt{x}_4 = 1 \\ \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_4 = 2 \end{cases}$$

Pasando de miembro las incógnitas $\mathtt{x}_2$ y $\mathtt{x}_3$ el sistema anterior equivale a

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 1 - \mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_4 \\ \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 2 - 2\mathtt{x}_3 - \mathtt{x}_4 \end{cases}$$

esto es,

$$\begin{cases} 2\mathtt{x}_1 = 3 - 3\mathtt{x}_3 \\ 2\mathtt{x}_2 = 1 - \mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_4 \end{cases}$$

Si ponemos $\mathtt{x}_3 = 1 - 2\lambda_0$ y $\mathtt{x}_4 = \lambda_1$ obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas

$$X_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 = 3\lambda_1 \\ \mathtt{x}_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \mathtt{x}_3 = 1 - 2\lambda_1 \\ \mathtt{x}_4 = \lambda_2 \end{cases}$$

De aquí se deduce que $\overrightarrow{X_2}$ está generado por los vectores

$$w_1 := 3e_1 + e_2 - 2e_3 \quad \text{y} \quad w_2 := e_4 - e_2.$$

Como los vectores $\{w_1, w_2\}$ son linealmente independientes, constituyen una base de $\overrightarrow{X_2}$ y $\dim(X_2) = \dim(\overrightarrow{X_2}) = 2$. □

Número II.3 (i) Obtener unas ecuaciones paramétricas de la intersección de los planos X_1 y X_2 de $\mathbb{K}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas respecto de la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e} = \{0; e_1, e_2, e_3\}$ son:

$$X_1 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \mathtt{x}_2 = 2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \mathtt{x}_3 = -\lambda_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad X_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_1 = 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \mathtt{x}_2 = 1 + \lambda_2 \\ \mathtt{x}_3 = 1 - \lambda_1 \end{cases}$$

¿Cuál es el subespacio de dirección de dicha intersección? ¿Cuál es su dimensión?

(ii) Sea el plano $X_3 := \{\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 1\}$. Calcular $X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Hallar una ecuación implícita del plano paralelo a $X_1 \cap X_2$ y $X_1 \cap X_3$ que pasa por el punto $(1, 1, -1)$.

Solución. (i) Una ecuación implícita de X_1 respecto de $\mathcal{R}_{c,e}$ es

$$0 = \det \begin{pmatrix} \mathtt{x}_1 - 1 & 1 & -1 \\ \mathtt{x}_2 - 2 & 1 & 2 \\ \mathtt{x}_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2(\mathtt{x}_1 - 1) + 3\mathtt{x}_3 + 2 - \mathtt{x}_2 = 4 - 2\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 + 3\mathtt{x}_3.$$

Un punto cualquiera $(1+2\lambda_1-\lambda_2, 1+\lambda_2, 1-\lambda_1)$ de X_2 pertenece a X_1 si y sólo si satisface la ecuación implícita de este plano, o sea,

$$0 = 4 - 2(1+2\lambda_1-\lambda_2) - (1+\lambda_2) + 3(1-\lambda_1) = 4 - 7\lambda_1 + \lambda_2,$$

esto es, $\lambda_2 = 7\lambda_1 - 4$, por lo que unas ecuaciones paramétricas de la recta intersección son

$$X_1 \cap X_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathtt{x}_1 & = & 5 & - & 5\lambda_1 \\ \mathtt{x}_2 & = & -3 & + & 7\lambda_1 \\ \mathtt{x}_3 & = & 1 & - & \lambda_1 \end{array} \right.$$

que tiene dimensión 1 y cuyo subespacio de dirección es la recta vectorial generada por el vector $\omega_1 := 5e_1 - 7e_2 + e_3$.

(ii) El punto $(5-5\lambda_1, -3+7\lambda_1, 1-\lambda_1) \in X_1 \cap X_2$ pertenece también a X_3 si y sólo si

$$1 = 5 - 5\lambda_1 - (-3+7\lambda_1) - (1-\lambda_1) = 7 - 11\lambda_1, \quad \text{es decir,} \quad \lambda_1 = \frac{6}{11},$$

luego los planos X_1, X_2 y X_3 se cortan en el punto $P := \frac{1}{11}(25,9,5)$. Para resolver la segunda parte de este apartado, observamos que el punto

$$(1-\lambda_1-\lambda_2, 2-\lambda_1+2\lambda_2, -\lambda_1) \in X_1$$

está también en X_3 si y sólo si

$$1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - (2 - \lambda_1 + 2\lambda_2) + \lambda_1 = -1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_1 = 3\lambda_2 + 2,$$

luego unas ecuaciones paramétricas de la recta $X_1 \cap X_3$ son

$$X_1 \cap X_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathtt{x}_0 & = & -1 & - & 4\lambda_2 \\ \mathtt{x}_1 & = & & - & \lambda_2 \\ \mathtt{x}_2 & = & -2 & - & 3\lambda_2 \end{array} \right.$$

En consecuencia, el subespacio de dirección del plano Y_1 paralelo a $X_1 \cap X_2$ y $X_1 \cap X_3$ y que pasa por $(1,1,-1)$ es el generado por los vectores

$$\omega_1 := 5e_1 - 7e_2 + e_3 \quad \text{y} \quad \omega_2 := 4e_1 + e_2 + 3e_3.$$

