Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés

Editores

Marco Castrillón López

María Isabel Garrido Carballo

Jesús Ángel Jaramillo Aguado

José María Martínez Ansemil

José Rojo Montijano

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

PRÓLOGO

El pasado 28 de febrero de 2012 se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM una Jornada de Homenaje a Joan Tarrés, con motivo de su jubilación. El acto contó con la presencia de un buen número de amigos, compañeros, colegas y familiares de Joan, quienes tuvimos así ocasión de mostrarle nuestro aprecio y reconocimiento. La Jornada se abrió con una presentación a cargo del profesor José Manuel Rodríguez Sanjurjo, director del Departamento de Geometría y Topología de la UCM. Siguieron a continuación las conferencias de los profesores Antonio Costa (UNED), Marco Castrillón (UCM) y José Rojo (USP-CEU). Finalmente, el acto concluyó con unas emotivas palabras del propio Joan, que se recogen aquí.

En el presente volumen se incluye un amplio conjunto de contribuciones matemáticas, de muy diversa temática y planteamiento, presentadas por todos aquellos que han querido sumarse a esta iniciativa y colaborar de este modo en el Homenaje. Nuestra labor aquí, como editores, ha consistido en reunir, organizar y preparar el material. Queremos agradecer profundamente a todos los autores por su generosa contribución, su disponibilidad y su paciencia a lo largo de todo este proceso. También nos gustaría agradecer a la Revista Matemática Complutense, por habernos permitido utilizar la plantilla de estilo con la que los autores han presentado sus colaboraciones.

El Comité Editorial:

Marco Castrillón
María Isabel Garrido
Jesús Ángel Jaramillo
José María Martínez Ansemil
José Rojo

ÍNDICE

Lie Algebras obtained as extensions by derivations of the nilpotent algebra $\mathcal{L}_{5,3}$ 1
Ancochea Bermúdez, J.M., Campoamor Stursberg, R., García Vergnolle, L.

An extension of Whitney approximation theorem 17
Andradas, C., Aneiros, E., Díaz Cano, A.

Analtyic completion of an open set 27
Ansemil, J.M., López-Salazar, J., Ponte, S.

Topological classification of finite groups acting on compact surfaces 39
Bujalance, E., Cirre, F.J.

Disonancia, escalas y Matemáticas 51
Castrillón López, M., Dominguez, M.

Cubismo y constructivismo 61
Corrales, C.

Ultrametric spaces, valued and semivalued groups from the Theory of Shape 81
Cuchillo-Ibáñez, E., Morón, M.A., Ruiz del Portal, F.R.

Remarks on the Monge-Ampère equation: some free boundary problems in Geometry 93
Díaz, G., Díaz, J.I.

Fórmulas trigonométricas para poliedros esféricos e hiperbólicos 127
Díaz, R.

Singular 2-weebs. An introduction 141
Etayo, F.

On the minimum genus problem on bordered Klein surfaces 149
Etayo, J.J., Martínez, E.

Sobre las propiedades de la frontera exterior de las imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$ 159
Fernando, J.F., Gamboa, J.M., Ueno, C.

Some classes of Bounded sets in Metric Spaces 179
Garrido, M.I., Meroño, A.S.

Sobre las propiedades de la frontera de las imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$

José F. Fernando, J.M. Gamboa

y Carlos Ueno

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
josefer@mat.ucm.es
jmgamboa@mat.ucm.es

Departamento de Matemáticas
IES La Vega de San José
Paseo de San José, s/n
Las Palmas de Gran Canaria
35015 Las Palmas, Spain
carlos.ueno@terra.es

Dedicado al Prof. Juan Tarrés Freixenet con motivo de su jubilación académica.

ABSTRACT

We present several obstructions for a subset $\mathcal{S}$ of $\mathbb{R}^m$ to be the image of an euclidean space $\mathbb{R}^n$ via a polynomial or a regular map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, in terms of the "geometry" of its exterior boundary $\delta\mathcal{S} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$.

Key words: Aplicación polinómica, aplicación regular, imagen polinómica, imagen regular, frontera exterior, semilínea paramétrica, semilínea regular, aplicación propia.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 14P10; secondary: 14Q99.

