

NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resuelve las siguientes cuestiones.

- a) Determina los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
- b) Encuentra los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.
- c) Halla los números complejos que son iguales al cuadrado de su conjugado.
- d) Encuentra los números complejos cuyo cuadrado coincide con el cuadrado de su conjugado.
- e) Encuentra los números complejos z tales que la suma (respectivamente, la diferencia) de z y su conjugado es nula.
- f) Halla los números complejos cuyos inversos son iguales a sus opuestos.
- g) Representa en el plano $\mathbb{C}$ los siguientes conjuntos de números complejos:
 $A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es imaginario puro}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es real positivo}\}$ y $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \text{ es real negativo}\}$.

2. Representa gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |(-3 + 4i)z| = 10\}, B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -3x + 4y = 0\}, \\ C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -3x + 4y > 0\}, D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z - 3i| = 3\}, \\ E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |x + iy| < 3\}, F = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy - 3i| < 4\}, \\ G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < x < 3\} \text{ y } H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 < y < 4\}.$$

3. Si $z \neq 0$ es un número complejo, prueba que $z, \frac{1}{\bar{z}}, 0, -z, \frac{-1}{\bar{z}}$ están alineados. Decide cuáles están en la misma semirrecta que z de las dos que determina el origen 0. Escribe $-z, 1/\bar{z}, \bar{z}$ y $1/\bar{z}$ en forma módulo-argumental.

4. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tal que $|z| = 1$. Prueba que $z + z^{-1}$ es real y que $\frac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

5. a) Considera $z, w \in \mathbb{C}$ distintos, no nulos y no alineados con 0, y el cuadrilátero $\mathbf{K}$ que tiene como vértices $0, z, w, z + w$. Justifica que $\mathbf{K}$ es un paralelogramo. Calcula las longitudes de los lados de $\mathbf{K}$. Comprueba que las diagonales de $\mathbf{K}$ miden $|z + w|$ y $|z - w|$.

b) *Identidad del paralelogramo.* Prueba que para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se satisface que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interpreta este resultado a la vista del apartado anterior.

6. Calcula las raíces cúbicas de la unidad y represéntalas gráficamente. Calcula el producto de las dos raíces distintas de 1 y el cuadrado de cada una de ellas.

7. Determina las tres raíces cúbicas de -64 y sus seis raíces sextas.

8. Sean $z = 1 - i$ y $w = 1 + \sqrt{3}i$. Determina los números $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $z^p, w^q \in \mathbb{R}$.

9. Determina, en cada caso, los números reales x, y que cumplen a) $x + iy = |x + iy|$,
b) $x + iy = ((\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2)^{8n+3}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $x + iy = \sum_{k=0}^{100} i^k$.
10. a) Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z^2 + z + 1$. Demuestra que las raíces n -ésimas de la unidad distintas de 1 son las soluciones de la ecuación $P(z) = 0$. [Sugerencia: Justifica y usa que $P(z)(z - 1) = z^n - 1$].
b) Si $w = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$, prueba que w satisface la ecuación $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Justifica que $w^4 = \overline{w}$ y que $w^3 = \overline{w^2}$.
c) Calcula $\cos(2\pi/5)$. [Sugerencia: usa el apartado anterior].
11. a) Justifica que si w es raíz de un polinomio $P(z)$ con coeficientes reales, entonces $\overline{w}$ también lo es. Prueba que si w es raíz de multiplicidad $m \geq 2$ de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\overline{w}$ también lo es.
b) Utiliza el apartado anterior para probar que si $P(z)$ es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, al menos una de sus raíces tiene que ser real.
c) Calcula las soluciones de la ecuación $z^7 + z^5 - z^2 - 1 = 0$. [Observa que i es solución].
d) Si $w \in \mathbb{C}$ es distinto de cero, calcula las n soluciones distintas de $z^n = w^n$. [Usa que w es una solución].
12. En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define la relación $\leq$ mediante

$$a + bi \leq c + di \text{ (o, equivalentemente, } c + di \geq a + bi) \text{ si } \begin{cases} a < c \\ \text{o bien} \\ a = c \text{ y } b \leq d \end{cases}$$