Por tanto, una ecuación implícita de Y es

$$0 = \det \begin{pmatrix} \mathtt{x}_1 - 1 & 5 & 4 \\ \mathtt{x}_2 - 1 & -7 & 1 \\ \mathtt{x}_3 + 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 22(1-\mathtt{x}_1) + 11(1-\mathtt{x}_2) + 33(1+\mathtt{x}_3).$$

Dividiendo por 11 obtenemos finalmente $Y := \{2\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - 3\mathtt{x}_3 = 6\}$. □

Número II.4 Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos de un plano afín $\mathbb{A}$ tales que no existen tres de ellos alineados. Se llama *cuadrilátero* de vértices consecutivos estos cuatro puntos a la unión de los segmentos P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 y P_4P_1. Demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios del cuadrilátero de vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 es un paralelogramo.

Solución. Denotamos $P_i := (2a_i, 2b_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ las coordenadas de los vértices consecutivos de un cuadrilátero $\mathcal{C}$ respecto de cierta referencia cartesiana de $\mathbb{A}$. Pongamos por comodidad $P_5 := P_1$ y $P_6 := P_2$. Vimos en el Ejemplo **??** que las coordenadas del punto medio M_i del segmento de extremos P_i y P_{i+1} son $M_i = (a_i + a_{i+1}, b_i + b_{i+1})$. En particular, $\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = (a_{i+2} - a_i, b_{i+2} - b_i)$ luego

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1) \quad ; \quad \overrightarrow{M_3M_4} = (a_1 - a_3, b_1 - b_3)$$
$$\overrightarrow{M_2M_3} = (a_4 - a_2, b_4 - b_2) \quad ; \quad \overrightarrow{M_4M_1} = (a_2 - a_4, b_2 - b_4).$$

Así, $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_3M_4}$ y $\overrightarrow{M_2M_3} = -\overrightarrow{M_4M_1}$. Esto prueba que el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados de $\mathcal{C}$ es un paralelogramo. $\square$

Número II.5 Sean X e Y dos rectas afines coplanarias que se cortan, y sean dos ternas de puntos $A_1, A_2, A_3 \in X$ y $B_1, B_2, B_3 \in Y$. Probar que si $V(A_1, B_2)||V(A_2, B_3)$ y $V(A_2, B_1)||V(A_3, B_2)$, entonces $V(A_1, B_1)||V(A_3, B_3)$.

Solución. Sea $O := X \cap Y$ y consideramos en el plano afín que contiene a ambas rectas la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; u_1 := \overrightarrow{OA_1}, u_2 = \overrightarrow{OB_1}\}$. Las coordenadas respecto de $\mathcal{R}_c$ de los puntos dados son

$$A_1 = (1, 0), \quad A_2 = (a, 0), \quad A_3 = (b, 0), \quad B_1 = (0, 1), \quad B_2 = (0, c) \quad \text{y} \quad B_3 = (0, d)$$

para ciertos escalares a, b, c, d, por lo que

$$\overrightarrow{A_1B_2} = -u_1 + cu_2, \ \overrightarrow{A_2B_3} = -au_1 + du_2, \ \overrightarrow{A_2B_1} = -au_1 + u_2, \ \overrightarrow{A_3B_2} = -bu_1 + cu_2.$$

Como los pares de vectores $\{\overrightarrow{A_1B_2}, \overrightarrow{A_2B_3}\}$ y $\{\overrightarrow{A_2B_1}, \overrightarrow{A_3B_2}\}$ son linealmente dependientes,

$$0 = \det\begin{pmatrix} -1 & -a \\ c & d \end{pmatrix} = ac - d \quad \text{y} \quad 0 = \det\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & c \end{pmatrix} = b - ac,$$

esto es, $b = ac = d$. Así,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = -u_1 + u_2 \quad \text{y} \quad \overrightarrow{A_3B_3} = -bu_1 + du_2 = b(-u_1 + u_2) = b\overrightarrow{A_1B_1},$$

luego $V(A_1, B_1)||V(A_3, B_3)$. $\square$

Número II.6 Sea $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x^3 - 3x^2 + x - 2\}$. Probar que las rectas que cortan a Γ en tres puntos, tales que uno de ellos es el punto medio del segmento que tiene por extremos a los otros dos, pasan por un punto fijo. Hallar las coordenadas de dicho punto.

Solución. Las rectas verticales cortan a Γ en un único punto, así que las rectas del enunciado no son verticales, por lo que una cualquiera de ellas tiene por ecuación $L := \{\mathtt{y} = m\mathtt{x} + n\}$, para ciertos números reales m y n. Las abscisas x_1, x_2 y x_3 de los puntos de corte de Γ y L son las raíces del polinomio de tercer grado que resulta al eliminar $\mathtt{y}$ en el sistema de ecuciones

$$\begin{cases} \mathtt{y} = 2\mathtt{x}^3 - 3\mathtt{x}^2 + \mathtt{x} - 2 \\ \mathtt{y} = m\mathtt{x} + n \end{cases}$$

es decir, del polinomio $2\mathtt{x}^3 - 3\mathtt{x}^2 + (1 - m)\mathtt{x} - (2 + n)$. En consecuencia,

$$2\mathtt{x}^3 - 3\mathtt{x}^2 + (1 - m)\mathtt{x} - (2 + n) = 2(\mathtt{x} - x_1)(\mathtt{x} - x_2)(\mathtt{x} - x_3).$$

