MATEMÁTICAS BÁSICAS Temas 1, 2 y 3, Grupos de mañana

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1. Escribe las siguientes proposiciones y sus negaciones con cuantificadores.
P: /Para cada par de enteros a, b no nulos existen enteros q, r tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$/.
Q: / Existe un número $p \in (0, 8)$ tal que $\cos(x) = \cos(x + kp)$ para cualquier número real x y cualquier número entero k/.
¿Es cierta **Q** o su negación?

2. Demuestra por inducción que para todo número natural n se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3$$

3. Sea $x \in \mathbb{R}$. Prueba que si $x > 0$, entonces

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}\,.$$

¿Es cierto que si $\dfrac{x}{x+1} \geq \dfrac{x+1}{x+2}$, entonces $x \leq 0$?

4. Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que si $A \cap B \subset C$ y $x \in B$, entonces $x \notin A \setminus C$. [Recuerda que $X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$].

5. Se define en $\mathbb{R}$ la relación $x\mathcal{R}y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$.

(1) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotamos $[x]$ la clase de x para esta relación.

(2) Calcula la intersección entre la clase del 1 y la clase de π. ¿Es cierto que si $x \notin \mathbb{Q}$ entonces $[x] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$?

(3) Prueba que para cada número real x existe un único $y \in [0, 1)$ tal que $x\mathcal{R}y$.

(4) Encuentra una biyección f entre el conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ y el intervalo $[0, 1)$ y calcula la imagen por f del subconjunto $A \subset \mathbb{R}/\mathcal{R}$ definido como

$$A = \{[q] : \ q \in \mathbb{Q}\}\,.$$

MATEMÁTICAS BÁSICAS Temas 1, 2 y 3, Grupos de tarde

¡Justifica adecuadamente tu respuesta en cada apartado del examen!

1. a) Escribe la proposición **P** y su negación con cuantificadores. Justifica cuál de las dos es verdadera.
P: /Para cada número real b existe un número real $r > 0$ tal que $r^2 + 2|b|r < 1$ /.
b) Escribe la proposición **Q** y su negación con cuantificadores.
Q: /Algún número irracional x cumple que todas sus potencias $x^n, n \in \mathbb{Z}$ son números irracionales /.

2. Demuestra por el método de inducción o sus generalizaciones que si x es un número real positivo, $x + \dfrac{1}{x}$ es un número entero y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ es un número entero.

3. Sea $x \in \mathbb{R}$. Prueba que al menos uno de los dos números $\sqrt{3} + x$ o $\sqrt{3} - x$ es irracional.

4. Sean A, B y C conjuntos. Demuestra que $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$ si y solo si $B = C$.

5. Se considera en el conjunto de los números reales la relación dada por $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $\dfrac{x-y}{2\pi} \in \mathbb{Z}$.

(1) ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? ¿Cuáles son los elementos que pertenecen a la clase del 0? ¿Y a la clase de π? ¿Y a la del 15π?

(2) Encuentra un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ y una biyección $h : X \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$.

(3) Asignar a cada clase $[x] \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$ el número x, ¿define una aplicación $g : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$?

(4) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Determina si $f : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to C$, con $f([x]) = (\cos(x), \sin(x))$ es una aplicación. En caso afirmativo, ¿es biyectiva? [Recuerda que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ y $\mathrm{sen}(x + 2\pi) = \mathrm{sen}(x)$].