MATEMÁTICAS BÁSICAS Cuarta entrega

1. Dado $n \geq 2$, se dice que un número complejo w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad si $w^n = 1$ y $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas de 1. Justifica que si w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad, entonces $\overline{w}$ también lo es. Determina la raíces cúbicas primitivas de 1.

2. Se define la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $T(z) = (z-1)(\overline{z} - i)$. Calcula para cada $z = x + yi \in \mathbb{C}$ la parte real y la parte imaginaria de $T(z)$. Describe $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } T(z) = 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } T(z) = 0\}$. Representa ambos conjuntos.

MATEMÁTICAS BÁSICAS Cuarta entrega

1. Dado $n \geq 2$, se dice que un número complejo w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad si $w^n = 1$ y $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas de 1. De las raíces quintas de 1, decide cuáles de ellas son primitivas. Justifica que para cualquier $n \geq 2$, el número complejo $\cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$ es una raíz n-ésima primitiva de 1.

2. Se define la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $T(z) = z(\overline{z} + i)$. Calcula $T^{-1}(\{0\})$. ¿Es T inyectiva? Para cada $z = x + yi \in \mathbb{C}$, calcula la parte real y la parte imaginaria de $T(z)$. Describe $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } T(z) = 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } T(z) = 0\}$. Representa ambos conjuntos y su intersección.

MATEMÁTICAS BÁSICAS Cuarta entrega

1. Dado $n \geq 2$, se dice que un número complejo w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad si $w^n = 1$ y $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas de 1. Si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de $a + bi \neq 0$ y w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad, prueba que $\{z, zw, zw^2, \ldots, zw^{n-1}\}$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas distintas de $a + bi$.

2. **Utiliza la expresión de un giro en el plano para números complejos**. Justifica que no existe ningún giro en el plano de centro el origen que transforme el punto $(-3, 2)$ en el punto $(2, 5)$. Deduce que tampoco existe un giro con centro el punto $(3, 5)$ que transforme el punto $(0, 7)$ en el punto $(5, 10)$. Prueba que existe un giro de centro el origen que transforma el punto $(4, 7)$ en el punto $(1, 8)$ y calcula la amplitud del ángulo de giro. Deduce que existe un giro con centro el punto $(2, 5)$ que transforma el punto $(6, 12)$ en el punto $(3, 13)$.

MATEMÁTICAS BÁSICAS Cuarta entrega

1. Dado $n \geq 2$, se dice que un número complejo w es una raíz n-ésima *primitiva* de la unidad si $w^n = 1$ y $\{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$ es el conjunto de las n raíces n-ésimas de 1. Sea z una raíz n-ésima de 1. Demuestra que si para algún número natural $k \leq n - 1$ se cumple que $z^k = 1$, entonces z no es una raíz n-ésima primitiva de 1. Determina las raíces sextas de 1 que no son primitivas.

2. Un triángulo equilátero de vértices $A = (3, 3)$, B y C tiene centro el punto $O = (1, 2)$. Calcula los otros dos vértices, utilizando la expresión de un giro en el plano para números complejos.