1. Introducción

A principios de los años 90 del siglo pasado, el segundo autor propuso en el congreso Reelle Algebraische Geometrie celebrado en Oberwolfach [G] el problema de determinar qué subconjuntos de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ son imagen de otro espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ por una aplicación polinómica o regular.

Recordemos que una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *regular* si existen polinomios $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n]$ tales que $f_0(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\, x \mapsto \frac{1}{f_0(x)}(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Si podemos elegir $f_0 := 1$ diremos que f es *polinómica.* Evidentemente $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ es conexo, y el Teorema de Tarski-Seidenberg, [S, T], nos asegura que $\mathcal{S}$ es un conjunto semialgebraico. Recordemos que un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^m$ es *semialgebraico* si

Los dos primeros autores están subvencionados por los proyectos de investigación GR MTM2011-22435 y GAAR Grupos UCM 910444. El tercer autor es colaborador externo del proyecto de investigación GR MTM2011-22435.

es expresable como combinación finita de operaciones booleanas (unión, intersección y complementario) aplicadas a conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) > 0\}$, donde $g \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$. Tienen especial interés los conjuntos semialgebraicos *básicos,* que son aquéllos que se pueden escribir como

$$\{x \in \mathbb{R}^m : g_1(x) * 0, \ldots, g_r(x) * 0\},$$

donde cada $g_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m]$ y $*$ representa uno cualquiera de los símbolos $>$ o $\geq$.

Es natural preguntarse acerca de la utilidad de que un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ sea imagen de una aplicación polinómica o regular $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Señalemos algunos ejemplos.

(1) Para abordar problemas de optimización sobre $\mathcal{S}$, pues los puntos de $\mathcal{S}$ en los que g alcanza sus valores máximos y mínimos, absolutos o relativos, son las imágenes por f de los puntos en los que alcanza dichos valores la composición $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

(2) Para caracterizar las funciones polinómicas o regulares $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ cuya restricción $g|_{\mathcal{S}} \geq 0$, ya que esta condición equivale a que $g \circ f \geq 0$ lo que, por la solución de E. Artin al Problema 17 de Hilbert, equivale a que exista un polinomio $h \in \mathbb{R}[\mathtt{x}]$ no nulo tal que el producto $h^2 \cdot (g \circ f)$ sea suma de cuadrados de polinomios.

(3) Para construir trayectorias en $\mathcal{S}$ de cierta naturaleza, porque para trazar una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{S}$ es suficiente trazar otra curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, que por composición proporciona la curva $\alpha := f \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{S}$.

Para abreviar la exposición introducimos ahora las nociones de *dimensión local y global* de un conjunto semialgebraico, y algo de terminología. Todo subconjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ se escribe, [BCR, 2.3.6], como unión finita de conjuntos semialgebraicos $\mathcal{S}_i$ cada uno de ellos homeomorfo a un cubo abierto $(0,1)^{d_i}$. Se define la *dimensión* de $\mathcal{S}$ como el máximo de los enteros d_i, y se denota $\dim(\mathcal{S})$. Es muy sencillo probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica, entonces $\dim(f(\mathbb{R}^n)) \leq n$; véase, por ejemplo, [BCR, 2.8.8].

Además, fijado un punto p en $\mathcal{S}$ existe, por [BCR, 2.8.10], un subconjunto abierto y semialgebraico $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a p tal que $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{S}) = \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{S})$ para cada entorno semialgebraico $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de p en $\mathbb{R}^m$. Se denota $\dim_p(\mathcal{S}) := \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{S})$, y se llama *dimensión local* de $\mathcal{S}$ en p. Como es de esperar, la dimensión de $\mathcal{S}$ coincide con el máximo de las dimensiones locales $\dim_p(\mathcal{S})$ cuando $p \in \mathcal{S}$, y además $\dim(\mathcal{S}) \leq m$. De lo anterior se desprende, véase por ejemplo [BCR, 2.8.12], que para cada entero $0 \leq k \leq \dim(\mathcal{S})$ el conjunto

$$\mathcal{S}_{(k)} := \{p \in \mathcal{S} : \ \dim_p(\mathcal{S}) = k\}$$

es un conjunto semialgebraico. Se dice que $\mathcal{S}$ *tiene dimensión pura* si $\mathcal{S}_{(k)}$ es vacío para cada entero $0 \leq k < \dim(\mathcal{S})$. Para cada conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ denotaremos

