Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen Febrero (180 minutos): 6 de Septiembre de 2017

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1,25 puntos cada uno.

1. Consideramos los puntos $P_0 := [1:0:0], P_1 := [1:1:0], P_2 := [1:2:1], P_3 := [1:0:1] \in \mathbb{P}_2$ y consideramos el cuadrilátero $\mathcal{C}$ de vértices P_0, P_1, P_2, P_3.

(i) Determinar si los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_2$. En caso afirmativo calcular la matriz de cambio de referencia de la referencia proyectiva estándar a la referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$.

(ii) Calcular una recta L_1 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_1$ no tiene ninguno de sus lados paralelos. ¿Es única?

(iii) Calcular una recta L_2 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_2$ es un trapecio y no un rectánculo. ¿Es única?

(iv) Calcular una recta L_3 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_3$ es un paralelepípedo. ¿Es única?

2. Consideramos la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3, \ [\mathrm{x}_0 : \mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_3] \mapsto [-3\mathrm{x}_0 + 2\mathrm{x}_2 : \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 : -4\mathrm{x}_0 + 3\mathrm{x}_2 : -\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3]$$

(i) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f.

(ii) Calcular las rectas invariantes para f.

(iii) Consideramos el hiperplano $H_1 : \ \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$. Demostrar que la rectricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una homotecia, calcular su centro y su razón.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : \ \mathrm{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la rectricción $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una simetría, calcular su conjunto de puntos fijos y su dirección.

3. Consideramos la superficie cuádrica afín de $\mathbb{A} := \mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$\mathcal{Q} : \ -2\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 + 4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - 2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = 0.$$

Sea $\overline{\mathcal{Q}}$ la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_\infty$ su cónica de infinito.

(i) Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(ii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para esta cuádrica.