Conjuntos. Aplicaciones. Relaciones

Conjuntos

1. Considera el subconjunto A de números naturales formado por los múltiplos de 4 y el conjunto $B \subset \mathbb{N}$ de los números que terminan en 4. Comprueba que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Encuentra $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$. Si definimos $F = \{A, B, C\}$, ¿pertenece $\{1, 2, 3\}$ a F?

3. Supongamos que A, B y C son subconjuntos cualesquiera de un conjunto no vacío X. Demuestra que:

   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. [Compara con el ejercicio 8 de la primera hoja].

   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad$ y $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   d) $\overline{\overline{A}} = A$

4. Sean P, D, T, I y S, respectivamente, los conjuntos de números naturales primos, múltiplos de dos, múltiplos de tres, números impares y múltiplos de seis. Determina para cada par de ellos la intersección. ¿Cuál es el complementario de D y de P considerados como subconjuntos de los números naturales? Determina $\overline{P \cap T}$.

5. Llamamos T al conjunto de los triángulos, I al subconjunto de los triángulos isósceles, R al de los triángulos rectángulos, E al de los equiláteros y A al de triángulos con todos los ángulos agudos. Comprueba que

$$R \cap E = \varnothing, \quad R \cap I \neq \varnothing, \quad E \subset I, \quad I \setminus A \neq \varnothing.$$

6. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos:

   a) $\bigcup_{n=1}^{7} [\frac{1}{n}, 1] = [\frac{1}{7}, 1]$ y $\bigcap_{n=2}^{60} [\frac{1}{n}, 1] = [\frac{1}{2}, 1]$

   b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$, $\bigcup_{n \geq 2} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$.

Si X es un conjunto arbitrario, podemos considerar sus subconjuntos, es decir los conjuntos que están contenidos en X (el conjunto vacío $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto). Llamaremos ***partes de*** X al conjunto $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ de todos los subconjuntos de X. Por ejemplo, si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

7. Describe $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{1, 2, 3\}$. Describe $\mathcal{P}(B)$ si $B = \{1, \{2, 3\}\}$. Describe $\mathcal{P}(C)$ si $C = \{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$.

Ejercicios de reserva

8. En el ejercicio 4, determina $P \cup I$, $D \backslash T$, $T \backslash S$, $P \backslash S$, $\overline{P \cap T}$ y $\overline{T \cup I}$.

9. Se consideran los conjuntos $\mathbf{R}_1 = \{r : r$ es una recta del plano que pasa por el origen$\}$, $\mathbf{R}_2 = \{r : r$ es una recta del plano paralela al eje de abscisas$\}$ y $\mathbf{R}_3 = \{r : r$ es una recta del plano paralela al eje de ordenadas$\}$. Determina $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_3$.

10. Dados el conjunto A de los números naturales múltiplos de 5 y el conjunto B de los números naturales que terminan en 5 o en 0, demuestra que $A = B$.

Producto cartesiano de dos conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, el *producto cartesiano* $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados (m, n) tales que $m \in A$ y $n \in B$.

8. Considera los siguientes productos cartesianos: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ y $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Represéntalos gráficamente.

9. Considera los siguientes productos cartesianos: $[a, b] \times [c, d]$, $\mathbb{R} \times [c, d]$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1]$ y $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Represéntalos gráficamente.

Aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva. Funciones inversas

Sean A y B dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) f de A a B , que se denota $f : A \to B$, es una asignación, para cada $a \in A$, de un único elemento de B que denotaremos $f(a)$. El conjunto A se llama el *dominio* de la función f. La *imagen* de A por f (o bien el *recorrido* de f) es el conjunto C dado por los elementos $b \in B$ tales que existe algún elemento $a \in A$ que verifica $f(a) = b$. La imagen de f no tiene por qué ser todo el conjunto B. Si $A_1 \subset A$, se define $f(A_1) = \{f(a) : a \in A_1\}$. En particular, el recorrido C es el conjunto $f(A) \subset B$, con la notación precedente.

La aplicación f se llama ***inyectiva*** cuando para cada elemento $b \in B$ existe a lo sumo un elemento (es decir: uno o ninguno) $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Para ver que f es inyectiva, basta demostrar que si $a_1, a_2 \in A$ y $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$. Dado que $/A \Rightarrow B/$ es equivalente a /no-$B \Rightarrow$ no-A/, probar que f es inyectiva es demostrar que si $a_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Piensa en la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n - 1$. Si $n \neq m$ se cumple que $f(n) = n - 1 \neq m - 1 = f(m)$ y, por tanto, f es inyectiva. La función dada por $P(x) = x(x - 1)(x + 1)$ que tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es una función inyectiva, ya que existen números reales distintos, por ejemplo $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$, en los que P toma el mismo valor, ya que $P(0) = P(1) = 0$.

