Lenguaje cotidiano y lenguaje matemático

Proposiciones matemáticas

Una *proposición matemática* es una afirmación que se refiere a objetos ya introducidos o definidos y que es verdadera o falsa (es decir, que tiene necesariamente uno de los dos valores posibles **V** o **F**).

1. Para cada uno de los siguientes apartados, decide cuáles son proposiciones matemáticas y por qué.

   a) $2+3=5$

   b) $2+3$

   c) El número 2 es un número par

   d) $3+n+n^2$

   e) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

   f) Para cada ángulo t se tiene $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

   g) $ax^2+bx+c=0$

   h) Existen números reales a, b, c tales que para todo x número real se satisface que $ax^2+bx+c=0$

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones matemáticas son verdaderas?

   a) La raíz cuadrada de cualquier número entero es un número real no negativo.

   b) Existe un ángulo t tal que $\operatorname{sen} t = \cos t$.

   c) (*) Si $x<1$, entonces $x^2<1$

Conectores lógicos

El conector /O/ y el conector /Y/

A continuación escribimos la tabla de verdad para la **conjunción** /A y B/ y otra para la **disyunción** /A o B/. Es decir, establecemos la verdad o falsedad de ambas proposiciones según la verdad o falsedad de la proposición A y de la proposición B. La conjunción /y/ se denota con el símbolo $\wedge$. La disyunción /o/ se denota con el símbolo $\vee$.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Explica el significado de esta frase, que se lee en la librería de la Universidad.

   /Nuestros clientes en posesión de carnet de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15 % de descuento./

4. Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque de atracciones y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice /No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque de atracciones./ Explica lo que el padre quiere decir con toda claridad. ¿Tiene este /o/ el mismo significado que en el ejercicio anterior? ¿A cuál de los dos significados se acerca el del /o/ de las matemáticas?

Marta y Javier necesitan un medicamento. Un amigo dice a Javier: **Si conseguimos un casco, puedo llevaros a una farmacia en mi moto o bien a Marta o bien a ti**. Observa que este uso de la disyunción sí es excluyente.

5. Una profesora de lógica matemática ha tomado su baja de maternidad. Sus compañeros la llaman por teléfono para felicitarla y preguntan: ¿Fue niño o niña? Ella responde: sí ¿Es correcta la respuesta?

6. (*) Pepe dice: /Ordené que viniera Pedro o Juan./ Han venido Pedro y Juan. ¿Se cumplió la orden?

7. (*) ¿Es correcto decir en el lenguaje matemático /3 es menor o igual que 5/? ¿Es correcto decir /5 es menor o igual que 5/?

8. Completa la siguiente tabla de verdad.

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	F		
F	F	V		

El conector /NO/

La tabla de verdad del conector /no/, que denotamos con $\neg$, es la siguiente:

A	$\neg A$
V	F
F	V

9. Escribe la negación de las frases siguientes:
   a) /Su madre es profesora y doctora en Química./
   b) /Javier tiene en su casa un hurón o una nutria./
   c) /Todos mis amigos son aficionados al baloncesto./

10. Completa las siguientes tablas de verdad:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

11. (*) Construye una frase sencilla y clara equivalente a la siguiente:

    /No es cierto que se preparara las matemáticas de la prueba de acceso y el teórico de conducir durante la tarde del sábado./

Sobre la proposición /Si A entonces B/

Una de las situaciones que más aparecen en Matemáticas es demostrar que es cierta la afirmación /Si A entonces B/, a veces escrita $A \Rightarrow B$ y leída "A implica B". A continuación escribimos la tabla de verdad sobre esta implicación.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

12. (*) /Si el Granada no gana el partido el domingo, Pepe será muy infeliz./

    Tras la victoria del Granada, encontramos a Pepe totalmente infeliz. La verdad de esta proposición, ¿es compatible con esta situación?

13. Quieres demostrar que **/A implica B/** es falso. ¿Cómo procederías?

    a) Demostrando que B es falso.

    b) Demostrando que A es falso.

    c) Demostrando que B es falso y que A es verdadero.

    d) Demostrando que B es verdadero y que A es falso.

    e) Demostrando que B es falso y que A es falso.