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\mathcal{S}) : &= \inf\{n \geq 1 : \exists\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \text{ polinómica tal que } \ f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}, \\ \mathrm{r}(\mathcal{S}) : &= \inf\{n \geq 1 : \exists\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ \text{ regular tal que } \ f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, la condición $\mathrm{p}(\mathcal{S}) := +\infty$ caracteriza la no representabilidad de $\mathcal{S}$ como imagen polinómica de ningún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y la igualdad $\mathrm{r}(\mathcal{S}) := +\infty$ tiene el significado análogo para aplicaciones regulares.

Es evidente que $\dim(\mathcal{S}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{S}) \leq \mathrm{p}(\mathcal{S})$, y ambas desigualdades pueden ser estrictas. Por ejemplo, se demuestra en [F] que si $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto no acotado, entonces $1 = \dim(\mathcal{S}) < \mathrm{r}(\mathcal{S}) = \mathrm{p}(\mathcal{S}) = 2$, y que si $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$ es un intervalo de la forma $\mathcal{S} := (a, b]$ con $a < b$, entonces $1 = \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$.

Las curvas semialgebraicas $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ tales que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 1$ desempeñan un papel muy relevante y se denominan *semilíneas paramétricas,* mientras que llamaremos *semilíneas regulares* a aquéllas con $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 1$. Las primeras son subconjuntos no acotados, ya que las funciones polinómicas no constantes en una variable son no acotadas; por ello los conjuntos $\mathcal{S}$ con más de un punto y $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$ no son acotados. Por ejemplo, $\mathrm{p}(\mathbb{S}^1) = +\infty$, donde $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia y, sin embargo, $\dim(\mathbb{S}^1) = \mathrm{r}(\mathbb{S}^1) = 1$, ya que $\mathbb{S}^1$ es la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^2}\big((t^2-1)^2 - 4t^2, 4t(t^2-1)\big) \tag{1}$$

que resulta de componer la inversa de la proyección estereográfica $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ desde $(1, 0)$ con la aplicación

$$g : \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2,\ z = x + \sqrt{-1}y \equiv (x, y) \mapsto z^2 \equiv (x^2 - y^2,\ 2xy).$$

Por otro lado, se prueba en [FG2, 6.3] que $\dim(\mathcal{S}) = 2 = \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) = 3$ para el conjunto semialgebraico

$$\mathcal{S} := \{x > 0,\ y > 0,\ x - y + 4 > 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Puede dar una idea de lo alejados que todavía nos encontramos de obtener una solución satisfactoria al problema de determinar los valores de $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ y $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ para un conjunto semialgebraico cualquiera $\mathcal{S}$ que, hasta donde nosostros sabemos, la siguiente cuestión permanece abierta:

Cuestión 1.1. *¿Existe algún conjunto* $\mathcal{S}$ *tal que* $\dim(\mathcal{S}) < \mathrm{r}(\mathcal{S}) < \mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$?

El primer resultado relevante relativo a la representación de conjuntos semialgebraicos como imágenes polinómicas de espacios euclídeos se obtuvo en [FG1], donde se demostró que dadas formas lineales independientes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sobre $\mathbb{R}^n$ se tiene la igualdad $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = n$, donde

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ell_1(x) > 0, \ldots, \ell_r(x) > 0\}.$$

El anterior es el germen de otros resultados acerca de la representabilidad como imagen polinómica o regular de espacios euclídeos de conjuntos semialgebraicos cuya frontera es lineal a pedazos, los primeros de los cuales se obtuvieron en [U2].