En particular, los coeficientes que multiplican a $\mathtt{x}^2$ en ambos polinomios coinciden, es decir, $3 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$. Además, como uno de los puntos de corte, digamos $P_2 := (x_2, y_2)$, es punto medio del segmento que tiene a los otros dos por extremos, x_2 es media aritmética de las otras dos abscisas, o sea $2x_2 = x_1 + x_3$, y por tanto $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, luego

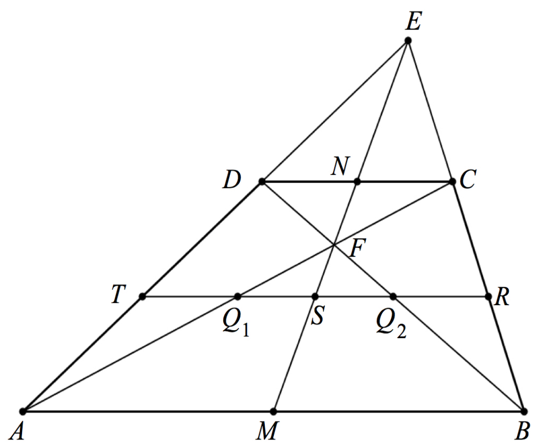
$$3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 6x_2,$$

es decir, $x_2 = \frac{1}{2}$. Como $P_2 \in \Gamma$, se tiene $y_2 = 2x_2^3 - 3x_2^2 + x_2 - 2 = -2$. En conclusión, todas las rectas del enunciado pasan por el punto $P_2 := (\frac{1}{2}, -2)$. $\square$

Número II.7 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano afín $\mathbb{R}^2$ que cumplen que los segmentos AB y CD que unen A con B y C con D, respectivamente, son bases de un trapecio.

(i) Probar que la recta que une el punto E en que se cortan $V(A, D)$ y $V(B, C)$ con el punto F de intersección de las diagonales del trapecio pasa por los puntos medios de las bases.

(ii) Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los pares de lados opuestos del trapecio se cortan en el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



Solución. (i) Sean M y N, respectivamente, los puntos medios de las bases AB y CD, y elegimos la referencia cartesiana $\mathcal{R} := \{A; u := \overrightarrow{AM}, v := \overrightarrow{AD}\}$ de $\mathbb{R}^2$ respecto del que las coordenadas de algunos de los puntos del enunciado son

$$A = (0, 0), \quad M = (1, 0), \quad B = (2, 0) \quad \text{y} \quad D = (0, 1).$$

Calculamos a continuación las coordenadas respecto de $\mathcal{R}_c$ de los puntos C, N, E y F. Los vectores $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{AM}$ son proporcionales, luego existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AM}$, mientras que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, luego

$$C = D + \overrightarrow{DC} = D + \lambda\overrightarrow{AM} = (\lambda, 1) \quad \text{y} \quad N = D + \overrightarrow{DN} = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \Big(\frac{\lambda}{2}, 1\Big).$$

Por estar E alineado con A y D, cuyas abscisas son nulas, también es nula la abscisa de E, y vamos a calcular su ordenada μ. Los puntos B, C y E están alineados, por lo que los vectores $\overrightarrow{EC} = \lambda u + (1-\mu)v$ y $\overrightarrow{EB} = 2u - \mu v$ son proporcionales, o sea,

$$0 = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1-\mu & -\mu \end{pmatrix} = (2-\lambda)\mu - 2, \quad \text{esto es,} \quad E = \Big(0, \frac{2}{2-\lambda}\Big).$$

Por otro lado, el punto de intersección $F := (s, t)$ de las diagonales AC y BD está alineado con A y C y también con B y D. Por lo primero, los vectores $\overrightarrow{AC} = \lambda u + v$ y $\overrightarrow{AF} = su + tv$ son proporcionales, es decir, $s = \lambda t$, y así $F = (\lambda t, t)$.

También son proporcionales $\overrightarrow{DB} = 2u - v$ y $\overrightarrow{DF} = \lambda tu + (t-1)v$, o sea,

$$0 = \det\begin{pmatrix} 2 & \lambda t \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} = (2+\lambda)t - 2,$$

así que $F = (\frac{2\lambda}{\lambda+2}, \frac{2}{\lambda+2})$.

Para completar la solución de este apartado hemos de comprobar que los puntos E y F cuyas coordenadas acabamos de calcular pertenecen a la recta L que une M con N. Ahora bien, el punto P cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}_c$ son $P := (x, y)$ pertenece a L si y sólo si los vectores

$$\overrightarrow{MP} = (x-1)u + yv \quad \text{y} \quad \overrightarrow{NP} = (x - \tfrac{\lambda}{2})u + (y-1)v$$

tienen igual dirección, es decir,

$$0 = \det \begin{pmatrix} x-1 & x-\frac{\lambda}{2} \\ y & y-1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\lambda - 2}{2} \right) y - x + 1,$$

y basta comprobar que los puntos $E = \left(0, \frac{2}{2-\lambda}\right)$ y $F = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+2}, \frac{2}{\lambda+2}\right)$ satisfacen esta ecuación, lo que es inmediato.