14. Para cada una de las proposiciones siguientes identifica cuál es la hipótesis y cuál la tesis o conclusión.

    a) Si ABC es un triángulo rectángulo, de lados a, b, c, tales que a es la hipotenusa y su área es $\frac{a^2}{4}$, entonces el triángulo ABC es isósceles.

    b) Cualquier número entero n cumple que n^2 es un número entero.

    c) (*) Si los números reales a, b, c, d cumplen que $ad - bc \neq 0$, para cualquier par de números reales e, f se cumple que el sistema de ecuaciones $\{ax + by = e, cx + dy = f\}$ tiene una única solución.

    d) La suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

15. (*) Tu tarea es demostrar que /A implica B/ es verdadera y sabes que B es falso. ¿Qué tratarás de demostrar y por qué?

    a) Que A es verdadero.

    b) Que A es falso.

16. Consideremos la siguiente afirmación /Si $n-1$ es múltiplo de 3, también lo es n^2-1./

    a) ¿Qué dice el enunciado anterior en los casos $n=4$, $n=5$ y $n=6$?

    b) ¿Puede ser cierta la afirmación anterior?

17. Completa la siguiente tabla de verdad y compárala con la tabla de la implicación.

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

18. Decide razonadamente si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
    A: /Si $0>1$, entonces $\sqrt{2}$ es racional/.
    B: /Si $0>1$, entonces $\sqrt{2}$ es irracional/.

Equivalencias

19. (*) Supongamos que n es un número natural. Decide si la proposición /n^2 es par si y sólo si n es par/ es verdadera o es falsa. Justifica tu respuesta.

20. Supongamos que r es un número real. La proposición /r^2 es racional si y sólo si es r es racional/ ¿es verdadera o es falsa? Demuéstralo.

21. Sean A y B dos matrices 2×2. ¿Es cierto que $AB = A^2$ si y sólo si $A = B$? Justifica tu respuesta.

22. Sea a un número real. Decide si la condición $a^2 < a$ es a) suficiente, b) necesaria, c) necesaria y suficiente ... para que $a^3 < a^2$. ¿Por qué?

23. Decide si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

    a) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas de $\mathbb{R}^3$ se corten en un punto es que sean coplanarias.

    b) Si dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares, entonces la dirección de toda recta contenida en π_1 es perpendicular a la de toda recta contenida en π_2.

    c) Si la recta r es perpendicular al plano π, entonces la dirección de r es perpendicular a la de toda recta contenida en π.

d) Si los planos π_1 y π_2 se cortan a lo largo de una recta, entonces no existen rectas paralelas $r_1 \subset \pi_1$ y $r_2 \subset \pi_2$.

24. Sean **A** y **B** proposiciones matemáticas. Comprueba que son equivalentes **A** y $\neg(\neg\mathbf{A})$. ¿Son equivalentes las proposiciones $/\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}/$ y $/\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})/$?

25. Se consideran dos números reales a y b. Marca cada casilla del siguiente cuadro con un número del 1 al 5, de acuerdo con el convenio que se indica al final:

	$a+b \in \mathbb{Q}$	$a+b \notin \mathbb{Q}$	$ab \in \mathbb{Q}$	$ab \notin \mathbb{Q}$
$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$				
$a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				
$a \notin \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$				

[1] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba.

[2] La condición de la izquierda hace que la de arriba se cumpla sólo si $a = 0$.

[3] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba nunca se cumpla.

[4] La condición de la izquierda es suficiente para la condición de arriba si $a \neq 0$.

[5] La condición de la izquierda hace que la condición de arriba se cumpla en algunos casos particulares, pero no en otros.