Para exponerlos llamamos *capa* a todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ afínmente equivalente al producto $[0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Demostramos en [FGU2] que se cumplen las igualdades

$$\mathrm{r}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = \mathrm{r}(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} \mathcal{K}) = n$$

para cada poliedro convexo n-dimensional $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ que no es ni un hiperplano ni una capa. En el aserto anterior $\operatorname{Int} \mathcal{K}$ denota el interior del poliedro $\mathcal{K}$ como variedad topológica con borde. Obsérvese que las imágenes regulares de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos conexos, por lo que el anterior es el mejor resultado posible en esta dirección, ya que el complementario $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ de un poliedro convexo $\mathcal{K}$ y el complementario $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}\mathcal{K}$ de su interior son disconexos si y sólo si $\mathcal{K}$ es un hiperplano o una capa.

En los casos en que o bien $n = 2$ o bien $n = 3$, o bien n es arbitrario pero $\mathcal{K}$ es acotado, probamos un resultado más fuerte:

$$\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = \mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}\mathcal{K}) = n.$$

Además, localizamos la obstrucción para que la técnica general desarrollada arroje las igualdades anteriores en el caso en que $n \geq 4$ y $\mathcal{K}$ no es acotado.

Con respecto a los casos extremales también se demuestra que si $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es un subconjunto semialgebraico básico, el conjunto $\mathcal{S} := \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{T} \times \{0\})$ cumple que

$$\dim(\mathcal{S}) = \mathrm{r}(\mathcal{S}) = \mathrm{p}(\mathcal{S}) = n.$$

Merece la pena señalar que tan sólo para conjuntos semialgebraicos unidimensionales $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ se conoce una caracterización geométrica completa, véase [F], de aquéllos cuyos invariantes $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ o $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ son finitos. Se prueba que entonces $\mathrm{p}(\mathcal{S}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{S}) \leq 2$. En tal caso, $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 1$ si y sólo si $\mathcal{S}$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, mientras que $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 1$ si y sólo si o bien $\mathcal{S}$ es cerrado en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^m$, o bien $\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{p\}$ y el menor gérmen analítico que contiene al gérmen $\mathcal{S}_p$ es irreducible.

A lo largo de este artículo denotaremos por $\mathrm{Cl}_X(Y)$ a la clausura, en el espacio topológico X, del subconjunto Y, por lo que en el enunciado anterior, y puesto que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{RP}^m$, el símbolo $\mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ denota el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{RP}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$.

En relación con los poliedros, hemos demostrado en [FGU1] que si $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro convexo, acotado o no, entonces $\dim(\mathcal{K}) = \mathrm{r}(\mathcal{K}) = \mathrm{r}(\operatorname{Int}\mathcal{K})$. Por contra, ya hemos señalado que las imágenes polinómicas no constantes de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos no acotados, luego $\mathrm{p}(\mathcal{K}) = \mathrm{p}(\operatorname{Int}\mathcal{K}) = +\infty$ si el poliedro $\mathcal{K}$ es acotado y no se reduce a un punto.

Hasta aquí hemos expuesto algunas respuestas afirmativas a la pregunta de si cierto conjunto semialgebraico y conexo es imagen polinómica o regular de un espacio euclídeo. Otro aspecto no menos interesante del problema es obtener condiciones geométricas necesarias para que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{S}$ cumpla que $\mathrm{r}(\mathcal{S})$ o incluso $\mathrm{p}(\mathcal{S})$ sean finitos, y este artículo se dedica a ello. Para exponer los resultados y algunos de sus antecedentes necesitamos introducir más notaciones.

Recordamos que una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X e Y es *propia* si la preimagen $f^{-1}(K)$ de cada subconjunto compacto $K \subset Y$ es un subconjunto compacto de X. Se comprueba inmediatamente que si f es propia y $Z \subset Y$, entonces la restricción $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \to Z$ es también propia.