La aplicación f se llama ***sobreyectiva*** (o *aplicación sobre*) cuando para cada $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n + 2$ es sobreyectiva, dado que para cada $m \in \mathbb{Z}$ podemos encontrar $n = m - 2$ tal que $f(n) = n+2 = (m-2)+2 = m$. Sin embargo, la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ mediante $g(n) = n + 2$ no es sobreyectiva, dado que $g(n) = n + 2 \geq 1 + 2 = 3$ y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ ($m = 1$ o $m = 2$) tal que $g(n) \neq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La aplicación f se llama ***biyectiva*** (se dice que es una biyección) cuando es inyectiva y sobreyectiva.

10. En $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ consideramos la regla f que asigna a cada $x \in A$ el elemento o elementos $y \in \mathbb{R}$ tales que $y^2 = x$. ¿Es f una aplicación?

11. Razona si la asignación $x \mapsto \frac{1}{x}$ es una aplicación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. ¿Y asociar a cada número racional q su denominador?

12. Se consideran A, B dos conjuntos de números reales y $f : A \to B$ definida por $f(a) = |a|+1$, para todo $a \in A$. Estudia si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva en los siguientes casos:

    a) $A = B = \mathbb{R}$ b) $A = B = \mathbb{N}$

    c) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$ d) $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

13. Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ mediante $f(n) = n^2$. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Resuelve las mismas preguntas para $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = n^2$, si $n \in \mathbb{N}$.

14. Si $f : A \to B$ es una aplicación y C es el recorrido de f, justifica que la aplicación $g : A \to C$ dada por $g(a) = f(a)$, para $a \in A$, es sobre.

15. Considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = 3x + 2$. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Representa gráficamente esta función.

Si $f : A \to B$ es una aplicación y $C \subset B$, la ***preimagen*** de C respecto a f es el conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. Cuando $f : A \to B$ es una biyección, para todo $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y puede definirse la llamada ***función inversa***, $f^{-1} : B \to A$ asignando a cada b el único $a = f^{-1}(b)$ tal que $f(a) = b$.

16. Sean el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : A \to \mathbb{N}$ dada por $f(a) = \dfrac{a(a+1)}{2}$. Encuentra $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f(\{1, 2, 5\})$ y $f^{-1}(\{3, 5\})$.

17. Sea $g : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$. Encuentra $g^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}(\{-1\})$, $g^{-1}(\{-10\})$, $g^{-1}([8, 15])$ y $g^{-1}([0, 1])$.

18. Consideremos de nuevo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = 3x + 2$. Calcula su inversa. Determina los conjuntos $f(\mathbb{Z})$, $f^{-1}(\mathbb{Q})$ y $f^{-1}(\mathbb{N})$.

19. Considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Representa la función e indica cuál es su recorrido. ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Determina $f([3,5])$ y $f^{-1}([0,5])$.

20. Define funciones $f : [0,1] \to [0,3]$, $g : [0,1] \to [5,8]$ y $h : (0,1) \to (0,+\infty)$ que sean biyecciones. Determina las funciones inversas f^{-1}, g^{-1} y h^{-1}.

21. Demuestra que la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 1$ es biyectiva. Halla su aplicación inversa.

Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : E \to C$ dos aplicaciones. Definimos la *composición* de f y g como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : D & \to & C \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)), \end{array}$$

con dominio $D = \{x \in A \,|\, f(x) \in E\}$.

22. Determina los mayores conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ y $E \subset \mathbb{R}$ tales que $f : A \to B$ y $g : E \to C$, con

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

sean funciones. Además determina las funciones $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, incluyendo sus respectivos dominios.

23. Decide cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:

    a) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
    b) Si f es inyectiva y g es sobreyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.
    c) Si f es sobreyectiva y g es inyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.
    d) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
    e) Si f y g son sobreyectivas y la imagen de f es el dominio de g, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
    f) Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva entonces g es inyectiva.

Relaciones de un conjunto

Introduzcamos una *relación $\mathcal{R}$ entre los elementos de un conjunto A*: consideramos el producto cartesiano $A \times A$ y un subconjunto $S \subset A \times A$. Decimos que un elemento $m \in A$ está en relación $\mathcal{R}$ con otro $n \in A$, y lo denotamos $m\mathcal{R}n$, cuando el par $(m,n) \in S$. Es decir: podemos identificar una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A con un subconjunto $S \subset A \times A$. Muchas veces, de hecho, se denotan igual escribiendo $(m,n) \in S$ como mSn.