(ii) Las coordenadas respecto de $\mathcal{R}_c$ del punto medio Q_1 de la diagonal AC son $Q_1 = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y las del punto medio Q_2 de la diagonal BD son $Q_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, luego las del punto medio S del segmento de extremos Q_1 y Q_2 son $S = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \left(\frac{\lambda+2}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Se trata de probar que M, N y S están alineados y que también lo están T, R y S, donde T es el punto medio del segmento de extremos A y D y R es el punto medio del segmento de extremos B y C.

Para lo primero basta observar que $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) u + v$ y $\overrightarrow{MS} = \left(\frac{\lambda-2}{4}\right) u + \frac{1}{2} v$, de donde $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MS}$ y en particular M, N y S están alineados.

Para lo segundo calculamos las coordenadas de T y R, que son

$$T = \frac{1}{2}(A + D) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{2}(B + C) = \left(1 + \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Como los puntos R, S y T comparten la segunda coordenada, que es $\frac{1}{2}$, también están alineados. $\square$

Número II.8 Sea $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$. Hallar ecuaciones implícitas respecto de $\mathscr{R}$ de los lados y las diagonales del cuadrilátero de vértices consecutivos P_0, P_1, P_2 y P_3.

Solución. Las coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ de los vértices del cuadrilátero son:

$$P_0 := [1:0:0], \quad P_1 := [0:1:0], \quad P_2 := [0:0:1] \quad \text{y} \quad P_3 := [1:1:1].$$

Por inspección directa obtenemos las ecuaciones de los lados:

$$\mathtt{V}(P_0, P_1) = \{\mathtt{x}_2 = 0\}, \quad \mathtt{V}(P_1, P_2) = \{\mathtt{x}_0 = 0\},$$
$$\mathtt{V}(P_2, P_3) = \{\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathtt{V}(P_3, P_0) = \{\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 0\}$$

y las de las diagonales:

$$\mathtt{V}(P_0, P_2) = \{\mathtt{x}_1 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathtt{V}(P_1, P_3) = \{\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 = 0\}.$$

□

Número II.9 Sean $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ y $A \in \mathbb{P}^2$ el punto cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ son $A := [0:1:1]$. Se traza por A una recta variable L que corta en M a la recta $\mathtt{V}(P_0, P_2)$ y en N a la recta $\mathtt{V}(P_0, P_1)$. Se define $P := \mathtt{V}(P_2, N) \cap \mathtt{V}(P_0, A)$. Demostrar que todas las rectas $\mathtt{V}(M, P)$ pasan por un punto fijo y calcularlo.

Solución. Las coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ de los puntos P_0, P_1 y P_2 son $P_0 = [1:0:0]$, $P_1 = [0:1:0]$ y $P_2 = [0:0:1]$, por lo que

$$\mathtt{V}P_0, P_1) = \{\mathtt{x}_2 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathtt{V}(P_0, P_2) = \{\mathtt{x}_1 = 0\}.$$

Como el punto A es intersección de las rectas $\{\mathtt{x}_0 = 0\}$ y $\{\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 0\}$ la recta variable L tiene por ecuación $\mathtt{x}_0 + a(\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2) = 0$ para $a \in \mathbb{K}$ (estamos olvidando la recta $\{\mathtt{x}_1 = \mathtt{x}_2\}$, pero esto no resta generalidad a la solución). En consecuencia,

$$M := L \cap \mathtt{V}(P_0, P_2) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & \mathtt{x}_1 & & & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & + & a\mathtt{x}_1 & - & a\mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \quad M = [a:0:1].$$

Análogamente obtenemos

$$N := L \cap \mathtt{V}(P_0, P_1) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & \mathtt{x}_2 & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & + & a\mathtt{x}_1 & - & a\mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right. \rightsquigarrow \quad N = [a:-1:0].$$

Sea $\alpha_0\mathtt{x}_0 + \alpha_1\mathtt{x}_1 + \alpha_2\mathtt{x}_2 = 0$ una ecuación de la recta $\mathtt{V}(P_2, N)$. Como pasa por P_2 resulta que $\alpha_2 = 0$, mientras que por pasar por N se tiene $a\alpha_0 = \alpha_1$, luego una ecuación implícita de $\mathtt{V}(P_2, N)$ es $\alpha_0\mathtt{x}_0 + a\alpha_0\mathtt{x}_1 = 0$, es decir, $\mathtt{x}_0 + a\mathtt{x}_1 = 0$. Por otro lado, si $\beta_0\mathtt{x}_0 + \beta_1\mathtt{x}_1 + \beta_2\mathtt{x}_2 = 0$ es una ecuación de la recta $\mathtt{V}(P_0, A)$ se tiene $\beta_0 = 0$ y $\beta_1 + \beta_2 = 0$, luego una ecuación implícita de $\mathtt{V}(P_0, A)$ es $\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 0$. Así,

$$P = \mathtt{V}(P_2, N) \cap \mathtt{V}(P_0, A) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathtt{x}_0 & + & a\mathtt{x}_1 & & & = & 0 \\ & & \mathtt{x}_1 & - & \mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

es decir, $P = [-a:1:1]$. Sea $\gamma_0\mathtt{x}_0 + \gamma_1\mathtt{x}_1 + \gamma_2\mathtt{x}_2 = 0$ una ecuación de la recta $\mathtt{V}(M, P)$. Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a\gamma_0 & & & + & \gamma_2 & = & 0 \\ -a\gamma_0 & + & \gamma_1 & + & \gamma_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

es decir, $\gamma_2 = -a\gamma_0$ y $\gamma_1 = a\gamma_0 - \gamma_2 = 2a\gamma_0$. Tomando $\gamma_0 = 1$ obtenemos una ecuación implícita de $\mathtt{V}(M, P) : \mathtt{x}_0 + 2a\mathtt{x}_1 - a\mathtt{x}_2 = 0$, y con independencia del valor de a el punto $Q := [0:1:2]$ satisface esta ecuación, luego es el punto por el que pasan todas las rectas $\mathtt{V}(M, P)$ del enunciado.

