Matemática discreta

Divisibilidad

Dados dos números naturales a y b, escribiremos $a|b$ y leeremos *a divide a b* si existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que $ac = b$. En este caso, decimos que a es un divisor de b o que b es divisible por a (o b es múltiplo de a). Por ejemplo, $3|15$; por su parte, 100 es múltiplo de 4, de 25 y de 20, entre otros; pero 3 no es divisor de 20. Llamamos primos a los números p mayores o iguales que 2 que sólo son divisibles por 1 y por p. Si p es mayor o igual que 2 y no es primo, se dice que es compuesto.

1. Demuestra que si n es un número natural y n es compuesto, entonces existe un divisor m de n con $1 < m \leq \sqrt{n}$.

2. a) Si un número es divisible por 4 y por 3 entonces, ¿es divisible por 12?

   b) Si un número es divisible por 4 y por 6 entonces, ¿es divisible por 24?

   c) Si un número divide al producto de otros dos, ¿divide a alguno de ellos?

   Se denomina *máximo común divisor* de dos números naturales a y b al mayor número natural que divide a ambos. Se denota $\mathrm{mcd}(a, b)$.

3. Demuestra que si a y b son dos números naturales $a > b$ y hacemos la división entera, es decir:
$$a = bc + r$$
   con c natural y $0 \leq r < b$, entonces cualquier divisor común de a y b es divisor de r y cualquier divisor común de r y b lo es de a. Deduce a partir de aquí que si $r \geq 1$, entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r)$. Justifica que si b divide a a (es decir, cuando $r = 0$), se satisface que $\mathrm{mcd}(a, b) = b$.

   Algoritmo de Euclides. Sean a y b dos números naturales no nulos $a > b$, y hacemos la división entera, es decir:
$$a = bc_0 + r_1$$
   con c_0 natural y $0 \leq r_1 < b$.

   Si $r_1 = 0$ entonces $b|a$ y el $\mathrm{mcd}(a, b) = b$, pero si tenemos que $r_1 \neq 0$ podemos volver a aplicar el algoritmo de la división y encontrar dos números enteros c_1 y r_2 tales que $b = c_1 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$. Este proceso puede continuarse, escribiendo $r_1 = c_2 r_2 + r_3$ y, puesto que $b > r_1 > r_2 \cdots \geq 0$, es evidente que en un número finito n de pasos, con $n \leq b$, llegaremos a un resto $r_n = 0$, es decir $r_{n-2} = c_{n-1} r_{n-1}$. Este proceso describe el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números como el último resto no nulo, r_{n-1}. Es decir
$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r_1) = \mathrm{mcd}(r_1, r_2) = \cdots = \mathrm{mcd}(r_{n-2}, r_{n-1}) = r_{n-1}.$$
   Observa que la construcción anterior permite escribir r_1 como $a - bc_0$ y r_2 como $b - c_1 r_1$ y, por tanto, $r_1 = m_1 a + s_1 b$ y $r_2 = m_2 a + s_2 b$, con m_1, s_1, m_2, s_2 enteros. Iterando, obtenemos la **Identidad de Bézout**: Dados dos números naturales a y b, existen m, s enteros tales que $r_{n-1} = \mathrm{mcd}(a, d) = am + bs$.

4. Aplicando el algoritmo de Euclides, calcula $\text{mcd}(2805, 2448)$ y $\text{mcd}(936, 504)$. Encuentra enteros m, n tales que $\text{mcd}(936, 504) = 936 \cdot m + 504 \cdot n$.

   Se dice que dos números a y b son *primos entre sí* (o *relativamente primos*, o *coprimos*) si no tienen divisores comunes mayores que 1, es decir $\text{mcd}(a, b) = 1$.

5. Demuestra que a y b son primos entre sí si y solo si existen enteros m, n tales que $1 = a \cdot m + b \cdot n$. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n^2 + 5n + 5$ y $n + 1$ son primos entre sí.

6. Demuestra que si r y s son primos entre sí y s divide a rb, entonces s divide a b. Deduce que si p es un número primo que divide a ab entonces $p|a$ o $p|b$.

