MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

4. La Derivada de una Función. Aplicaciones.

4.1. Supongamos que una función f satisface $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. De la función g sabemos que $g(0) = 1$ y que $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcula $f(0)$.

b) Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

4.2. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función para la cuál existe una constante $M > 5$ de modo que

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x, y \in (a,b).$$

Si $c \in (a,b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c, f(c)$ **no** puede ser:

a) $y = x + f(c) - c$ b) $y = \frac{M^2+1}{2M}(x-c) + f(c)$

c) $y = -\frac{M}{3}(c-x) + f(c)$ d) $y = -\frac{M}{4}x + f(c) + \frac{Mc}{4}$.

4.3. Sea $y = ax + b$ la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(\ln|x|)$ por el punto $(e, 0)$. Entonces $b = ...$

a) 0 b) $e + 1$ c) $\frac{1}{e} - 1$ d) -1.

4.4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ b) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$

d)$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$ e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\cos x + \operatorname{sen} x)$ f) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}$.

4.5. Se definen las funciones **coseno hiperbólico** por $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, **seno hiperbólico** por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y **tangente hiperbólica** por $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

1) Calcula las derivadas de estas funciones.

2) Comprueba que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, $\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ y que $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x$.

3) Halla las derivadas de las respectivas funciones inversas.

4.6. Halla f' en función de g' en los siguientes casos:

a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(xg(x))$

d) $f(x) = g(x)(x - a)$ e) $f(x) = g(a)(x - a)$ f) $f(x + 3) = g(x^2)$.

4.7. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x \ln x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln(e\cos(x-1)) & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Dibuja la gráfica aproximada de cada función y estudia sus máximos y sus mínimos.

4.8. Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2 - x$. Al desconectar el cohete, viajará a lo largo de la tangente a la curva por el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(3,2)$? ¿Y para llegar al $(3,-2)$?

4.9. Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.

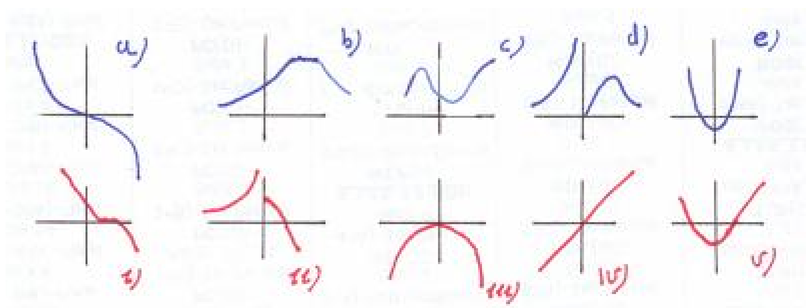

Figura 1

4.10. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{|x|\ln|x|}$ b) $f(x) = xe^{2x} - 1$ c) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 - x}$

e) $f(x) = \arctan(3x - x^3)$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-2}}$ h) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 \ln x$ i) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$.

4.11. Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. ¿Qué es mayor: e^π o π^e?

4.12. Calcula los máximos y los mínimos de la función f si su derivada f' tiene la gráfica siguiente:

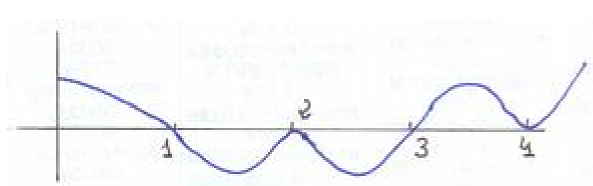

Figura 2

4.13. Una gota esférica de rocío se evapora a un ritmo proporcional al área de su superficie. Prueba que el radio decrece a un ritmo constante (**Indicación:** el volumen de la esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $S(r) = 4\pi r^2$; la hipótesis lo que dice es que $V' = -KS$ donde K es un constante positiva, y donde la derivada está referida la tiempo).

4.14. Sea $f(x) = |4x - 3| - x^2$. Determina los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-3, 3]$. ¿Existe $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$ para el cuál $f(x_0) = 0$?

4.15. Halla el punto de la parábola $x^2 = 4y$, de abscisa no negativa, cuya distancia al punto $(0, \frac{3}{2})$ sea mínima.

4.16. En un rectángulo de 4m de perímetro se sustituyen cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre que valores está comprendida el área de esta nueva figura?

4.17. Un fabricante envasa en botes cilíndricos de un litro de capacidad lo mejor de la cosecha de tomates de su pueblo. ¿Qué dimensiones tienen las latas para que el coste del material sea mínimo?

4.18. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$ 2) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x^2 + x < 2\}$ 3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$
(*NOTA:* El $\sup A$ se llama máximo si $\sup A \in A$. Si $\inf A \in A$, se le llama mínimo).

4.19. Si f es derivable en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$, calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} - \frac{3x-4}{x+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} = 0.$

4.20. Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4.100m. de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70Km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?

4.21. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y derivable. Si $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, prueba entonces que la ecuación $f(x) = x$ tine una única solución en $[0, 1]$.

4.22. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$. Se toman $x_0, a, b \in [0, \pi]$, con $x_0 \leq a < b$. Prueba que $f'(x_0) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.23. Se consideran las funciones, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprueba que existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pero que sin embargo no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.24. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\cos^2 x\frac{\pi}{2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}+e^x-2}{e^{2x}-3e^x+2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\operatorname{sen}^3 x + xe^{x^2}}{x+\cos^2 x - e^x}$.

4.25. Prueba que si f es derivable en a, entonces $f'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$. Justifica que si existe $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable en a.

4.26. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Prueba que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$