□

Número II.10 Hallar ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{P}^3$ que corta a las rectas L_1 y L_2 del espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones implícitas

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \mathtt{x}_0 & - & \mathtt{x}_1 & + & \mathtt{x}_2 & - & \mathtt{x}_3 & = & 0 \\ \mathtt{x}_0 & + & 2\mathtt{x}_1 & - & 2\mathtt{x}_2 & + & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \mathtt{x}_0 & + & 2\mathtt{x}_1 & - & 3\mathtt{x}_2 & + & \mathtt{x}_3 & = & 0 \\ 2\mathtt{x}_0 & & & & & - & \mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

y pasa por el punto $P := [0:1:0:1]$.

Solución. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ el plano de ecuación

$$H_1 := \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 + \lambda(\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3) = 0$$

contiene a la recta L_1. De igual modo, para cada $\mu \in \mathbb{K}$ el plano de ecuación

$$H_2 := \mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 + \mu(2\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_3) = 0$$

contiene a la recta L_2. En particular, la recta $H_1 \cap H_2$ contiene a los puntos $L \cap L_1$ y $L \cap L_2$, luego $L \subset H_1 \cap H_2$, sean quienes sean λ y μ y, como $P \in L$, deben cumplirse las igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -2 & + & 4\lambda & = & 0 \\ 3 & - & \mu & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mu = 3,$$

luego $H_1 := \{\mathtt{x}_0 = 0\}$ y $H_2 := \{7\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 - 2\mathtt{x}_3 = 0\}$, así que

$$L := \left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathtt{x}_0 & & & & & = & 0 \\ & 2\mathtt{x}_1 & - & 3\mathtt{x}_2 & - & 2\mathtt{x}_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$\square$

Número II.11 Sean $a \in \mathbb{K}$ y los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$:

$$P_1 := [1:2:-1:1], \quad P_2 := [1:-1:2:-1], \quad P_3 := [3:0:1:1]$$

y $Q_a := [-1:1:0:a]$.
(i) ¿Para qué valores de a se cortan las rectas $L := \mathtt{V}(P_1, P_2)$ y $L_a := \mathtt{V}(P_3, Q_a)$?
(ii) Hallar ecuaciones implícitas de $L + L_a$ para cada valor de a.

Solución. (i) Consideramos los vectores

$$u_1 := (1,2,-1,1), \quad u_2 := (1,-1,2,-1), \quad u_3 := (3,0,1,1) \quad \text{y} \quad v_a := (-1,1,0,a)$$

de $\mathbb{K}^4$ que cumplen $\pi(u_i) = P_i$ y $\pi(v_a) = Q_a$, donde $\pi : \mathbb{K}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3$, $u \mapsto [u]$ es la proyección canónica. Recordemos que L corta a L_a si y sólo si $\dim(L \cap L_a) \geq 0$, lo que equivale a que $\dim(\widehat{L \cap L_a}) \geq 1$. Como $\widehat{L \cap L_a} = \widehat{L} \cap \widehat{L_a}$ se trata de hallar los valores de a para los que

$$\dim(L[u_1, u_2] \cap L[u_3, v_a]) = \dim(\widehat{L} \cap \widehat{L_a}) \geq 1.$$

Obsérvese que los pares de vectores $\{u_1, u_2\}$ y $\{u_3, v_a\}$ son linealmente independientes sea cual sea el valor de a, por lo que

$$\dim(\widehat{L}) = \dim(L[u_1, u_2]) = 2 \quad \text{y} \quad \dim(\widehat{L_a}) = \dim(L[u_3, v_a]) = 2.$$

Por la fórmula de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(L[u_1, u_2, u_3, v_a]) &= \dim(\widehat{L} + \widehat{L_a}) \\ &= \dim(\widehat{L}) + \dim(\widehat{L_a}) - \dim(\widehat{L} \cap \widehat{L_a}) = 4 - \dim(\widehat{L} \cap \widehat{L_a}), \end{aligned}$$

luego $\dim(\widehat{L}\cap\widehat{L_a})\geq 1$ si y sólo si $\dim(L[u_1,u_2,u_3,v_a])\leq 4-1=3$, o sea,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & a\end{pmatrix}=0 \quad\rightsquigarrow\quad a=-1.$$

(ii) Si $a\neq -1$ se tiene $\dim(\widehat{L\cap L_a})=0$, y por tanto $L+L_a=\mathbb{P}^3$ ya que

$$\dim(L+L_a)=\dim(\widehat{L+L_a})-1=\dim(\widehat{L})+\dim(\widehat{L_a})-1-\dim(\widehat{L\cap L_a})=4-1=3.$$