24. En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ identifica, mediante un subconjunto de pares (m, n) del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación que en lenguaje normal se expresa "m es el cuadrado de n". Señala algunos elementos que estén en dicha relación. ¿Hay algún número natural que esté en esa relación consigo mismo? Representa gráficamente esta relación.

Relación de equivalencia

Sea S una relación en el conjunto A. Se dice que S es *reflexiva* cuando para cada $p \in A$ se verifica pSp. (Es decir, el par (p, p) está en el subconjunto $S \subset A \times A$). Se dice que S es una relación *transitiva* cuando se cumple: si mSn y nSp entonces mSp. Se dice que S es una relación *simétrica* cuando se cumple: si mSn entonces nSm. Se dice que S es una relación *de equivalencia* cuando es reflexiva, transitiva y simétrica.

25. En el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la siguiente relación $\mathcal{R}$: $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a + b \leq 6$. Describe explícitamente el subconjunto S de $X \times X$ que define la relación. ¿Es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva? Representa gráficamente la relación.

26. Se considera en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ definida del modo siguiente "$m\mathcal{R}n$ cuando $m - n$ es par". ¿Es una relación de equivalencia? ¿Qué enteros se relacionan con 3? ¿y con 2020? ¿y con 14? ¿y con -25?

27. Sea S el conjunto de todos los seres humanos. Sean $x, y \in S$. Decimos que x está relacionado con y si x e y tienen al menos un progenitor en común. ¿Es una relación de equivalencia? Justificar la respuesta.

Si en un conjunto X se tiene una relación de equivalencia $\mathcal{R}$, para cada $m \in X$ el subconjunto $[m] = [m]_{\mathcal{R}} = \{p \in X \mid m\mathcal{R}p\}$ de todos los elementos que se relacionan con m se denomina **clase de equivalencia de** m. En un ejercicio previo has determinado, para la relación dada, las clases de equivalencia de algunos enteros.

28. Para la relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{Z}$ por $m\mathcal{R}n$ cuando $m - n$ es par:

    a) Demuestra que si dos enteros m y n tienen la misma paridad, entonces $[m] = [n]$.

    b) Prueba que si dos enteros m y n tienen paridades distintas, entonces $[m] \cap [n] = \varnothing$ y $\mathbb{Z} = [m] \cup [n]$.

29. Considera en el conjunto $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}$ determinada del modo siguiente "$x\mathcal{R}y$ cuando $x - y \in \mathbb{Q}$". Prueba que es una relación de equivalencia. Determina las clases de equivalencia $[0]$, $[2/3]$, $[\pi]$ y $[-\pi]$.

30. En el conjunto T de los triángulos definimos la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$T_1 \,\mathcal{R}\, T_2 \quad \text{si y solo si} \quad T_1 \text{ y } T_2 \text{ son semejantes.}$$

    Justifica que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Cúal es la clase de equivalencia de un triángulo rectángulo de catetos $a = b = 1$?

Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre el conjunto X, el conjunto de las clases de equivalencia se denomina ***conjunto cociente*** y lo escribiremos $X/\mathcal{R}$. Por ejemplo, para la relación del ejercicio 28, $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{P}, \mathcal{I}\}$, donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de los números enteros impares y $\mathcal{P}$ el de los enteros pares.

31. Se considera en el conjunto $X = \{2, 3, \dots, 20\}$ la relación $m\mathcal{R}n$ si y solo si el divisor primo más grande de m y n coincide. Prueba que es de equivalencia. Encuentra alguna clase de equivalencia que tenga un sólo elemento. ¿Cuántos elementos tiene $X/\mathcal{R}$?

32. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $m\mathcal{R}n$ si y sólo si $|m| = |n|$. La regla que asigna a cada clase $[n] \in \mathbb{Z}/\mathcal{R}$ el valor n ¿es una aplicación? La asignación $f : \mathbb{Z}/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ dada por $[n] \mapsto n^2$ ¿está bien definida? Si lo está, ¿es inyectiva?

33. En el conjunto de los puntos del plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se definen las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ siguientes: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; $(a, b)\mathcal{S}(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$. Demuestra que ambas son relaciones de equivalencia. En cada caso, determina la clase del punto $(1, 0)$. Describe geométricamente el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$, así como $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$.

34. En el conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera: $(x, y, z)\mathcal{R}(a, b, c) \Leftrightarrow z = c$. Demuestra que es de equivalencia. Describe geométricamente las clases de equivalencia.