Cuantificadores lógicos, sus concatenaciones y sus negaciones

26. Utiliza los cuantificadores lógicos $\forall$ y $\exists$ para escribir las proposiciones de los ejercicios 19 y 20.

27. Sean M el conjunto de todas las personas de una cierta ciudad, P el conjunto de todos los periódicos que se publican en esa ciudad y D el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos $\forall$ y $\exists$, cada una de las siguientes afirmaciones entre barras:

    a) /Hay alguien que todos los días compra todos los periódicos./

    b) /Todos los días hay alguien que compra todos los periódicos./

    c) (*) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /todos compran algún periódico todos los días./

    d) /Todos los días hay algún periódico que todo el mundo compra./

    e) (*) Somos poco aficionados a la prensa en este pueblo, pero al menos /todos los días hay alguien que compra algún periódico./

    f) Es una ciudad de maniáticos. /Todos compran todos los periódicos todos los días./

    g) (*) Aquí sí que somos ajenos a la prensa, pero al menos /hubo un día en que alguien compró algún periódico./

    h) Esta ciudad está dominada por un diario. /Todo el mundo lo compra todos los días./

i) Aquí todos somos muy fieles. /Todos compran siempre el mismo periódico/, el suyo de toda la vida.

j) Fue tal el notición que /aquel día todo el mundo compró todos y cada uno de los periódicos./

k) "La Ciudad"se llevó la exclusiva y así /este día hubo un periódico que fue comprado por todo el mundo./

28. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. ¿Es cierta la siguiente afirmación?

    /Para cada elemento n del conjunto $\mathbb{N}$, existe un número real M tal que $n < M$/.

    ¿Hay alguna diferencia entre la anterior afirmación y la siguiente?

    /Existe un número real M tal que para cada elemento n del conjunto $\mathbb{N}$, se cumple que $n < M$/.

29. (*) Escribe con cuantificadores y decide si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

    a) Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, existe un número real y con $0 \leq y \leq 1$ tal que $x + y = 1$.

    b) Existe un número real y con $0 \leq y \leq 1$ tal que, para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, se satisface que $x + y = 1$.

30. Explica si en cada uno de los siguientes pares de proposiciones a y b son las dos verdaderas, las dos falsas o una verdadera y otra falsa:

    (*) *a*) 1) Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$ y cada número real y con $0 \leq y \leq 2$, se cumple $2x^2 + y^2 \leq 6$.

    2) Para cada número real y con $0 \leq y \leq 2$ y cada número real x con $0 \leq x \leq 1$, se cumple $2x^2 + y^2 \leq 6$.

    b) 1) Para cada número real x con $0 \leq x \leq 1$ y cada número real y con $0 \leq y \leq 2x$, se tiene que $2x^2 + y^2 \leq 6$.

    2) Para cada número real y con $0 \leq y \leq 1$ y cada número real x con $0 \leq x \leq 2y$, se tiene que $2x^2 + y^2 \leq 6$.

31. Escribe la negación de la siguiente proposición: *No existe un entero* x *tal que* $x^2 + x - 11 = 0$. Escríbela también usando cuantificadores.

32. Escribe la negación de la siguiente proposición:
    $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x = y^2$.

33. Decide si la siguiente proposición es verdadera o falsa y escribe su negación: $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{1+x} = y$.

34. Decide cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

    a) Para todo par de números reales x, y que satisfagan $x \neq y$ se cumple que $x^3 + 5 \neq y^3 + 5$.

    b) Ningún par de números reales x, y cumple $x \neq y \wedge x^3 + 5 = y^3 + 5$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}$, si $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

d) Existen pares de números reales x, y que satisfacen $x^2 + 5 = y^2 + 5 \wedge x \neq y$.

35. Describe cuál es la diferencia entre las dos proposiciones siguientes:

    a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que si $x < y \Rightarrow x < c < y$.

    b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \mathbb{R}$ se satisface que $x < y \Rightarrow x < c < y$.

    ¿Son verdaderas o falsas?

