Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examen de Enero (180 minutos): 28 de Enero de 2018

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación (si no me lo habéis dado antes). Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la proyección cónica de centro la recta $L_1 := \{\mathtt{x}_0+\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_2 = 0, \mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_2-\mathtt{x}_3 = 0\}$ y base $L_2 := \{\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_2 = 0, \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0\}$.

(i) Calcular la matriz de π con respecto a la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}^3$.

(ii) Calcular una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^3$ con respecto a la que la matriz de π sea diagonal.

(iii) Consideramos el hiperplano $H:\ \mathtt{x}_0+2\mathtt{x}_1 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$. Demostrar que $\pi(H) \subset H$ y que la restricción $\rho := \pi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una proyección afín.

(iv) Consideramos el hiperplano $H':\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y sea $\Pi := H' \cap \mathbb{A}$. Calcular la imagen directa y la imagen inversa del hiperplano afín Π con respecto a ρ.

2. Consideramos el hiperplano $H_1:\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$, del que tomamos como modelo $\mathbb{A}_1:\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 1$. Sea $\tau : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la traslación de vector $v := (1, -1, 1, -1)$.

(i) Demostrar que la aplicación proyectiva

$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [-2\mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1-\mathtt{x}_2-\mathtt{x}_3 : \mathtt{x}_0+\mathtt{x}_2+\mathtt{x}_3 : -\mathtt{x}_0-\mathtt{x}_1-2\mathtt{x}_2-\mathtt{x}_3 : \mathtt{x}_0+\mathtt{x}_1+\mathtt{x}_2]$.

es la completación proyectiva de τ. *Nota: Se valorará positivamente la construcción de f a partir de τ.*

(ii) Calcular el conjunto de puntos fijos y los planos invariantes para f. ¿Qué tipo de homografía es f?

(iii) Demostrar que por cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ pasa al menos una recta invariante de f. ¿Existe algún punto por el que pase más de una? En caso afirmativo, ¿Cuántas rectas invariantes pasan por cada punto? Caracterizar las homografías obtenemos al restringir f a cada una de las rectas invariantes de f.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2:\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una transvección. Encontrar una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f tenga el mayor número de ceros posible.

3. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}}:\ 2\mathtt{x}_0^2 + 4\mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 - \mathtt{x}_3^2 + 6\mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 - 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 2\mathtt{x}_0\mathtt{x}_3 - 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(ii) Consideramos el espacio afin $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$ donde H es el hiperplano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0$. Consideramos la superficie cuádrica $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}$. Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $[0 : 1 : 0 : 1]$.

(iii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

Instrucciones adicionales: Aquellos que deseen optar a matrícula de honor deberán resolver correctamente los ejercicios 2 y 3 y en vez de resolver el ejercicio 1 deberán resolver correctamente el siguiente ejercicio.

Ejercicio para optar a MH: Teorema de Pascal. Demostrar el Teorema de Pascal usando únicamente los resultados que hemos visto en clase. *Sean P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 seis puntos situados en posición general. Demostrar que los puntos*

$$Q_1 := \mathtt{V}(P_1, P_2) \cap \mathtt{V}(P_4, P_5), \;\; Q_2 := \mathtt{V}(P_2, P_3) \cap \mathtt{V}(P_5, P_6) \;\; y \;\; Q_3 := \mathtt{V}(P_3, P_4) \cap \mathtt{V}(P_1, P_6)$$

están alineados si y sólo si los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 pertenecen a una cónica no degenerada.