Por otro lado, si $a=-1$ se tiene $\widehat{L}+\widehat{L_a}=L[u_1,u_2,u_3]$, por lo que una ecuación implícita de $\widehat{L}+\widehat{L_a}$, y por tanto de $L+L_a$, es

$$\det\begin{pmatrix} \mathtt{x}_0 & 1 & 1 & 3\\ \mathtt{x}_1 & 2 & -1 & 0\\ \mathtt{x}_2 & -1 & 2 & 1\\ \mathtt{x}_3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=0 \quad\rightsquigarrow\quad 2\mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1-3\mathtt{x}_2-3\mathtt{x}_3=0.$$

□

Número II.12 ¿Es el conjunto $M:=\{[x:y:z]\in\mathbb{P}^2 : x^2+y^2-z^2=0\}$ una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^2$?

Solución. Tanto $P_0:=[1:0:1]$ como $P_1:=[0:1:1]$ pertenecen a M, luego si M fuese subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^2$ contendría a la recta proyectiva $\mathtt{V}(P_0,P_1)$ que pasa por $P_0:=[1:0:1]$ y $P_1:=[0:1:1]$, por ser ésta la menor subvariedad proyectiva que contiene a ambos puntos. Como P_0 y P_1 pertenecen a la recta de ecuación $\mathtt{x}_0+\mathtt{x}_1-\mathtt{x}_2=0$, ésta es la recta $\mathtt{V}(P_0,P_1)$. Así $[1:2:3]\in\mathtt{V}(P_0,P_1)\subset M$, que es falso. En consecuencia, M no es subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^2$. □

Número II.13 En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^4$ se consideran los puntos

$$P_1:=[1:0:-1:0:1],\quad P_2:=[0:1:0:1:-1]\quad\text{y}\quad P_3:=[2:2:-2:1:2],$$

y denotamos $X_1:=\mathtt{V}(P_1,P_2,P_3)$ a la menor subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^4$ que los contiene. Sea X_2 la subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^4$ que tiene a

$$X_2:\begin{cases}\mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_4=0\\ 2\mathtt{x}_0+\mathtt{x}_2-\mathtt{x}_3=0\end{cases}$$

por ecuaciones implícitas respecto de la referencia estándar. Encontrar ecuaciones implícitas de X_1 respecto de la referencia estándar y calcular la dimensión de X_1, X_1+X_2 y $X_1\cap X_2$.

Solución. Unas ecuaciones implícitas de X_1 respecto de la referencia estándar son unas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar del subespacio vectorial $\widehat{X_1}$ de $\mathbb{K}^5$. Consideramos los vectores

$$u_1:=(1,0,-1,0,1),\quad u_2:=(0,1,0,1,-1)\quad\text{y}\quad u_3:=(2,2,-2,1,2)$$

de $\mathbb{K}^5$, que generan $\widehat{X_1}$ y, como se comprueba muy fácilmente, son linealmente independientes. Por ello, el vector de coordenadas $(\mathtt{x}_0,\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2,\mathtt{x}_3,\mathtt{x}_4)\in\mathbb{K}^5$ pertenece a $\widehat{X_1}$ si y sólo si

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathtt{x}_0 & 1 & 0 & 2\\ \mathtt{x}_1 & 0 & 1 & 2\\ \mathtt{x}_2 & -1 & 0 & -2\\ \mathtt{x}_3 & 0 & 1 & 1\\ \mathtt{x}_4 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=3$$

o equivalentemente,

$$\widehat{X_1}:\begin{cases}\mathtt{x}_0+\mathtt{x}_2=0\\ -\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_2+2\mathtt{x}_3+\mathtt{x}_4=0\end{cases}$$

Estas son por tanto unas ecuaciones implícitas de X_1, de las que se deduce que

$$\dim(X_1) = \dim(\widehat{X_1}) - 1 = 5 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 = 5 - 2 - 1 = 2.$$

Por otro lado, unas ecuaciones implícitas de $\widehat{X_1 \cap X_2} = \widehat{X_1} \cap \widehat{X_2}$ son

$$\widehat{X_1} \cap \widehat{X_2} : \begin{cases} \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 = 0 \\ -\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_4 = 0 \\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_4 = 0 \\ 2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 0 \end{cases}$$

por lo que

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim(\widehat{X_1} \cap \widehat{X_2}) - 1 = 5 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 1 = 5 - 3 - 1 = 1.$$

Calculamos por último la dimensión de $X_1 + X_2$. Para ello observamos antes que a partir de las ecuaciones implícitas de X_2 se tiene

$$\dim(X_2) = \dim(\widehat{X_2}) - 1 = 5 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 1 = 5 - 2 - 1 = 2,$$

y por la fórmula de Grasmann,

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim(X_1) + \dim(X_2) - \dim(X_1 \cap X_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

□

Número II.14 (i) Sean L_1 y L_2 dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}^3$ y sea $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (L_1 \cup L_2)$. Demostrar que existe una única recta $L \subset \mathbb{P}^3$ que contiene a P y corta a L_1 y a L_2.