36. Niega la proposición **P**, es decir, escribe la proposición **no P**, de manera que no aparezca explícitamente la palabra **no**. Luego, decide en cada caso si es verdadera **P** o **no P**.

    a) (*) **P**: /Para cada número real $x > 0$ se cumple que $x^2 - x > 0$/.

    b) **P**: /Hay triángulos rectángulos con los tres lados iguales/.

    c) **P**: /Los múltiplos de 3 son impares/.

    d) (*) P: Para cada número real x tal que $-1 \leq x \leq 1$, existe un número real y con $-1 \leq y \leq 1$ tal que $x^2 + y^2 \leq 1$.

    e) **P**: Existe un número real x con $-1 \leq x \leq 1$ tal que para cualquier número y con $-1 \leq y \leq 1$ se cumple que $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ejercicios de reserva

37. Construye una frase sencilla equivalente a

    /No es verdad que tú seas cordobés ni que tu padre sea segoviano./

38. Sean P el conjunto de los programas de radio y D el conjunto de todos los días del año. Escribe, utilizando los cuantificadores lógicos $\forall$ (**para todo**, **para cada**) y $\exists$ (**existe, para algún**), cada una de las frases siguientes:

    a) Cada día oigo algún programa en la radio.

    b) Hay un programa en la radio que oigo todos los días.

    c) Algún día oigo algún programa en la radio.

39. Para B un subconjunto de $\mathbb{R}$ se consideran las proposiciones:

    P: / Existe un número real M que es mayor o igual que todos los elementos de B./ Si la proposición **P** es cierta para B, se dice que B está *acotado superiormente* y que M es una *cota superior* de B.

    Q: / Existe un número real b perteneciente a B que es mayor o igual que todos los elementos de B./ Si la proposición **Q** es cierta para B, se dice que b es el máximo del conjunto B.

    R: / Existe un número real S que es mayor o igual que todos los elementos de B y, además, si M es cualquier cota superior de B se cumple que S es menor o igual que M./ Si la proposición **R** es cierta para el conjunto B, se dice que S es el supremo de B.

Escribe con cuantificadores las proposiciones **P**, **Q** y **R**. ¿Son ciertas las proposiciones **P**, **Q** y **R** para $B = (0, 1)$, para $B = (0, 1]$ y para $B = (0, \infty)$?

Soluciones a ejercicios con asterisco

$2c$ Es falso, ya que si $x = -2 < 1$ entonces $x^2 = (-2)^2 = 4 > 1$.

6 Sí, pero bastaba que viniera uno de los dos para que se hubiera cumplido.

7 Las dos cosas son correctas y aparecen en el lenguaje matemático.

11 /**No (**A **y** B**)**/ es equivalente a /**no** A **o no** B/. No se preparó las matemáticas la tarde del sábado o no se preparó el teórico de conducir esa tarde.

12 Sí es compatible. La implicación /**A** $\Rightarrow$ **B**/ es verdadera siempre que **A** es falsa, tanto sea **B** verdadera o falsa. En este caso, la proposición **A** es *Pierde el Granada* y la proposición **B** es *Pepe será muy infeliz*.

$14c$ Hipótesis: $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$. Tesis: $\left\{ \begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \right.$ tiene solución única.

15 Tengo que demostrar que A es falso, ya que si A fuera verdadero y es verdad que $A \Rightarrow B$, B tendría que ser verdadero.

19 Es verdadera. En primer lugar, probemos que si n^2 es par entonces n es par. Escribiendo $n = 2k + r$, con $r = 0$ o $r = 1$, se tiene que $n^2 = (2k + r)^2 = 4k^2 + 4kr + r^2 = 2(2k^2 + 2kr) + r^2$. Como $r^2 = r$ y n^2 es par, se deduce que $r = 0$. Por otro lado, si n es par, entonces $n = 2k$ y, así, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ que es par.

$27c$ $\forall d \in D$, $\forall m \in M$, $\exists p \in P \mid (m$ compra p en $d)$.

$27e$ $\forall d \in D$, $\exists m \in M$, $\exists p \in P \mid (m$ compra p en $d)$.

$27g$ $\exists d \in D, \exists m \in M, \exists p \in P \mid (m$ compra p en $d)$.

29 a) Es cierta. b) Es falsa.

$30a$ 1 y 2 dicen lo mismo y son verdaderas.

$36a$ **P** es falsa: para $x = 1/2$, se tiene que $x^2 - x = -1/4 < 0$.

$36d$ **P** es verdadera: basta tomar para cada x el número $y = \sqrt{1 - x^2}$.