7. Demuestra que un número natural d es el máximo común divisor de dos números naturales a y b si y sólo si satisface las dos condiciones:

   - $d|a$ y $d|b$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n|a$ y $n|b$ se tiene que $n|d$.

   Se denomina *mínimo común múltiplo* de dos números naturales a y b al menor número natural que es divisible por ambos. Se denota $\text{mcm}(a, b)$.

8. Demuestra que un número natural M es el mínimo común múltiplo de dos números naturales a y b si y sólo si satisface las dos condiciones:

   - $a|M$ y $b|M$.
   - $\forall N \in \mathbb{N}$ tal que $a|N$ y $b|N$ se tiene que $M|N$.

Teorema Fundamental de la Aritmética. Todo número entero positivo puede factorizarse como producto de números primos de forma única, salvo el orden de los factores. La existencia de la factorización se ha visto como aplicación del Principio de Inducción Completa. La unicidad se prueba usando adecuadamente el ejercicio 6.

9. Usa el Teorema Fundamental de la Aritmética para obtener la expresión del máximo común divisor (y el mínimo común múltiplo) de dos números enteros positivos en términos de sus factores primos. Deduce que $a \cdot b = \text{mcm}(a, b) \cdot \text{mcd}(a, b)$. Calcula $\text{mcm}(2805, 2448)$ y $\text{mcm}(936, 504)$.

10. Prueba que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

11. Justifica que un número es múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras lo es.

12. Demuestra que un número natural es divisible por 11 si y sólo si, la diferencia de la suma de sus cifras de lugar par menos la suma de sus cifras de lugar impar es múltiplo de 11. (Recuerda que $10^n - 1$ es múltiplo de 11 si n es par y que $10^n + 1$ es múltiplo de 11 si n es impar).

Se considera la función parte entera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número real x el entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$ definido como el mayor entero que es menor o igual que x. Calcula $\lfloor x \rfloor$ para los números reales $x = 2$, $x = -2$, $x = 2{,}5$, $x = -2{,}5$, $x = \pi$, $x = -2\pi$, $x = 2/3$, y $x = -2/3$. Representa la función y determina $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{N})$, $f((2,5))$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{1,2\})$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}(\{1/2\})$, $f^{-1}((2,5))$, $f^{-1}([2,5])$, $f^{-1}(\mathbb{N})$ y $f^{-1}(\{2k : k \in \mathbb{Z}\})$.

13. Prueba que si $n \in (0, +\infty)$, m es un número natural y $m \leq n$, entonces $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ coincide con el número de naturales que son múltiplos de m menores o iguales que n. Calcula cuántos números naturales menores que 2000 son múltiplos de 3. Determina cuántos de ellos no son múltiplos de 9.

14. Dados dos números primos distintos p y q, encuentra el número de divisores naturales distintos que tiene el número: a) pq, b) p^2q, c) p^nq^m, para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicios de reserva

15. Encuentra todos los números naturales m, n tales que $m^2 - n^2 = 31$.

16. Prueba que si un número tiene un número impar de divisores, entonces es un cuadrado perfecto.

17. Sea $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Demuestra que si $\text{mcd}(a, b) = D$ y $\text{mcm}(a, b) = M$ se satisface

    a) $\text{mcd}(a^2, b^2) = D^2$.

    b) $\text{mcm}(a^2, b^2) = M^2$.

    c) ¿Es cierto lo inverso, es decir: Si $\text{mcd}(a^2, b^2) = D^2$, entonces $\text{mcd}(a, b) = D$, y si $\text{mcm}(a^2, b^2) = M^2$ entonces $\text{mcm}(a, b) = M$?

18. Demuestra que la ecuación $22\alpha + 6\beta = 70$ tiene soluciones enteras y encuéntralas.

19. Prueba que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ es un entero.

20. Prueba que si 3 divide a n^2 entonces 3 divide a n (Usa que n sólo puede ser de la forma $3a, 3a + 1, 3a + 2$).

21. ¿Cómo ha de ser q para que se satisfaga /Si q divide a n^2 entonces q divide a n/?

22. Caracteriza los números que son múltiplos de 4. Prueba que el producto de 4 números naturales consecutivos es múltiplo de 24.

