

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

5. Aproximación de Funciones por Polinomios.

5.1. Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 de las siguientes funciones centrados en los puntos que se indican.

- a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrado en $a = \pi$. b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$.
c) $f(x) = (\ln x)^2$, $a = 1$. d) $f(x) = e^x$, $a = 1$.
e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $a = 0$. f) $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$, $a = 0$.

5.2. Determina el origen de las siguientes expresiones.

- a) $\operatorname{sen} x \simeq 1+x$ si $x \simeq \pi$. b) $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ si $|x| \simeq 0$.
c) $(\ln x)^2 \simeq (x-1)^2$ si $x \simeq 1$. d) $e^x \simeq e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ si $x \simeq 1$.
e) $\frac{x}{1+x^2} \simeq x$ si $|x| \simeq 0$. f) $\frac{\cos x}{1+x} \simeq 1-x + \frac{x^2}{2}$ si $|x| \simeq 0$.

5.3. Encuentra una estimación del error máximo que se puede cometer al tomar:

- 1) $1+x$ en lugar de $\operatorname{sen} x$ si $x \in [3, 1, 3, 2]$.
- 2) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ en lugar de $\sqrt{1+x}$ si $x \in [-0, 2, 0, 2]$.
- 3) $(x-1)^2$ en lugar de $(\ln x)^2$ si $x \in [0, 7, 1, 3]$.
- 4) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0, 8, 1, 2]$.
- 5) $e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$ en lugar de e^x si $x \in [0, 4, 1, 6]$.

5.4. Explica la siguiente desigualdad

$$|\operatorname{sen}(a+h) - (\operatorname{sen} a + h \cos a)| \leq \frac{1}{2}h^2.$$

5.5. Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se curva formando la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Demuestra que, para valores pequeños de $|x|$, la forma que toma el hilo puede ser representada por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

5.6. Calcula las series de Taylor de las funciones siguientes centradas en los puntos que se indican.

- a) $f(x) = e^x$, centrada en $a = 1$. b) $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, $a = 1$.
c) $f(x) = e^x(x-1)^5$, en $a = 1$. d) $f(x) = \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$. e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi$.
f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi)}$, en $a = \pi$. g) $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$.
h) $f(x) = \ln(1+x^2)$, $a = 0$. i) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $a = 0$.

5.7. Calcula los siguientes números con un error inferior a 10^{-3} ;

- 1) $\operatorname{sen} 1$.
- 2) e^{-1} .
- 3) $\arctan 1$.
- 4) $\ln 2$.