MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

2. Sucesiones y Series

2.1. Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1} = 0$;
2. si $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3}$. Halla un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tenga que $|\dfrac{n^2}{3n^2+1} - \dfrac{1}{3}| < 10^{-4}$.

2.2. De la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es su límite? Razona la respuesta. Pon un ejemplo.

2.3. Determina como son los conjuntos siguientes y calcula los respectivos supremos e infimos si existen.

a)$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2n-1}{n+3}]$ b)$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{n^2}{6n^2+2}, \dfrac{n^2}{3n^2+1}]$ c)$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{n^2}{6n^2+2}, \dfrac{n^2}{3n^2+1}]$

2.4. Sea $x \in \mathbb{R}$ cuya forma decimal es $x = r, a_1a_2...a_na_{n+1}......$. Se considera la sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} = (r, a_1...a_k)_{k=1}^{\infty}$. Prueba que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

2.5. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ se dice que converge a infinito ($\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$) si para todo $M > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n > M$.
a) ¿Qué significa entonces que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$?
b) Prueba que toda sucesión no acotada tiene una subsucesión convergente a ∞ o a $-\infty$.
c) Prueba que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
d) Si $x > 1$, comprueba que $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$. Deduce que si $x \in (0,1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

2.6. Calcula los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{2^{n+2}+5^{n+1}}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}-1}{2\sqrt{n}+2}$.
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{(n^2+1)} + \dfrac{n-1}{(n^2+2)} + ... + \dfrac{n-1}{(n^2+n)}\right)$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + ... + \dfrac{1}{n^2-1})$.

2.7. a) Se considera una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ creciente de modo que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2} = r.$$

Prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.
b) Encuentrar un ejemplo de una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ **no** convergente de modo que exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n + y_{n+1}}{2}.$$

2.8. Prueba que la sucesión $((1+1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada; por tanto convergente. Se define el número real e como:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Calcula los límites de las sucesiones siguientes:
a) $((1+\frac{1}{n+3})^{\frac{n}{3}})_{n=1}^{\infty}$ b) $((1-\frac{1}{n-1})^{2n})_{n=2}^{\infty}$ c) $((\frac{n^2+2n}{n^2+n})^{2n})_{n=1}^{\infty}$.

2.9. Sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 1} < \sqrt{\frac{77}{4}}\}$. Una de las siguientes sucesiones tiene todas sus entradas fuera de A, pero sin embargo converge a un punto de A. ¿Cuál es la sucesión?
a)$(\frac{3n-1}{n})_{n=1}^{\infty}$ b)$(\frac{-2n+3}{3n})_{n=1}^{\infty}$ c) $(\frac{2n+3}{3n})_{n=1}^{\infty}$ d) $(\frac{1}{2n})_{n=1}^{\infty}$

2.10. Sucesiones recurrentes: A) Determina si las sucesiones siguientes son convergentes o no.
a1) $a_{n+1} = a_n\frac{n}{n+7}$, con $a_1 = 7$. a2) $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$, con $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ (**Indicación:** ver que es de Cauchy). a3) $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$, con $x_1 > 1$.
a4) $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.
B) Comprueba que las sucesiones siguientes son convergentes y calcula su límite.
b1) $x_{n+1} = \frac{1}{3-x_n}$ con $x_1 = 2$. b2) $x_{n+1} = \frac{x_n^2+m}{2x_n}$ con $x_1 = m > 1$ (Verifica que estamos ante un algoritmo para calcular $\sqrt{m}$).

2.11. De cada una de las dos sucesiones siguientes se pide determinar ¿si está acotada? ¿Si es convergente? ¿Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$? Y también, encontrar una subsucesión convergente especificando su límite.

$$a)x_n = \begin{cases} p+\frac{1}{k} & \text{si} \quad n = p^k \quad \text{con } p \text{ primo y } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$b)x_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & \text{si} \quad n = 3k \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \text{si} \quad n = 3k+1 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{1-x_{n-2}+x_{n-1}} & \text{si} \quad n = 3k+2 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.12. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

1) con solo un dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción.

2) con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide: a) definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. b) Estudiar la monotonía y acotación de la misma. c) Probar por inducción que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo n. d) Deducir que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2} = 1$.

2.13. a)Calcula la suma de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-2^n}{16^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+5}}{3^{n+3}}$.
b) Suma $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}+\cdots(-1)^{n-1}(\frac{2}{\pi})^n+\cdots$
c) Se considera la sucesión $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n^2}$, con $a_1=2$. . Hay que probar que es una sucesión de Cauchy y después calcular su límite. **(Indicación:** Comprueba que $|a_{n+1}-a_n|\leq\dfrac{6}{16}|a_n-a_{n-1}|$. Después intenta acotar $|a_{n+k}-a_n|$ y usa que la sucesión $((\frac{6}{16})^n)_{n=1}^{\infty}$ es geométrica).

2.14. Sea (u_n) una serie geométrica de primer término $u_0=1$ y razón $q\in(0,\infty)$. Llamemos $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Justificar la certeza o falsedad de las siguientes expresiones:
a) Si $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $S_n>2009$, entonces $q>1$.
b) Si $q<1$, entonces $\lim_{n\to\infty}u_n=q$
c) Si $q>1$, entonces la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada.
d) Si $\lim_{n\to\infty}S_n=3$, entonces $q=1/2$.
e) Si $q=2$, entonces $S_4=15$.

2.15 Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n=b_n-b_{n+1}$.
1) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente si y solo si la sucesión (b_n) es convergente y se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-\lim_{n\to\infty}b_n$$

2) prueba que para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se puede encontrar una sucesión (b_n) que verifica las condiciones del apartado anterior.
3) Aplica 1) al cálculo de la suma de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}\quad \text{y}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2}).$$

2.16. Estudia la convergencia de las series:

1) $\displaystyle\sum_{n=21}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n n^a$ $a>0$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2-\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times3\times5\cdots\times(2n+1)}{3\times6\times\cdots\times3n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$ $k>0$ 9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p\ln n}$ $p>0$ 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$.

2.17. Determina si cada una de las series siguientes es absolutamente convergente, condionalmente convergente o ninguna de ambas cosas:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^k}$ $k>0$ b) $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+....$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/2+\cos(n\pi)}{n^2}$

2.18 Si $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, entonces

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
e) Con esta condiciones no está determinado el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.19. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, donde $a_1 = 1, a_2 = 3$ y $a_n = 3 \forall n > 2$, representa el número real:
a) $0,13$ b) $0,14$ c) $2/15$ d) $0,134$.

2.20. Un sabio pirata decidió enterrar su tesoro en la isla Calavera en la posición límite de los puntos siguientes: partiendo del único manantial de la isla se avanza 1 hacia el este, después la mitad hacia el norte, de nuevo la mitad hacia el este, de nuevo al norte la mitad que en el paso anterior y así sucesivamente. ¿Sabrías donde encontrar el tesoro?

2.21. Sean las series: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}(-1)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k+1}$. Prueba que todas son absolutamente convergentes en todo $x \in \mathbb{R}$. (***Se verá que:*** $e^x, \cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son las sumas, respectivamente, de las series anteriores).

2.22. Calcula el dominio de las funcines
1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ 2) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$ 3) $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(n\pi)x^n}{n^2}$.