La intersección $\mathcal{S}_\infty := \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \cap \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$, donde $\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ es el hiperplano de infinito de $\mathbb{RP}^m$, se llama *conjunto de puntos de infinito* del conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{RP}^m$. En [FU] se demuestra que si $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$ y $\mathcal{S}$ no se reduce a un punto, entonces $\mathcal{S}_\infty$ es un conjunto conexo y no vacío. En particular, como el conjunto de puntos de infinito del conjunto semialgebraico 2-dimensional

$$\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ xy < 1\}$$

es $\mathcal{S}_\infty = \{p, q\}$, donde $p := (0 : 1 : 0)$ y $q := (0 : 0 : 1)$, que no es conexo, se deduce que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$. Sin embargo $\mathrm{r}(\mathcal{S}) = 2$, ya que $\mathcal{S}$ es la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \Big(\frac{x^2}{1+y^2}, \frac{y^2}{1+x^2}\Big).$$

Por otro lado, para cada subconjunto semialgebraico abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, la función $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ se dice *de Nash* si es analítica y su grafo es un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^{m+1}$. Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un subconjunto semialgebraico no necesariamente abierto en $\mathbb{R}^m$, se dice que una función $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es *de Nash* si existen un subconjunto semialgebraico abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$ y una función de Nash $G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tales que $G|_\mathcal{S} = g$. El conjunto $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ de funciones de Nash en $\mathcal{S}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra, con las operaciones definidas punto a punto.

En [FG3] se introduce la noción de *conjunto semialgebraico irreducible* como aquél que cumple que $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ es un dominio de integridad. En la Proposición 3.6 demostraremos el siguiente resultado: si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ no se reduce a un punto y $\mathrm{p}(\mathcal{S}) < +\infty$, entonces $\mathcal{S}$ es irreducible, de dimensión pura y su imagen por cualquier función polinómica $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es, o bien un punto, o bien un conjunto no acotado.

Antes de enunciar los dos resultados a cuya prueba dedicamos este artículo recordemos que si $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un subconjunto Z de $\mathbb{K}^m$ se dice *algebraico* si existen polinomios $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{K}[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_m]$ tales que

$$Z := \{x \in \mathbb{K}^m :\ h_1(x) = 0, \dots, h_r(x) = 0\}.$$

Para cada subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}^n$ denotamos $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{K}^m}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{K}^m$ al menor subconjunto algebraico de $\mathbb{K}^n$ que contiene a $\mathcal{S}$, al que se llama *clausura de Zariski* de $\mathcal{S}$. Al sustituir $\mathbb{K}^m$ por el espacio proyectivo $\mathbb{KP}^m$ y polinomio por polinomio homogéneo surge el concepto de *subconjunto algebraico proyectivo* de $\mathbb{KP}^m$, y denotamos $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{KP}^m}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{KP}^m$ al menor subconjunto algebraico proyectivo de $\mathbb{KP}^m$ que contiene a $\mathcal{S}$.

Denotaremos $\dim_\mathbb{C}(Z)$ la dimensión del subconjunto algebraico complejo Z, afín o proyectivo, y reservamos $\dim(\mathcal{S})$ para la dimensión del conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$.

Los dos resultados principales de este trabajo hacen referencia a la *frontera exterior* de un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$, es decir, al conjunto $\delta\mathcal{S} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$, y son los siguientes.

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica, y denotemos $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ y $d := \dim(\mathcal{S})$. Entonces,*

(i) *Para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.*

(ii) *Para todo $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $p \in \mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

(iii) *Si $d = n$ existe un subconjunto semialgebraico $\mathcal{U}$, abierto y denso en $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$, tal que para todo punto $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ que pasa por p y que cumple $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$*

Teorema 1.3. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación regular, $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ y $d := \dim(\mathcal{S})$. Entonces,*

(i) *Dado un conjunto finito* $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *tal que* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.

(ii) *Para cada punto* $p \in \delta\mathcal{S}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *tal que* $p \in \mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

(iii) *Si* $d = n$ *existe un subconjunto semialgebraico* $\mathcal{U}$*, abierto y denso en* $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$*, tal que para todo* $p \in \mathcal{U}$ *existe una semilínea regular* $\mathcal{L}$ *que contiene a* p *tal que* $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

En la siguiente sección recordaremos algunos resultados relativos a la resolución del lugar de indeterminación de la extensión proyectiva racional de una aplicación polinómica, que constituyen la técnica fundamental empleada en las secciones tercera y cuarta para demostrar los dos teoremas anteriores.