35. Considera en el conjunto $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ la relación $\mathcal{R}$ definida del siguiente modo $(m, n)\mathcal{R}(p, q)$ cuando $mq = np$. Demuestra que se trata de una relación de equivalencia. ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(8, 4)$? ¿Y la de $(0, 4)$? ¿Cómo son todos los elementos de la clase de $(-7, 1)$? ¿Y los de la clase de $(3, -5)$? Encuentra una biyección entre $A/\mathcal{R}$ y $\mathbb{Q}$.

36. Sea el conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Definimos en A la relación de equivalencia $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$ si y solo si $\frac{xy}{|xy|} = \frac{ab}{|ab|}$. ¿Cuántos elementos tiene $A/\mathcal{R}$?

37. Dado un conjunto X y una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ prueba que la aplicación de paso al cociente $\pi : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto [x]$ es sobreyectiva. ¿Es en general inyectiva? Si es inyectiva, ¿qué puedes decir de $\mathcal{R}$?

38. Sea $f : X \to Y$ una función entre dos conjuntos X e Y. Definimos en X la relación $x\mathcal{R}y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. Prueba que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Demuestra que la aplicación $p : X/\mathcal{R} \to Y : [x] \mapsto f(x)$ está bien definida y es inyectiva. Si f es sobreyectiva, ¿es p sobreyectiva?

Ejercicios de reserva

39. Supongamos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia definida en un conjunto A y $B \subset A$. Sea $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (B \times B)$. Prueba que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia en B. Para todo $b \in B$, denotamos $[b]$ la clase de b para la relación $\mathcal{R}$ y $[b]_S$ la clase de b para la relación $\mathcal{S}$. Demuestra que $[b]_S = [b] \cap B$.

40. Se considera en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $m\mathcal{R}n$ si y solo si m y n tienen el mismo resto cuando los dividimos entre 3. Prueba que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$?

41. Supongamos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son relaciones de equivalencia en un conjunto X y que $X/\mathcal{R} = X/\mathcal{S}$. Prueba que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

42. Sea X un conjunto y sea Y un subconjunto de X. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación de equivalencia $A\mathcal{R}B$ si y solo si $A \cap Y = B \cap Y$. Prueba que la aplicación $f : \mathcal{P}(X)/\mathcal{R} \to \mathcal{P}(Y) : [A] \mapsto A \cap Y$ está bien definida y es una biyección.

Relación de orden

Sea S una relación en el conjunto A. Se dice que S es una relación *antisimétrica* cuando se cumple: si mSn y nSm entonces $n = m$.

Consideramos una relación $\preceq$ en un conjunto A no vacío. Se dice que $\preceq$ es una *relación de orden* en A (un orden en A) cuando la relación $\preceq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

La relación de orden es *total* cuando para cada dos elementos distintos m, n de A se cumple que o bien $m \preceq n$ o bien $n \preceq m$. La relación de orden es *parcial* cuando no se satisface la condición anterior. En este caso, hay elementos p, q de A tales que ni $p \preceq q$ ni $q \preceq p$.

Una relación de orden es la definida en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ mediante la siguiente propiedad: $x\mathcal{R}y$ si $x \leq y$ (también lo escribiremos como $y \geq x$). La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Observa que si a es un número real, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ es la semirrecta cerrada $[a, +\infty)$.

En el conjunto de palabras en español, se considera el orden lexicográfico. Es decir, una palabra p es anterior a otra q si todas las letras de p son las primeras de q (y aparecen en el mismo orden), o si -analizadas las letras de izquierda a derecha- la primera en la que difieren, la correspondiente a p se encuentra antes en el orden alfabético. Por ejemplo, *con* es anterior a *conjunto* y *demostración* es anterior a *demostrar*. Nota que esta relación establece un orden total en el conjunto de palabras que nos permite manejar los diccionarios.

39. En $\mathbb{Q}$ se define la relación $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + n$ siendo $n = 0$ o $n \in \mathbb{N}$.

    a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de orden. ¿Es total o parcial?

b) Demuestra que si $x\mathcal{R}z$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

40. Dado el conjunto $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la relación:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow \left\{ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \text{ y } x_1 \leq x_2 \right\}.$$

a) Demuestra que $\preceq$ es de orden y estudia si es de orden total.

b) Representa el conjunto $\mathrm{T}_1 = \{(x, y) \in A : (x, y) \preceq (1, 1)\}$ y el conjunto $\mathrm{T}_2 = \{(x, y) \in A : (-2, 1) \preceq (x, y)\}$.

41. En $\mathbb{R}^2$ se introduce la relación $\preceq$ mediante la siguiente definición: $(a, b) \preceq (c, d)$ cuando se tiene que $a \leq c$ **y** $b \leq d$. ¿Se define así una relación de orden? ¿Es total? Representa el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \preceq (2, -3)\}$ y el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2, -3) \preceq (x, y)\}$.

