MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

3. Funciones Continuas

3.1. En los siguientes casos, encuentra $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

A) $f(x) = 1/x$, $x_0 = 2$ y $\epsilon = 1/2$ B) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$ y $\epsilon = 1/3$

C) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$, $x_0 = 2$ y $\epsilon = \frac{1}{n}$.

3.2. De las siguientes funciones, calcula su dominio y los límites (o límites laterales) relevantes para representar la gráfica de cada función.

a) $f(x) = \frac{1+x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{|x+5| - |x-7|}$ c) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}}$ e) $f(x) = |x| + 1 + \frac{\log|x|}{x^2}$ e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3.3. Calcula los correspondientes límites laterales y determina si las siguientes funciones son continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \le 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1+x} & \text{si } x < -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

3.4. Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$, si y solo si $m \ge n$. ¿Cuánto vale este límite?

3.5. Algunas afirmaciones de las que siguen son verdaderas. Otras son falsas. Justifica cómo es cada una:

Existen al menos dos funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que:

A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

B) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$.

C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ni es $+\infty$.

D) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

E) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y no existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ni es $\pm\infty$.

3.6. Utiliza que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$

3.7. Encuentra la función f^{-1} y su dominio en los casos
a) $f(x) = 2^x = e^{x \log 2}$ b) $f(x) = \frac{2}{4x-5}$
c) $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}e^{-x}),\ x \geq 0$ d) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$.

3.8. sea $P(x) = x^n + ... + a_1x + a_0$ una función polinómica. Prueba que
a) si P es de grado par, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \infty$,
b) si P es de grado impar, entonces $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$,
c) si P es grado impar, entonces la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una ecuación.

3.9. Para cada una de las siguientes funciones f polinómicas encuentra un entero $m \in \mathbb{Z}$ de modo que la ecuación $f(x) = 0$ tenga una solución en $[m, m+1]$.
a) $f(x) = x^3 - x + 3$ b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$
a) $f(x) = x^5 + x + 1$ d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3.10. Sea $f : [0,2] \to [0,2]$ una función continua de modo que $f(0) = f(2)$. Demuestra que existen dos puntos $x, y \in [0,2]$ a los cuales les pasa que $|x-y| = 1$ y que $f(x) = f(y)$.

3.11. Se consideran las ecuaciones $f(x) = 0$ dadas por las funciones siguientes. ¿Cuáles tienen solución y cuáles no? Justifica tu respuesta.
a) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 4}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 4}{(x^2 - 11)^2}$
c) $f(x) = |\ln|x|| - (3x - 6)$ d) $f(x) = \dfrac{x^15 + 7x^2 - 12}{\ln x} - x^2$.

3.12. Sea d una dirección en el plano y T un triángulo. Prueba que existe una recta con dirección d de modo que divide al triángulo en dos partes de áreas iguales.

3.13. Un coche recorre 100 kilómetros en 50 minutos sin detenerse. Demuestra que hubo un minuto en el cual recorrió 2 kilómetros.

3.14. Sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado n-1 de modo que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números dados y $i = 1, 2, ...n$.
a) Encuentra un polinomio de grado 2, P, de modo que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(2) = 6$
b) Encuentra un polinomio de grado 3, P, tal que $P(-1) = 3, P(0) = 4, P(1/2) = 2$ y $P(2/3) = -3$.

3.15. Construye una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que, en cada caso, verifique las propiedadesde:
a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = 1$ para todo $x \in [-3, 3]$, $f(x) < 0$ si $|x| > 5$ y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

3.16. Para cada una de las funciones siguientes di cuales están acotadas superior o inferiormente y cuáles tienen máximo y/o mínimo. Haz un boceto de sus gráficas.
a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, en $[-5, 5]$ b) $g(x) = \dfrac{3+x}{2+x}$, en $[-3, 2]$
c) $h(x) = \dfrac{x}{2} + |x|$, en $[-2, 2]$ d) $l(x) = \dfrac{1}{1 + |x-1|} + |2 - x|$, en $\mathbb{R}$.