MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

3. Funciones Continuas

3.1. Halla el dominio de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{|x+5|-|x-7|}$ c) $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$.

3.2. Calcula los siguientes límites:
a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2x-2)}{x^3-1}$
d) $\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$ e) $\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{|x-2|}}$.

3.3. a) Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$, si y solo si $m \geq n$.
¿Cuánto vale este límite?

3.4. En los siguientes cuatro apartados, algunas afirmaciones son verdaderas. Otras son falsas. Justifica cómo es cada una:

1) Para toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfica admite como asíntota a la recta de ecuación $y = x - 1$, se tiene que:
A) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. C) $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0$.
D) Existe $a \in [0,\infty)$ tal que para todo $x \in [a,\infty)$, se verifica que $f(x) \geq 5$.
E) Existe $b \in [0,\infty)$ tal que para todo $x \in [b,\infty)$, se verifica que $f(x) \leq 5$.

2) Sea la función $f(x) = |x| + 1 + \frac{\lg|x|}{x^2}$ y sea l su gráfica. Entonces:
A) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ B) para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) > 0$.
C) l admite el eje OY como eje de simetría.
D) l admite a la recta $y = x + 1$ como asíntota.
E) l admite a la recta $y = x - 1$ como asíntota.

3) Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.
A) La restrición de f al intervalo $[0,1)$ es una biyección de $[0,1)$ sobre $[-1,\infty)$.
B) La restriccióm de f al intervalo $[1,\infty)$ admite una función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to [-1,\infty)$.
C) La ecuación $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ tiene una única solución.
D) Para todo $a < 0$, la ecuación $f(x) = a$ admite dos soluciones diferentes.

4) Existen al menos dos funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que:
A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
B) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$.
C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ni es $+\infty$.
D) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
E) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ni es $\pm\infty$.

3.5. Sea $f(x) = |x| + |x-1| - |2x-1|$ con $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Analizar la continuidad de f. Represéntala gráficamente.

b) Determina $f([0,1])$.

c) Determina $f^{-1}([1/2,1])$.

3.6. Demuestra que el polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ tiene cuatro raíces reales.

3.7. a) Prueba que la ecuación $x^{15} + \dfrac{x^4 - 17x + 13}{(x^2-1)^2} = 0$ tiene al menos una solución.

b) Si $\alpha < \beta$, prueba que la ecuación $\dfrac{x^2+1}{x-\alpha} + \dfrac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α, β).

c) Prueba que la ecuación $x^3 - 37x^2 - 8 = 0$ tiene una raíz mayor que 37. Aproxima dicha raiz con un error menor que 10^{-6}.

3.8. Sea d una dirección en el plano y T un triángulo. Prueba que existe una recta con dirección d de modo que divide al triángulo en dos partes de áreas iguales.

3.9. Un coche recorre 100 kilómetros en 50 minutos sin detenerse. Demuestra que hubo un minuto en el cual recorrió 2 kilómetros.

3.10. Sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado n-1 de modo que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números dados y $i = 1, 2, ...n$.

Encuentra un polinomio de grado 3, P, tal que $P(1) = 3, P(0) = 7, P(1/2) = 2$ y $P(1/3) = 1/4$.

3.11. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Para $c \in (a,b)$, prueba que:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < c\} \leq \inf\{f(x) : x > c\} = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

¿Qué ocurre si f es monótona decreciente?

3.12. Construye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 2 \quad \text{y} \quad f(x) = 1 \quad \text{si } |x| < 1.$$

3.13. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, inyectiva y $f(a) \leq f(b)$ para un par $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. ¿Qué sucede si $f(b) \leq f(a)$?

3.14. Para cada una de las funciones siguientes di cuales están acotadas superior o inferiormente y cuales tienen máximo y/o mínimo.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, en $[0,5]$ b) $g(x) = \dfrac{3}{2+x}$, en $[-3,2]$

c) $h(x) = x + |x|$, en $[-2,2]$ d) $l(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, en $\mathbb{R}$.

3.15. Demuestra que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.