42. En $\mathbb{N}$ se considera la relación $p \preceq q$ si p divide a q. Analiza si es una relación de orden. ¿Es total o parcial? Justifica que dados $m, n \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \preceq p$ y $n \preceq p$.

43. Dado un conjunto X, se considera la relación de inclusión: si $M, N \in \mathcal{P}(X)$, entonces $M \preceq N$ si M es un subconjunto de N. ¿Define $\preceq$ una relación de orden? ¿Es total o parcial?

44. Se considera un conjunto A no vacío y X el conjunto de todas las aplicaciones $f : A \to \mathbb{R}$. En X se define la relación $f \preceq g$ si para todo $a \in A$ se da que $f(a) \leq g(a)$. Estudia si $\preceq$ es un orden en X. ¿Es total o parcial?

45. Se consideran $A \subset \mathbb{R}$ y las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ dadas por $f(a) = a$ y $g(a) = a^2$. Estudia la relación que hay entre ambas para el orden $\preceq$ del ejercicio anterior en los casos $A = [0, 1]$, $A = \mathbb{N}$ y $A = \mathbb{R}$.

46. Si $\leq$ es una relación de orden en X e $Y \subset X$, entonces $\leq$ es una relación de orden en Y.

Cardinal o potencia de un conjunto. Conjuntos numerables y no numerables

Decimos que un conjunto A *tiene el mismo cardinal* (o *es de la misma potencia*) que otro B cuando existe una biyección entre A y B. Los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$ tienen el mismo cardinal. También lo tienen $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \cup \{0\}$, pues $f(n) = n-1$ define una biyección entre ambos. Se suele notar $|A|$ (o $\mathrm{card}(A)$ o $\sharp A$) el cardinal de un conjunto A. Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$ cumplen que $|A| = |B| = 3$ y si $C = \{b, c, 1, 4\}$, $|C| = 4$, $|A \cup B| = 6$, $|B \cup C| = 5$, $|A \cap C| = 2$ y $|A \cup B \cup C| = 6$.

47. Si X es un conjunto finito, calcula el cardinal del conjunto de las partes de X, ya definido, por inducción sobre el cardinal de X.

Un conjunto A se dice *numerable* cuando tiene el mismo cardinal (o es de la misma potencia) que $\mathbb{N}$, es decir cuando existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$.

48. Demuestra que son numerables los siguientes conjuntos.

    a) El conjunto de los números naturales pares.

    b) El conjunto de los cuadrados perfectos.

    c) Cualquier subconjunto infinito del conjunto de números naturales.

    d) $A \setminus F$, si A es numerable y F finito.

    e) La unión de un conjunto finito y un conjunto numerable.

    f) El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

    g) La unión de dos conjuntos numerables disjuntos.

    h) El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

    i) El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales.

49. ($\bullet$) Vamos a llamar *palabra infinita de dos letras A y B* a una ristra infinita del tipo $ABABBABBA$... Considera el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las palabras infinitas de dos letras. Demuestra, por reducción al absurdo, que $\mathcal{P}$ no es numerable. [Sugerencia: Supón que $\mathcal{P}$ fuera numerable. Entonces podrías colocar todas las palabras de $\mathcal{P}$ en un cuadro infinito como sigue:

    (1) A B A B B A B B A. . .
    (2) A A B A A B A A B. . .
    (3) B B B A A B A B A. . .
    (4) B B B B A A B A B. . .
    (5) A A A A A A B B A. . .
    (6) B B A B A A B A A. . .
    $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

    Toma la palabra infinita que corresponde a la diagonal de este cuadro A A B B A A. . . y forma la palabra que resulta de cambiar en ella cada A por B y cada B por A, es decir, la palabra B B A A B B. . . Justifica que no está en el cuadro y concluye que $\mathcal{P}$ no es numerable].

50. **a**) ($\bullet$) Todo número real admite una expresión decimal (única si excluimos aquellas expresiones que a partir de un lugar en adelante están formadas por nueves). Observa que, de acuerdo con ella, cualquier número real del intervalo $[0, 1)$ puede identificarse de forma única mediante una ristra de los diez símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Utiliza este hecho y la forma de proceder del ejercicio anterior para demostrar que el conjunto de los números reales del intervalo $[0, 1)$ no es numerable.

b) ($\bullet$) Observa que el conjunto $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ es numerable. ¿Por qué no puede usarse el mismo argumento del apartado **a**) para este conjunto, aunque cada $x \in A$ admite una expresión decimal como la de arriba?