(ii) Obtener ecuaciones implícitas de L en el caso en que $P := [0 : 1 : 0 : 1]$,

$$L_1 : \begin{cases} \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3 = 0 \\ 2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_3 = 0 \\ 2\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Solución. Las subvariedades proyectivas $Y_1 := L_1 + \{P\}$ e $Y_2 := L_2 + \{P\}$ tienen dimensión 2 pues, por la fórmula de Grassmann, y puesto que $\dim(\{P\} \cap L_i) = -1$ para $i = 1, 2$ ya que $P \notin L_i$,

$$\dim(Y_i) = \dim(L_i + \{P\}) = \dim(L_i) + \dim(\{P\}) - \dim(\{P\} \cap L_i) = 1 + 0 - (-1) = 2.$$

Además $Y_1 \neq Y_2$. En caso contrario $Y_1 = Y_2$ sería un plano proyectivo que contiene a las rectas L_1 y L_2, luego $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, contra la hipótesis. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 > \dim(Y_1 \cap Y_2) &= \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 + Y_2) \\ &\geq \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(\mathbb{P}^3) = 2 + 2 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto $L := Y_1 \cap Y_2$ es una recta proyectiva que contiene al punto P, y corta a L_1 pues son coplanarias ya que el plano Y_1 las contiene, y corta a L_2 porque L y L_2 están contenidas en el plano Y_2. Esto prueba la parte existencial del enunciado. Para probar la unicidad, supongamos que Z es una recta que contiene a P y corta tanto a L_1 como a L_2. Sean $\{P_1\} := Z \cap L_1$ y $\{P_2\} := Z \cap L_2$. La recta Z pasa por los puntos P_1 y P_2, que son distintos porque $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, y distintos de P, porque $P \notin L_i$ para $i = 1, 2$. Así,

$$Z = \mathtt{V}(P_1, P) \subset L_1 + \{P\} = Y_1 \quad \text{y} \quad Z = \mathtt{V}(P_2, P) \subset L_2 + \{P\} = Y_2,$$

por lo que $Z \subset Y_1 \cap Y_2 = L$ y, como Z y L son rectas, $L = Z$.

(ii) Efectuamos los cálculos que sugiere la solución de apartado (i). Calcularemos ecuaciones implícitas de Y_1 e Y_2, cuya concatenación proporciona ecuaciones implícitas de la recta L. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ el plano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación

$$\alpha(\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3) + \beta(2\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1) = 0$$

contiene a la recta L_1 y elegimos α y β para que pase por el punto P:

$$0 = \alpha(0 - 0 + 2) + \beta(0 + 1) = 2\alpha + \beta \quad \rightsquigarrow \quad \beta = -2\alpha,$$

luego tomando $\alpha = -1$ se tiene $\beta = 2$ por lo que una ecuación de Y_1 es

$$Y_1 : 3\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - 2\mathtt{x}_3 = 0.$$

En cuanto a Y_2 observamos que para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ el plano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación

$$\lambda(\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_3) + \mu(2\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3) = 0$$

contiene a la recta L_2 y elegimos λ y μ para que pase por el punto P:

$$0 = \lambda(0 + 1) + \mu(2 - 0 + 1) = \lambda + 3\mu \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = -3\mu.$$

Tomamos $\mu = -1$, con lo que $\lambda = 3$ y una ecuación de Y_2 es

$$Y_2 : 3\mathtt{x}_0 - 2\mathtt{x}_1 + 3\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_3 = 0.$$

Por tanto la recta buscada es

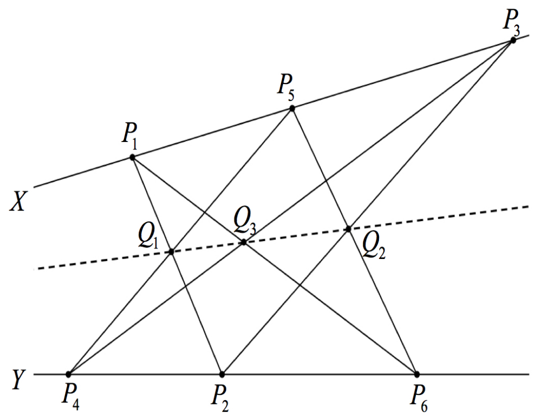
$$L := \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 3\mathtt{x}_0 & + & 2\mathtt{x}_1 & + & \mathtt{x}_2 & - & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \\ 3\mathtt{x}_0 & - & 2\mathtt{x}_1 & + & 3\mathtt{x}_2 & + & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

que se puede reescribir sumando y restando estas ecuaciones, o sea,

$$L := \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & 2\mathtt{x}_1 & - & \mathtt{x}_2 & - & 2\mathtt{x}_3 & = & 0 \\ 3\mathtt{x}_0 & & & + & 2\mathtt{x}_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$\square$

Número II.15 (Teorema de Pappus) Sean X e Y dos rectas del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y $O := X \cap Y$. Sean P_1, P_3 y P_5 tres puntos distintos en X y P_2, P_4 y P_6 tres puntos distintos en Y, todos ellos distintos de O. Para $i = 1, \ldots, 5$ sea $Z_i := \mathtt{V}(P_i, P_{i+1})$ la recta que pasa por P_i y P_{i+1}, y sea $Z_6 := \mathtt{V}(P_6, P_1)$. Demostrar que los puntos $Q_1 := Z_1 \cap Z_4$, $Q_2 := Z_2 \cap Z_5$ y $Q_3 := Z_3 \cap Z_6$ están alineados.