2. Resolución de indeterminaciones

2.1. Objetos proyectivos invariantes.

Los resultados clásicos del caso complejo sobre resolución del lugar de indeterminación de la extensión proyectiva racional de una aplicación polinómica $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ son también válidos en el caso real si se tiene cuidado en elegir los datos involucrados en cada etapa invariantes con respecto a la conjugación compleja. Explicamos esto con más detalle. Denotamos $\overline{z}$ el conjugado de cada número complejo $z \in \mathbb{C}$ y

$$\sigma := \sigma_n : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n,\ z := (z_0 : \cdots : z_n) \mapsto \overline{z} := (\overline{z}_0 : \cdots : \overline{z}_n).$$

Decimos que un conjunto $M \subset \mathbb{CP}^n$ es *invariante* si $\sigma(M) = M$. Del Criterio Jacobiano, véase [BCR, 3.3.6] y [ZS], se deduce que si $Z \subset \mathbb{CP}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo irreducible invariante no singular y $\dim_{\mathbb{C}}(Z) := d$, entonces $Z \cap \mathbb{RP}^n$ es un conjunto algebraico proyectivo no singular y $\dim(Z \cap \mathbb{RP}^n) = d$. Decimos que una aplicación racional $h : \mathbb{CP}^n \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$ es *invariante* si $h \circ \sigma_n = \sigma_m \circ h$ o, más brevemente, si $h \circ \sigma = \sigma \circ h$. En particular, si las componentes de h son polinomios homogéneos con coeficientes reales, entonces h es invariante y la restricción $h|_{\mathbb{RP}^n} : \mathbb{RP}^n \dashrightarrow \mathbb{RP}^m$ es una aplicación racional real.

2.2. Resolución del lugar de indeterminación.

Sea $f := (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ donde cada $f_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2]$ es un polinomio en dos variables. Sea $d := \text{máx}\{\deg(f_i) : 1 \le i \le m\}$, denotemos $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, indistintamente y empleamos la notación habitual

$$F_{\mathbb{K}} : \mathbb{KP}^2 \dashrightarrow \mathbb{KP}^m,\ x := (x_0 : x_1 : x_2) \to (x_0^d : F_1(x) : \cdots : F_m(x)),$$

donde cada

$$F_i(\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2) := \mathtt{x}_0^d f_i(\mathtt{x}_1/\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_2/\mathtt{x}_0) \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2],$$

para la extensión proyectiva racional $F_{\mathbb{K}}$ de f. Se emplea la flecha discontinua $\dashrightarrow$ en lugar de $\to$ porque el dominio de $F_{\mathbb{K}}$ no es necesariamente el espacio proyectivo $\mathbb{KP}^n$ ya que, en principio, $F_{\mathbb{K}}$ puede no estar definida en los puntos $x \in \mathbb{KP}^n$ en los que se anulan todas las funciones coordenadas de $F_{\mathbb{K}}$. Denotamos $Y_{\mathbb{K}}$ el lugar de indeterminación de $F_{\mathbb{K}}$, que evidentemente está contenido en la recta de infinito $\ell_\infty(\mathbb{K}) := \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{KP}^2$. Nótese que si $x := (1 : x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2)$, entonces

$$F_{\mathbb{K}}(1 : x_1 : x_2) = (1 : f_1(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) \equiv f(x_1, x_2).$$

Empleando [Sh1, III.1.4] se demuestran los siguientes hechos bien conocidos, (véase por ejemplo [FU, 2.b]):

(i) El conjunto $Y_{\mathbb{C}}$ es finito, está contenido en $\ell_\infty(\mathbb{C})$ e $Y_{\mathbb{R}} = Y_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{RP}^2$.

(ii) Existen un entero $k \geq 2$, una superficie algebraica proyectiva invariante no singular $Z \subset \mathbb{CP}^k$ y una aplicación racional invariante $\pi_{\mathbb{C}} : Z \to \mathbb{CP}^2$, que cumplen las siguientes dos condiciones:

(ii.1) $Y_{\mathbb{C}} := \{p \in \mathbb{CP}^2 : \ \#\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(p) > 1\}$.

