MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

6. La integral. Cálculo de Primitivas

6.1. Para las funciones siguientes, determina si existe su integral y en su caso calculala, usando la definición de integral (o el criterio de Integrabilidad de Riemann).

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,2]\setminus\{1\} \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,2]\setminus\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\} \\ 2 & \text{si} \quad x = \frac{k}{5}, \quad k = 1,2,3,4. \end{cases}$$

6.2. Calcula la integral de las siguientes funciones; antes dibuja las gráficas de las mismas.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 3x-3 & \text{si} \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

b) Si $[x]$ es la parte entera de $x \in \mathbb{R}$ (el mayor entero menor que x), se considera $f(x) = x[x]$. Calcula $\displaystyle\int_1^n f(x)dx$.

6.3. Supongamos que $f \geq 0$ y que f es contina en $[a,b]$. Si $\int_a^b f = 0$, prueba que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$.

6.4. Prueba que $\displaystyle\frac{\pi}{2} \leq \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx \leq \pi$.

Encuentra cotas superiores e inferiores para las siguientes integrales:
a) $\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$ b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ c) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

6.5. Usa argumentos geométricos para determinar si las siguientes expresiones son ciertas o no.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x dx$. b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = 1 - \int_0^1 x^3 dx$.

c) Sea $y = f(x)$ la tangente a la curva $y = -x^2 + 4$ por el punto $(\frac{1}{2}, 4 - \frac{1}{4})$. Se considera la expresión $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 -x^2 + 4dx$.

6.6. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. En los siguientes casos encuentra una expresión explícita de la función F.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\ 3 & \text{si} \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\ 3-x & \text{si} \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

En ambos casos, ¿es F una función continua?

6.7. Deriva F, definida sobre $[0,2]$ del modo siguiente:

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x+1)} \sqrt{t^2+1}dt$. 2)$F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+1} \frac{1+t}{1+t^2}dt$.

3) $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \frac{t}{t^2+1}dt$. 4) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt$

6.8. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, prueba que existe $c \in [a,b]$ de modo que $f(c) = g(c)$.

6.9. Representa las gráficas de las funciones:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x -3t^2 + 24t - 45dt, \quad x \in \mathbb{R}$. b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x+1)} e^{t^2} dt, \quad x \geq 0$.

c)$F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \operatorname{sen}^8 t dt, \quad x \in [0,\pi]$.

6.10. Si la función f es continua en $[0,1]$, prueba que: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right) = \int_0^1 f.$

Utiliza lo anterior para calcular $\int_0^1 xdx$ y $\int_0^1 x^2dx$. (**Indicación:** usa el ejercicio 1.2. de la Hoja 1.).

6.11. Utiliza el ejercicio anterior para expresar cada uno de los siguientes límites como una integral. Resuelvelos usando primitivas.

a) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k+n)-\ln(n)}{n})$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\sum_{k=1}^{n}(k+n)(k-n))$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2})$.

6.12. Calcula las siguientes primitivas elementales.

a) $\int xdx$ b) $\int x^3dx$ c) $\int 3x^5+2x^3+7dx$ d) $\int(x-2)^2dx$

e) $\int\cos xdx$ f) $\int\operatorname{sen} xdx$ g) $\int 3\cos x+2\operatorname{sen} xdx$ h) $\int 2x\cos x^2dx$

i) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$ j) $\int\frac{1}{x^k}dx$ con $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ k) $\int e^xdx$ l) $\displaystyle\int\frac{2x}{(x^2-1)^3}dx$

m) $\int\cosh xdx$ n) $\int\operatorname{senh} xdx$ ñ) $\int 3\cosh x+2\operatorname{senh} xdx$ o) $\int\cosh x\cosh(\operatorname{senh} x)dx$

p) $\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx$ q) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx$ r) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx$ s) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ t) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6.13. Calcula las siguientes primitivas usando la Regla de Integración por Partes.

1) $\int xe^xdx$ 2) $\int x\operatorname{sen} xdx$ 3) $\int x\cos xdx$ 4) $\int\frac{x}{e^x}dx$

5) $\int\frac{\lg x}{x^3}dx$ 6) $\int e^x\operatorname{sen} xdx$ 7) $\int\operatorname{arc\,tg} xdx$ 8) $\int\operatorname{arc\,sen} xdx$.

6.14. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

1) $\displaystyle\int\operatorname{sen}^n xdx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

2) $\displaystyle\int\cos^n xdx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$, $n>2$ y par.

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$.

6.15. Comprueba las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\ln|\tan\frac{x}{2}|$ b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$

6.16. Obtén, mediante un cambio de variable, una primitiva en los casos siguientes:

1) $\displaystyle\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{e^x}}dx$ 4) $\displaystyle\int\frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}dx$

5) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$ 6) $\displaystyle\int\frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 7) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

8) $\displaystyle\int\tan(\sqrt{x-1})\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. 9) $\displaystyle\int x^2\cosh(x^3+3)dx$.

6.17. Calcula las siguientes primitivas con el cambio de variable que se indica.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x)}$; ($x=\operatorname{sen}^2 t$, y usa 7.1.). b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}dx$; ($x=\frac{1}{t}$).

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}dx$; ($x=-\ln t$). d) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}dx$; ($t=\sqrt{x+1}$).

e) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$; ($x=\tan x$, y usa 7.1.). f) $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}dx$; ($x=a\operatorname{senh} t$, usa 4.5.).

6.18. Calcula las siguientes primitivas utilizando las identidades trigonométricas "adecuadas."
a) $\int \cos^2 x dx$. b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$. c) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.
d) $\int \tan^2 x dx$. e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} dx$. f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

6.19. Calcula las primitivas siguientes.
1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$. 3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-7x+13} dx$.
4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-6x+10} dx$. 5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$.

6.20. Calcula las primitivas de las funciones racionales siguientes.
1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$. 2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$. 3) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$,(usa 6.14.).

6.21. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y de periodo p. Demuestra la igualdad

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

6.22. a) Calcula $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x dx$.
b) Análogamente, prueba que si $F = \int f$, entonces

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).$$

c) Usa lo anterior para calcular $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1} dx$.

6.23. Calcula una primitiva en los siguientes casos:
1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$. 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\tan x}$.
6) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$. 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. 8) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. 9) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$.
10) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x} dx$. 11) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x \int_0^x \operatorname{sen} t dt) dx$.