23. Caracteriza los múltiplos de 5. Prueba que el producto de 5 números naturales consecutivos es divisible por 120.

24. Un número que se escriba con 100 ceros, 100 unos y 100 doses, ¿es mútiplo de 3? ¿Y de 9? ¿Puede ser un cuadrado perfecto?

25. Todos los números capicúas de cuatro cifras son múltiplos de 11. Estudia si esto es cierto para todos los capicúas con tres, cinco o más cifras.

26. Dado un número natural N de n cifras, considera la última de ellas, a_0, y el número M de $n-1$ cifras que se obtiene al suprimir a_0 del número N.

    a) Prueba que N es múltiplo de 11 si y solo si $M - a_0$ lo es.

    b) Prueba que N es múltiplo de 7 si y solo si $M - 2a_0$ lo es.

    c) Utiliza lo anterior para decidir si 11781 es múltiplo de 77.

Principio del Palomar (o principio de distribución de Dirichlet)

Si tenemos $n+1$ (o más) palomas y n nidos, entonces hay al menos un nido que tiene dos o más palomas. En términos de conjuntos y aplicaciones, si A, B son conjuntos finitos, $|A| > |B|$ y $f : A \to B$ es una aplicación, entonces f no es inyectiva.
Ejemplo: Por la densidad del pelo en la cabeza y la superficie de la misma, se sabe que una persona no tiene más de 180.000 pelos en la cabeza. Alcalá de Henares tiene 195.649 habitantes, según datos de 2019. Necesariamente hay dos alcalaínos con la misma cantidad de pelos en la cabeza. Aquí los nidos son la cantidad de pelos (de 0 a 180.000) y las palomas, los 195.649 habitantes.

15. Prueba que en un grupo de 400 personas hay al menos 2 cuyo cumpleaños es el mismo día.

16. Demuestra que dados cinco puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2 hay al menos dos puntos que distan como mucho $\sqrt{2}$ ¿Es verdad para 4 puntos?

17. Si se eligen 6 números distintos del 0 al 9, prueba que hay dos que suman 9.

18. Justifica que en una fiesta de 80 personas, al menos hay dos que saludan exactamente a la misma cantidad de personas. [Puede ayudarte pensar dos casos: que todo el mundo salude a alguien, en cuyo caso la cantidad de saludos por persona varía de 1 a 79, o que haya alguien que no salude a nadie; en este caso, la cantidad de saludos por persona varía de 0 a 78, ya que nadie saludará a todos los demás].

19. Explica por qué en un concierto con 800 espectadores, al menos hay dos con las mismas iniciales de nombre y de apellido.

20. Demuestra que si eliges 7 números naturales distintos, al menos hay dos cuya diferencia es múltiplo de 6. Además, justifica que la suma de algunos de ellos es un múltiplo de 7. [Sugerencia: si los números elegidos son $a_1, a_2, \dots, a_7$, considera $S_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_j$, $1 \le j \le 7$. Se tiene que o un S_j es ya múltiplo de 7 o la diferencia de dos de ellos lo es ¿por qué?].

Dados un palomar con n nidos y $mn+1$ (o más) palomas, hay un nido que aloja al menos $m+1$ palomas. Esta versión del principio del palomar contiene la anterior como un caso particular, con $m = 1$. En términos de conjuntos y aplicaciones, si A, B son

conjuntos finitos, m es un número natural, $|A| > m|B|$ y $f : A \to B$ es una aplicación, entonces existe $b \in B$ tal que $|f^{-1}(\{b\})| \geq m + 1$. También se enuncia usando la parte entera de un número real: si M palomas tienen que alojarse en n nidos, habrá un nido con al menos $\lfloor \frac{M-1}{n} \rfloor + 1$ palomas.
Ejemplo: En una tienda de alquiler disponen de 62 bicicletas, pintadas de 7 colores distintos. Como $\lfloor \frac{62-1}{7} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{61}{7} \rfloor + 1 = 9$, al menos hay 9 bicicletas del mismo color.

