Nombre:		Calificación
Apellidos:		
DNI/Alias		
Titulación		

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Examen de Enero (180 minutos): 20 de Enero de 2020

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente este block con seis hojas con la solución del ejercicio. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré este block. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el alias con el que queráis que aparezca vuestra calificación (si no me lo habéis dado antes). Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles. Los apartados del ejercicio 1 valen 0,5 puntos cada uno. Los restantes apartados valen 1 punto cada uno.

1. Consideramos el hiperplano H_0 de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 0$ y el modelo del espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_0$ dado por la ecuación $\mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 1$. Sea $\rho : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la proyección paralela de base el plano $X := \{\mathtt{x}_0 = 0\} \cap \mathbb{A}$ y dirección $W := L[(1,1,1,1)]$. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ la completación proyectiva de ρ.

(i) Calcular una referencia cartesiana de $\mathbb{A}$ con respecto a la que la matriz de ρ sea diagonal.

(ii) Calcular la matriz de π con respecto a la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}^3$.

(iii) Calcular una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^3$ con respecto a la que la matriz de π sea diagonal.

(iv) Consideramos el hiperplano $H' :\ \mathtt{x}_0 + \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 = 0$ de $\mathbb{P}^3$. Calcular la imagen directa y la imagen inversa de H' con respecto a π.

2. Consideramos el hiperplano $H_1 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 0$ de $\mathbb{P}^3$ y el modelo del espacio afín $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H_1$ de ecuación $\mathbb{A}_1 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - \mathtt{x}_3 = 1$. Sea $h : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1$ la homotecia centro $[1 : 1 : 1 : 0]$ y razón -2.

(i) Demostrar que la aplicación proyectiva

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [\mathtt{x}_0 : \mathtt{x}_1 : \mathtt{x}_2 : \mathtt{x}_3] \mapsto [\mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 + 3\mathtt{x}_2 - 3\mathtt{x}_3 : 3\mathtt{x}_0 - 5\mathtt{x}_1 + 3\mathtt{x}_2 - 3\mathtt{x}_3 : 3\mathtt{x}_0 - 3\mathtt{x}_1 + \mathtt{x}_2 - 3\mathtt{x}_3 : -2\mathtt{x}_3].$$

es la completación proyectiva de h. *Nota: Se valorará positivamente la construcción de f a partir de h.*

(ii) Determinar el conjunto de puntos fijos y los planos invariantes para f. ¿Qué tipo de homografía es f? Justifica tu respuesta.

(iii) Demostrar que por cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ pasa al menos una recta invariante de f. Para cada punto $P \in \mathbb{P}^3$ calcular todas las rectas invariantes que pasan por él.

(iv) Consideramos el hiperplano $H_2 :\ \mathtt{x}_0 - \mathtt{x}_2 = 0$ y el espacio afín $\mathbb{A}_2 := \mathbb{P}^3 \setminus H_2$. Demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{A}_2} : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ es una dilatación. Encontrar explícitamente una referencia cartesiana de $\mathbb{A}_2$ respecto de la que la matriz de f sea diagonal.

3. Consideramos la superficie cuádrica proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuación:

$$\overline{\mathcal{Q}} :\ \mathtt{x}_1^2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_3 + 2\mathtt{x}_2^2 + 4\mathtt{x}_2\mathtt{x}_3 + 3\mathtt{x}_3^2 + 2\mathtt{x}_1\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_2\mathtt{x}_0 + 2\mathtt{x}_3\mathtt{x}_0 = 0.$$

(i) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbb{RP}^3$ respecto de la que la ecuación de $\overline{\mathcal{Q}}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\overline{\mathcal{Q}}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(ii) Consideramos el espacio afin $\mathbb{A} := \mathbb{P}^3 \setminus H$ donde H es el hiperplano de $\mathbb{P}^3$ de ecuación $\mathtt{x}_0 = 0$. Consideramos la superficie cuádrica $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}$. Demostrar que $\mathcal{Q}$ es una superficie cuádrica no degenerada con centro y demostrar que dicho centro es $[1 : -1 : 0 : 0]$.

(iii) Calcular una referencia cartesiana $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}$ y decidir si por cada punto de $\mathcal{Q}$ pasa alguna recta contenida en $\mathcal{Q}$. En caso afirmativo, ¿Cuántas pasan exactamente? Justifica tu respuesta.

(iv) Calcular una referencia proyectiva $\mathscr{R}'$ del hiperplano de infinito $\mathbb{A}_\infty$ respecto de la que la ecuación de $\mathcal{Q}_\infty$ es su ecuación reducida y calcular dicha ecuación reducida. Clasificar $\mathcal{Q}_\infty$. Comprobar que se cumple el teorema de Witt para la cuádrica $\mathcal{Q}$.

Instrucciones adicionales: Aquellos que deseen optar a matrícula de honor deberán resolver correctamente los ejercicios 1, 2 y 3 y además el siguiente ejercicio.

Ejercicio para optar a MH: Teorema de la mariposa. Demostrar el Teorema de la mariposa **usando únicamente** los resultados que hemos visto en clase. *Sean* $\mathcal{Q} \subset \mathbb{K}^2$ *una cónica afín no degenerada,* A *y* B *dos puntos en* $\mathcal{Q}$ *y* M *el punto medio del segmento de extremos* A *y* B*. Sean* P_1*,* P_2*,* P_3 *y* P_4 *cuatro puntos distintos en* $\mathcal{Q}$ *tales que* $M = V(\{P_1, P_3\}) \cap V(\{P_2, P_4\})$ *y sean* $X := V(\{P_1, P_2\}) \cap V(\{A, B\})$ *e* $Y := V(\{P_3, P_4\}) \cap V(\{A, B\})$*. Demostrar que* M *es el punto medio del segmento de extremos* X *e* Y*.*