MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

1. Los Números Reales

1.1. A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales: a) $A = \{2n : n \geq 5\}$ b) $\{2k^2 + 7\ : 8 \geq k \geq 2\}$
¿Cuál es el elemento más grande en cada conjunto?

B) ¿Es verdad que si $E \subset \mathbb{N}$ y $E \neq \emptyset$, existe un elemento $a \in E$ de modo que $a \leq b$ para todo elemento $b \in E$?

C) Observa el subconjuto de números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos? ¿Existe alguno que sea el más grande?

1.2. Demuesta por inducción que:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, si $r \neq 1$. 4) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$.

5) Si $n \geq 4$, entonces $2^n \geq n^2$ (**Indicación:** ver antes que $2n^2 \geq (n+1)^2$ para todo $n \geq 4$).

6) Dado un conjunto A de n elementos, prueba que tiene exactamente 2^n subconjuntos.

1.3. Usando que todo número entero $n \in \mathbb{N}$ se descompone en producto de potencias de números primos, prueba que

a) si $p, n \in \mathbb{N}$ y p es un número primo entonces que p divida a n^2 es equivalente a que p divida a n;

b) y que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, siempre que p sea un número primo.

1.4. Sea $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prueba que $p + x$ y px son irracionales, es decir que pertenecen a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1.5. Demuestra lo siguiente:

a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

b) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ c) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

d) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o bien $x = -y$.

e)Si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, prueba que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ¿siempre?

1.6. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ b) $\dfrac{x^2 + 2a + a^2}{x + a}$ c) $\dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$.

1.7. Encuentra el fallo en la siguiente "demostración". Si $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y por tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Sacando factor común $(x-y)(x+y) = y(x-y)$ y simplificando $x + y = y$. Como $x = y$, escribimos $2y = y$ y de nuevo simplificando $2 = 1$.

1.8. Dibuja los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$.

1) $\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 2) $[1,3) \bigcup (2,\pi]$ 3) $\{(-1)^n + \frac{n}{n+1},\quad n \in \mathbb{N}\}$.

1.9. Halla todos los números reales x que satisfacen, en cada caso, las siguientes relaciones:
a) $x^2-4 \geq |2x+4|$ b) $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq 3$ c) $\sqrt{1+x} < 1+\frac{1}{x}$.
d) $|x-1|+|x-2| > 1$ e) $x^3(x^6-62)(x+3)^2 < 0$.

1.10. Resuelve las ecuaciones: $|x-3|+|x-7| = 2$, $|x-3|+|x-7| = 4$ y $||3-x|-|x|| = |x|+1$.

1.11. En la ecuación $y = 2x+|2-x|$, despeja x en función de la y.

1.12. Si $x > 0$, prueba que entonces es cierto que $x+\frac{1}{x} > 2$.

1.13. Si $a \leq b$ y para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a+\epsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $b-\epsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

1.14. Sea A un subconjuto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \emptyset$. Prueba que A_0 está acotado y que:

$$\operatorname{ínf} A \leq \operatorname{ínf} A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

1.13. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} : x = a+b \quad \text{donde} \quad a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

y

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a \quad \text{donde} \quad a \in A\}$$

Prueba que:
i) $\sup A+B = \sup A+\sup B$ ii) $\operatorname{ínf} A+B = \operatorname{ínf} A+\operatorname{ínf} B$.
iii) $\operatorname{ínf} \alpha A = \alpha \operatorname{ínf} A$ y $\sup \alpha A = \alpha \sup A$ siempre que $\alpha > 0$.
iv) $\operatorname{ínf} \alpha A = \alpha \sup A$ y $\sup \alpha A = \alpha \operatorname{ínf} A$ siempre que $\alpha < 0$.

1.15. Sea α una cota superior de $A \subset \mathbb{R}$.
A) Prueba que si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \sup A$.
B) Prueba que $\alpha = \sup A$ es equivalente a decir que para todo número $r > 0$ existe $a \in A$ de modo que $\alpha - r \leq a$.

1.16. Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos:
1) $\{3, 3'3, 3'33, 3'333, ...\}$ 2) $[3, \frac{7}{3}] \bigcap (\frac{5}{4}, 8]$ 3) $\{x \in \mathbb{R} : x = 1-\frac{1}{r},$ con $r > 0\}$.
4) $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = c, a_1a_2a_3....a_n...$ se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

1.17. Representa en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |3x-1| \geq y\}$ 4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2-x|+x > y\}$.
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.