21. Los veinticinco alumnos de un grupo de **Matemáticas Básicas** tienen que generar una clave de seis caracteres con las letras A, B, C, D y los números $1, 2, 3, 4$ para poder acceder a sus calificaciones. Justifica que al menos hay cuatro alumnos cuya clave termina en el mismo carácter.

22. Los estudiantes de tercero pueden cursar una asignatura optativa de un conjunto de 4 materias o esperar a cuarto para ello. ¿Cuántos de estos estudiantes deben cursar una optativa para garantizar que alguna de las asignaturas tiene al menos 7 matriculados de tercer curso?

23. Justifica que hay al menos 317 habitantes de la península Ibérica con la misma cantidad de pelos (vivimos más 57 millones de personas entre España, Portugal y Andorra).

24. Colocamos de forma arbitraria 10 puntos en una circunferencia y los numeramos al azar con los números $1, 2, \ldots, 9, 10$. Prueba, utilizando adecuadamente el Principio del Palomar, que hay 3 consecutivos que suman al menos 18. [Sugerencia: olvida el punto numerado con 1 y considera las tres ternas de números consecutivos restantes, con suma global 54].

Principio de Inclusión-Exclusión

Sabemos que si A y B son conjuntos finitos, se satisface que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

25. ¿Cuántos números hay entre 1 y 60 que sean múltiplos de 3 o terminen en 3?

26. ¿Cuántos enteros positivos menores que 1001 son divisibles por 5 o por 7? ¿Y cuántos son divisibles por 6 o por 15?

27. El principio de inclusión-exclusión sirve también para para contar indirectamente. Utilízalo para responder estas preguntas: ¿Cuántos números entre 1 y 100 no son divisibles ni por 2 ni por 3? ¿Cuántos enteros entre 1 y 3943, ambos incluidos, no son divisibles ni por 11 ni por 13?

28. En el caso de tener tres conjuntos finitos, A, B y C, justifica que se satisface

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

¿Cuántos enteros entre 1 y 9264, ambos incluidos, son divisibles por 4, 5 o 7?

Combinatoria

29. ¿Cuántos números entre 1000 y 9999 tienen sólo dígitos pares? (El 0 es una cifra par).

30. Un grupo musical grabó 11 canciones con las que editará un nuevo disco. ¿De cuántas maneras puede elegir la secuencia de los temas?

31. Ocho amigos se reúnen periódicamente a cenar. Lo hacen siempre en el mismo restaurante, en la misma mesa redonda. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?

32. Un partido de fútbol acaba con el marcador 5-3. ¿De cuántas maneras se puede llegar a este resultado?

33. Dados 10 puntos en una circunferencia, ¿cuántos triángulos, con vértices en esos puntos, se pueden construir?

34. En una tienda hay 10 cajas distintas y sólo 8 etiquetas distintas. Se pretende etiquetar las cajas, con lo que quedarán dos cajas sin etiqueta. ¿De cuántas maneras diferentes pueden etiquetarse las cajas? Piensa primero en la solución fijando las cajas y asignándoles las etiquetas; después busca la solución pero considerando las etiquetas y asignándoles las cajas.

35. La Empresa Rotuline acaba de sacar al mercado tres modelos nuevos de rotuladores K, S y W. Yo voy a comprar 12 de esos rotuladores, ¿de cuántas formas puedo hacerlo? (Sugerencia: cambia el problema por una cadena de 12 unos y 2 ceros; cada cero sirve para separar los modelos).

36. En la mesa de un bar se encuentran sentadas 7 personas. Cada una de ellas tomará un refresco a elegir entre las 5 marcas que se ofrecen. ¿De cuántas maneras puede hacer el grupo su elección? ¿Cuántos pedidos distintos puede hacer el camarero en el mostrador?

    Un *grafo* está formado por una cantidad finita de puntos, que llamamos *vértices*, y líneas que unen parejas de puntos, que llamaremos *aristas*. Un grafo se llama *completo* si tiene todas las aristas posibles; es decir, si cada par de vértices está unido por una arista.

37. Si consideramos un grafo completo de k vértices, ¿cuántas aristas tiene?

38. ¿Cuántas distribuciones distintas se pueden hacer con 9 cartas en 3 grupos de 3 cartas cada uno?