- a) Analiza si $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ y si es total o parcial. Comprueba que $-i \leq 0 \leq i$.
b) Recuerda que si x, y son números reales positivos, entonces $x + y$ y xy son también positivos. Para la relación $\leq$ introducida en $\mathbb{C}$, comprueba que se cumple que $z + w \geq 0$ si $z, w \geq 0$. ¿Se satisface que el producto $zw \geq 0$ cuando $z, w \geq 0$?
13. Comprueba las siguientes afirmaciones para la transformación

$$T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto T(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}}$$

- a) $T(T(z)) = z$, para todo $z \neq 0$; $T(z) = z$ si $|z| = 1$ y $|T(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$.
b) Si $z := x + iy \neq 0$ está en la recta $y = x$, entonces $T(z)$ también.
c) Si $z := x + iy$ está en la recta $x = 1$, entonces $T(z)$ está en la circunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$.
d) Si $z \neq 0$ está en la circunferencia $|z - 2| = 2$, entonces $T(z)$ está en la recta $x = 1/4$.
e) Si z está en la circunferencia $|z - 2| = 1$, entonces $T(z)$ está en una circunferencia. ¿En cuál?

14. Describe geométricamente la imagen de un punto cualquiera (x, y) del plano mediante un giro σ de ángulo α y centro un punto $P := (p_1, p_2)$. Prueba que el punto (u, v) resultado de girar (x, y) un ángulo α con centro P cumple

$$u + iv = p_1 + ip_2 + (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))(x - p_1 + i(y - p_2)).$$

Expresa el resultado en forma matricial.

15. (•) Demuestra de modo intuitivo que los giros preservan distancias; es decir, que dado un giro σ y dos puntos A, B del plano, la distancia entre A y B coincide con la distancia entre $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$.
16. Encuentra el transformado del punto del plano $(-1, 3)$ por el giro de ángulo $\pi/4$ y centro el punto $(0, 0)$ y el del punto del plano $(-1, 3)$ por el giro de ángulo $\pi/3$ y centro el punto $(2, 2)$
17. Expresa la ecuación de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio 3 en términos de los números complejos. Calcula la imagen de dicha circunferencia por el giro de ángulo $\pi/4$ y centro el punto $(1, 1)$. Misma cuestión si el centro del giro es el centro de la circunferencia.

En el conjunto $\mathbb{C}$ se define la función exponencial como $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, para todo $z = x + iy$, donde las funciones exponencial, seno y coseno son las funciones reales conocidas.

18. Calcula $e^{i\pi}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$, $e^{\log(2)+i\frac{3\pi}{2}}$ y $e^{\log(4)+i\pi}$.
19. Determina todos los números complejos z tales que $e^z = -1$ y aquellos tales que $e^z = -i$. ¿Existe algún número complejo w tal que $e^w = 0$?

Ejercicios de reserva

20. Dadas $f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1-i)z - 2i$ y $g(z) = 2z^3 + (1+i)z^2 - (3+2i)z - 7 + 16i$ calcula $f(i)$, $f(1-i)$, $g(1+i)$, $g(2-i)$ y $g(2i)$. [Solución: $f(i) = -1 - 2i$, $f(1-i) = -6 - 2i$, $g(1+i) = -14 + 17i$, $g(2-i) = -4 - 8i$ y $g(2i) = -7 - 10i$].
21. a) Halla el valor de $E = (1 + \sqrt{3}i)^n - (1 - \sqrt{3}i)^n$, siendo n un número natural.
b) Halla los valores de n naturales para los que $(1+i)^n$ es un número real positivo.
22. Determina los conjuntos $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3i| = 2\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3ie^{i\pi/4}| = 2\}$ y $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |e^{i\pi/3}z - 3i| = 2\}$.
23. Se consideran un número real $r \in (0, 1)$ y $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < 1$.
a) Describe el conjunto $\{e^{it} + re^{-it} : t \in [0, 2\pi]\}$.
b) Describe el conjunto $\{e^{it} + we^{-it} : t \in [0, 2\pi]\}$. [Sugerencia: si $w = |w|e^{i\theta}$, escribe $e^{it} + we^{-it} = e^{i(\theta/2)}(e^{i(t-\theta/2)} + |w|e^{-i(t-\theta/2)})$].