Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen de Junio (180 minutos): 18 de Junio de 2018

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación (si no me lo habéis dado antes). Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Consideramos los puntos $P_0 := [2:1:1], P_1 := [1:2:1], P_2 := [1:1:2], P_3 := [0:-2:-2] \in \mathbb{P}_2$ y el cuadrilátero $\mathcal{C}$ de vértices P_0, P_1, P_2, P_3.

(i) Determinar si los puntos P_0, P_1, P_2, P_3 forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_2$. En caso afirmativo calcular la matriz de cambio de referencia de la referencia proyectiva estándar a la referencia proyectiva $\mathscr{R} := \{P_0, P_1, P_2; P_3\}$.

(ii) Calcular una ecuación de una recta L_1 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_1$ no tiene ningún par de lados paralelos. ¿Es única?

(iii) Calcular una recta L_2 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_2$ es un trapecio y no un rectángulo. ¿Es única?

(iv) Calcular una recta L_3 de $\mathbb{P}_2$ (que no pasa por ninguno de los puntos P_i) tal que $\mathcal{C}$ en el plano afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^2 \setminus L_3$ es un paralelogramo. ¿Es única?

2. Consideramos el hiperplano $H_1 : \ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$, del que tomamos como modelo $\mathbb{A}_1 : \ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_3 = 1$. Sea $h : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la homotecia de centro $C := (0, 1, -1, 1)$ y razón -2.

(i) Demostrar que la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,$$
$$[\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [2\mathtt{x}_0 : -3\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 - 3x_3 : 3\mathtt{x}_0 + 3\mathtt{x}_1 + 5\mathtt{x}_2 + 3\mathtt{x}_3 : -3\mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 - 3\mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3].$$

es la completación proyectiva de h. *Nota: Se valorará positivamente la construcción de f a partir de h.*

(ii) Calcular el conjunto de puntos fijos de f y los hiperplanos invariantes para f. ¿Qué tipo de homografía es f?

(iii) Demostrar que por cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ pasa al menos una recta invariante de f. ¿Existe algún punto por el que pase más de una? En caso afirmativo, ¿Cuántas rectas invariantes pasan por cada punto? Caracterizar las homografías obtenemos al restringir f a cada una de las rectas invariantes de f.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 : \ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la rectricción $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una dilatación.

3. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}} : \ \mathtt{x}_0\mathtt{x}_1 - \mathtt{x}_0\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_0\mathtt{x}_3 + \mathtt{x}_1^2 - \mathtt{x}_2^2 + \mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(ii) Consideramos el espacio afin $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$ donde H es el hiperplano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 = 0$. Consideramos la superficie cuádrica $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}$. Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada sin centro.

(iii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.