39. ¿Cuántas soluciones en enteros no negativos tiene la ecuación $x + y + z = 8$? ¿Cuántas soluciones en naturales tiene esa ecuación?

40. *a*) Demuestra que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, siendo $0 \leq k \leq n$.

    b) Demuestra que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, siendo $1 \leq k \leq n-1$.

41. Demuestra que si $a, b \in \mathbb{R}$, para todo n natural

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,.$$

Es decir:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \,.$$

Ejercicios de reserva

42. ¿Cuántos capicúas hay que tengan 5 cifras? ¿Y de 6 cifras?

43. *a*) Prueba que un conjunto de 2 elementos tiene cuatro subconjuntos.

    b) Si un conjunto tiene n elementos, ¿cuántos subconjuntos tiene?

44. ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar utilizando dos unos, tres doses y dos treses?

45. *a*) Demuestra que:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.$$

    b) Teniendo en cuenta la igualdad anterior comprueba que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

    y calcula

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Probabilidad (Opcional)

En un experimento, si tenemos sucesos elementales igualmente probables (por ejemplo, al tirar un dado, sacar un 2 tiene la misma probabilidad que sacar un 1, un 3 o un 6), la probabilidad de un suceso A se calcula mediante la conocida fórmula de Laplace:

$$p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Por ejemplo, al tirar una moneda al aire, si llamamos A al suceso "salir cara", entonces $p(A) = \frac{1}{2}$. Al tirar un dado, si llamamos B al suceso "sacar un múltiplo de 3", se tiene que $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

En una experiencia reiterada, dos sucesos A y B son independientes si la realización de A no influye en la realización de B. En este caso, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Por ejemplo, si tiramos una moneda y un dado, la probabilidad de obtener una cara y un tres es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$.

42. Con una apuesta en la quiniela de 15 partidos, ¿cuál es la probabilidad de acertar los quince, suponiendo que todos los resultados posibles son equiprobables? ¿Y la de acertar catorce resultados de los quince? ¿Y la probabilidad de tener exactamente $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 13\}$ aciertos?

43. Una apuesta en la Lotería Primitiva consiste en elegir 6 números del 1 al 49. Si marcamos 7 números en la lotería primitiva, ¿cuántas apuestas distintas estamos haciendo? ¿Cuál es la probabilidad de que nos toque?

44. Una urna contiene bolas, en cada una de las cuales está escrita una permutación de las cifras $1, 2, 3, 4, 5$. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola sea múltiplo de 2? ¿Y que sea múltiplo de 5? ¿Y que termine en 24?

45. Halla la probabilidad de sacar dos bolas de distinto color de una urna que contiene 10 bolas blancas y 10 rojas cuando

    a) se devuelve la bola después de la primera extracción.

    b) no se devuelve la bola tras la primera extracción.

46. En una baraja de 40 cartas se sacan dos a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo? ¿Y de que sean dos ases? ¿Y de que sean el as de oros y el rey de copas?

47. Un tirador tiene probabilidad $\dfrac{1}{3}$ de dar en el blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte? Si tira tres veces, ¿cuál es la probabilidad de acertar alguna vez?

Sistemas de numeración (Opcional)

48. Escribe $0,54$, $0,\widehat{34}$, $0,2\widehat{45}$ y $1,\widehat{9}$ como cociente de dos números enteros.

49. Encuentra la expresión decimal de los siguientes números binarios:
    a) $(1011001)_2$ b) $(0,100101)_2$ c) $(11,11)_2$ d) $(0,\widehat{1})_2$

50. Encuentra la expresión binaria de los siguientes números decimales:
    a) 83 b) 27 c) 256 d) 3,625

51. Prueba que un número natural es múltiplo de 8 si y sólo si su expresión binaria termina en, al menos, tres ceros.

    Algunos sistemas operativos utilizan, en lugar de base 2, la base hexadecimal, es decir, utilizan como base el 16 y los dígitos que se emplean son
    $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}.$$

52. Escribe en base 16 los números 28, 17, 256, 284 y 273. Encuentra la expresión decimal de los números hexadecimales: a) E b) 1A c) A9B, A1. Determina también su expresión binaria.