Solución. Podemos tomar la cuaterna $\mathscr{R} := \{P_1, P_2, P_3; P_4\}$ como referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2$ ya que tres cualesquiera de estos cuatro puntos no están alineados. Sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ son, por tanto,

$$P_1 := [1:0:0], \quad P_2 := [0:1:0], \quad P_3 := [0:0:1] \quad \text{y} \quad P_4 := [1:1:1].$$

Así, unas ecuaciones implícitas de las rectas X e Y respecto de $\mathscr{R}$ son $X = \{\mathtt{x}_1 = 0\}$ e $Y = \{\mathtt{x}_0 = \mathtt{x}_2\}$, y en consecuencia $O = X \cap Y = [1:0:1]$. Como $P_5 \in X \setminus \{O, P_1, P_3\}$ existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tal que $P_5 = [1:0:a]$. Razonando de igual modo se deduce que existe $b \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tal que $P_6 = [1:b:1]$. La tercera coordenada de P_1 y P_2 es nula, luego $Z_1 = \{\mathtt{x}_2 = 0\}$ y si una ecuación de Z_4 es $\alpha_0\mathtt{x}_0 + \alpha_1\mathtt{x}_1 + \alpha_2\mathtt{x}_2 = 0$ calculamos los valores α_0, α_1 y α_2 imponiendo que P_4 y P_5 pertenecen a Z_4, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_0 & + & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_0 & & & + & a\alpha_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_0 = -a\alpha_2 \quad \text{y} \quad \alpha_1 = -(\alpha_0 + \alpha_2).$$

Tomando $\alpha_2 = -1$ se tiene $\alpha_0 = a$ y $\alpha_1 = 1 - a$, esto es, una ecuación implícita de Z_4 es $a\mathtt{x}_0 + (1 - a)\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_2 = 0$. En consecuencia,

$$Q_1 := Z_1 \cap Z_4 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & \mathtt{x}_2 & = & 0 \\ a\mathtt{x}_0 & + & (1-a)\mathtt{x}_1 & - & \mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad Q_1 = [a-1 : a : 0].$$

Por otro lado, la primera coordenada de P_2 y P_3 es nula, luego $Z_2 = \{\mathtt{x}_0 = 0\}$ y si una ecuación de Z_5 es $\beta_0\mathtt{x}_0 + \beta_1\mathtt{x}_1 + \beta_2\mathtt{x}_2 = 0$ calculamos los valores β_0, β_1 y β_2 imponiendo que P_5 y P_6 pertenecen a Z_5, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \beta_0 & + & & + & a\beta_2 & = & 0 \\ \beta_0 & + & b\beta_1 & + & \beta_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \beta_0 = -a\beta_2,$$

de donde $\beta_0 = ab$, $\beta_1 = 1 - a$ y $\beta_2 = -b$. Así, $ab\mathtt{x}_0 + (1-a)\mathtt{x}_1 - b\mathtt{x}_2 = 0$ es una ecuación implícita de Z_5. Esto implica que

$$Q_2 := Z_2 \cap Z_5 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathtt{x}_0 & & & & & = & 0 \\ ab\mathtt{x}_0 & + & (1-a)\mathtt{x}_1 & - & b\mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad Q_2 = [0 : b : 1-a].$$

Los puntos P_3 y P_4 cumplen que sus primeras coordenadas coinciden con la segunda, así que $Z_3 = \{\mathtt{x}_0 = \mathtt{x}_1\}$. Si una ecuación de Z_6 es $\gamma_0\mathtt{x}_0 + \gamma_1\mathtt{x}_1 + \gamma_2\mathtt{x}_2 = 0$ calculamos los valores γ_0, γ_1 y γ_2 imponiendo que P_6 y P_1 pertenecen a Z_6, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \gamma_0 & & & & & = & 0 \\ \gamma_0 & + & b\gamma_1 & + & \gamma_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad \gamma_0 = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_2 = -b\gamma_1.$$

Eligiendo $\gamma_1 = 1$ deducimos que $Z_6 = \{\mathtt{x}_1 - b\mathtt{x}_2 = 0\}$, por lo que

$$Q_3 := Z_3 \cap Z_6 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} \mathtt{x}_0 & - & \mathtt{x}_1 & & & = & 0 \\ & & \mathtt{x}_1 & - & b\mathtt{x}_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightsquigarrow \quad Q_3 = [b : b : 1].$$

Para terminar hay que demostrar que los puntos Q_1, Q_2 y Q_3 están alineados. Si $S := \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ se trata de probar que la dimensión de la menor subvariedad proyectiva $\mathtt{V}(S)$ que contiene a S es 1. Sean $\pi : \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2$ la proyección canónica y los vectores $u_1 := (a-1, a, 0)$, $u_2 := (0, b, 1-a)$ y $u_3 := (b, b, 1)$ de $\mathbb{K}^3$, que cumplen $\pi(u_i) = Q_i$ para $i = 1, 2, 3$. Vimos en el Lema **??** que $\mathtt{V}(S) = \mathbb{P}(L[u_1, u_2, u_3])$, luego

$$\dim(\mathtt{V}(S)) = \dim(L[u_1, u_2, u_3]) - 1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} - 1 = 1,$$

puesto que

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = a \neq 0.$$

$\square$