(ii.2) La restricción $\pi_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} : Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{CP}^2 \setminus Y_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo birregular.

(iii) Existe una aplicación regular proyectiva e invariante $\widehat{F}_{\mathbb{C}} : Z \to \mathbb{CP}^m$ tal que

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} = F_{\mathbb{C}} \circ \pi_{\mathbb{C}}|_{Z \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})}.$$

Se dice que la terna invariante $(Z, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$ es una *resolución invariante de* $F_{\mathbb{C}}$.

Además, para cada punto $y \in Y_{\mathbb{C}}$ las componentes irreducibles del conjunto algebraico $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ son curvas algebraicas proyectivas irreducibles y no singulares $K_{i,y}$ birregularmente equivalentes a $\mathbb{CP}^1$ vía a una aplicación regular $\Phi_{i,y} : \mathbb{CP}^1 \to K_{i,y}$, que es invariante si $K_{i,y}$ es invariante, tales que

(iv.1) Si $y \in Y_{\mathbb{C}} \setminus Y_{\mathbb{R}}$, entonces $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,\sigma(y)}$ y $K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k = \varnothing$.

(iv.2) Si $y \in Y_{\mathbb{R}}$, entonces, o bien $K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k = \varnothing$ y existe $j \neq i$ tal que $\sigma(K_{i,y}) = K_{j,y}$, o bien $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,y}$ y la restricción $\phi_{i,y} := \Phi_{i,y}|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \to C_{i,y} := K_{i,y} \cap \mathbb{RP}^k$ es un isomorfismo birregular entre la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$ y la curva algebraica proyectiva irreducible y no singular $C_{i,y}$.

La invarianza de los objetos anteriores tiene como consecuencia un comportamiento satisfactorio de la resolución en el caso real. Enunciamos con precisión lo que esto significa.

2.3. Resolución del lugar de indeterminación real.

Mantenemos las notaciones anteriores y consideramos la superficie algebraica proyectiva real no singular $X := Z \cap \mathbb{RP}^k$ y la aplicación racional $\pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^2$, cuya restricción

$$\pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} : X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{RP}^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$$

es un isomorfismo birregular. Denotamos $\widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X : X \to \mathbb{RP}^m$, que es una aplicación regular y cumple la igualdad

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} = F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}.$$

Como $X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \subset X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})$ y $\mathbb{RP}^2 \setminus \ell_\infty(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$, se tiene

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}(x) = (F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}})(x) = f(\pi_{\mathbb{R}}(x)) \in \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{RP}^m \setminus \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$$

para todo $x \in X \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$, de donde $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$. En virtud de [Sh2, VI.2.2.d], la *transformada estricta* K_∞ de $\ell_\infty(\mathbb{C})$ respecto de $\pi_{\mathbb{C}}$, definida por

$$\mathsf{K}_\infty := \mathrm{Cl}_Z(\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{C}) \setminus Y_{\mathbb{C}})),$$

es una curva algebraica compleja no singular y $\pi_{\mathbb{C}}|_{\mathsf{K}_\infty} : \mathsf{K}_\infty \to \ell_\infty(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{CP}^1$ es un isomorfismo birregular invariante. En consecuencia, K_∞ es una curva algebraica compleja racional invariante y no singular. Por tanto $\mathsf{C}_\infty := \mathsf{K}_\infty \cap \mathbb{RP}^k$ es una curva algebraica real racional no singular, que además es la transformada estricta de $\ell_\infty(\mathbb{R})$ respecto de $\pi_{\mathbb{R}}$, es decir,

$$\mathsf{C}_\infty := \mathrm{Cl}_X(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}) \setminus Y_{\mathbb{R}}).$$

3. Demostración del Teorema 1.2.

Comenzamos demostrando el siguiente Lema auxiliar, cuya prueba se apoya esencialmente en la demostración de [FU, Thm. 3.3]. Diremos que $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión *totalmente no acotada* si todas sus subsucesiones son no acotadas.

