MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

1. Los Números Reales

1.1. Algunas de estas afirmaciones son ciertas otras falsas. Decide de que tipo es cada una de ellas y justifica la respuesta.

Para cualesquiera enteros positivos p y n se tiene:
a) n^2 es par si y solo si n es par.
b) $(n+p)^2$ es par si y solamente si $(n-p)^2$ es par.
c) si np es impar, entonces $n+p$ es par.
d) si n^2+np+p^2 es par, entonces np es par.
e) si n^2+np+p^2 es par, entonces n y p son pares.

1.2. Demuesta por inducción que:
1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2.$
4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si} \quad r \neq 1.$
6) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}.$

1.3. Sea $p \in \mathbb{Q}, : p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prueba que $p+x$ y px son irracionales, es decir que pertenecen a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1.4. Demuestra que $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es irracional y que $1-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ es algebraico.

1.5. Halla todos los números reales x que satisfacen, en cada caso, las siguientes relaciones:
a) $|2x+3|-1<|x|$ b) $|x(x-4)|<|x-4|-|x|$.

1.6. Resuelve la ecuación: $|2-|x||=2+|x|$.

1.7. Demuestra lo siguiente:
a) Si $ax=a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x=1$.
b) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ c) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.
d) Si $x^2=y^2$, entonces $x=y$ o bien $x=-y$.
e) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.
f) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$.

1.8. Si $0<a<b$ son dos números reales, prueba que se verifica que:

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

1.9. Si $a \leq b$ y para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a + \epsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $b - \epsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

1.10. Sea A un subconjuto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \emptyset$. Prueba que A_0 está acotado y que:

$$\text{ínf}\, A \leq \text{ínf}\, A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

1.11. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} ::: x = a + b \quad \text{donde} \quad a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

y

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} ::: x = \alpha a \quad \text{donde} \quad a \in A\}$$

Prueba que:
i) $\sup A + B = \sup A + \sup B$ ii) $\text{ínf}\, A + B = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$.
iii) $\text{ínf}\, \alpha A = \alpha\, \text{ínf}\, A$ y $\sup \alpha A = \alpha \sup A$ siempre que $\alpha > 0$.
iv) $\text{ínf}\, \alpha A = \alpha \sup A$ y $\sup \alpha A = \alpha\, \text{ínf}\, A$ siempre que $\alpha < 0$.

1.12. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:
1) $\{2, 2'2, 2'22, 2'222, ...\}$ 2) $\mathbb{Z}$ 3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$
4) $\{r \in \mathbb{Q} : 2r^3 - 1 < 15\}$ 5) $\{x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x^2 + x < 2\}$ 6) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$
(*NOTA:* El $\sup A$ se llama máximo si $\sup A \in A$. Si $\text{ínf}\, A \in A$, se le llama mínimo).

1.13. Calcula:
a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ b) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ c) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n, n)$
d) $\displaystyle\bigcap_{n=2}^{\infty}[1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$ e) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$ f) $\displaystyle\bigcap_{n=2}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$

1.14. Determina el interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$. Decide si son abiertos, cerrados o/y compactos:
1) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 2) $[0, 1] \backslash \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 3) $[1, 3)$
4) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ 5) $\{(-1)^n + \frac{1}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N}\}$.

1.15. Representa en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:
1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |3x - 1| \geq y\}$
3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - x| + x > y\}$.

1.16. Decide si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados y/o acotados. determina su interior y su frontera. (Haz previamente un dibujo de cada uno).
1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 0 \quad \text{y} \quad |y| > 2\}$
3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ 4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 2\} \backslash \{(0, 0)\}$.