Lema 3.1. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica, $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$ su extensión racional proyectiva y $(Z, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$, donde $Z \subset \mathbb{CP}^k$, una resolución invariante de $F_{\mathbb{C}}$. Denotamos*

$$\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2), \quad X := Z \cap \mathbb{RP}^k, \quad \widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X \quad y \quad \pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_X.$$

Sean C_∞ la transformada estricta respecto de $\pi_{\mathbb{R}}$ de la recta de infinito $\ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$ e $Y_{\mathbb{R}}$ el lugar de indeterminación de la restricción $F_{\mathbb{R}} := F_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{RP}^2}$. Entonces,

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \mathsf{C}_\infty \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y), \tag{2}$$

y para cada punto $y \in Y_{\mathbb{R}}$ se tiene $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y) = \mathsf{C}_{1,y} \cup \dots \cup \mathsf{C}_{s_y,y}$, donde:

(i) *Cada $\mathsf{C}_{i,y}$ es una curva algebraica racional real no singular.*

(ii) *La intersección $\mathsf{C}_\infty \cap \mathsf{C}_{1,y}$ es un único punto $\{b_{1,y}\}$.*

(iii) *La fibra $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$ es conexa y, de hecho, $\mathsf{C}_{i,y} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathsf{C}_{j,y}$ es un único punto $\{b_{i,y}\}$ para todo $2 \le i \le s_y$.*

(iv) *Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ no es constante, entonces $b_{i,y} \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Más aún, si $\phi_{i,y} : \mathbb{RP}^1 \to \mathsf{C}_{i,y}$ es una aplicación birregular tal que $\phi_{i,y}^{-1}(b_{i,y})$ es el punto de infinito de $\mathbb{RP}^1$, entonces $h_{i,y} := \widehat{F}_{\mathbb{R}} \circ \phi_{i,y}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica cuya imagen está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

(v) *Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ es constante, entonces $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$ y existe $j \neq i$ para el que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{j,y}}$ es no constante y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{j,y})$.*

(vi) *Sean* $Y_{\mathbb{R}}^* := \{y \in Y_{\mathbb{R}} : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})\}$ *y para cada* $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$ *denotemos*

$$\mathcal{F}_y := \{1 \le i \le s_y : \ \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}), \ \widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}} \text{ es no constante}\}.$$

Se cumple que:

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),$$

(vii) *La restricción* $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ *es una aplicación propia y para cada* $z \in \mathcal{D}$ *existe una sucesión* $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$ *totalmente no acotada, tal que la sucesión* $\{f(x_k)\}_k$ *converge a* z.

Demostración. La igualdad (2) se sigue de la inclusión $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_\infty(\mathbb{R})$, y para cada $y \in Y_{\mathbb{R}}$ se satisfacen los apartados (i)-(iii), por [FU, 3.3.7 y 3.3.9].

A continuación demostramos (iv). Fijemos un punto $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$, y sea $\mathsf{C}_i := \mathsf{C}_{i,y}$ una componente irreducible de $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$ tal que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_i) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$.

Sean K_i la componente irreducible invariante de $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ que cumple $\mathsf{K}_i \cap \mathbb{RP}^k = \mathsf{C}_i$, y $\Phi_i : \mathbb{CP}^1 \to \mathsf{K}_i$ una aplicación birregular e invariante. Entonces, la restricción $\phi_i := \Phi_i|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \to \mathsf{C}_i$ es también birregular y la composición

$$H_i := \widehat{F}_{\mathbb{C}} \circ \Phi = (H_{i0} : H_{i1} : \cdots : H_{im}) : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^m$$

es una aplicación regular invariante. Todos los polinomios $H_{ij} \in \mathbb{R}[\mathtt{t}_0, \mathtt{t}_1]$ son homogéneos del mismo grado d, y podemos suponer que $\gcd(H_{i0}, \ldots, H_{im}) = 1$. Como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_i}$, y por tanto $\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{\mathsf{K}_i}$, no es constante, el grado d es ≥ 1; en consecuencia $\mathsf{K}_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) = \Phi(\{H_{i0} = 0\}) \neq \varnothing$.

Puesto que K_i y $\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))$ son, en virtud de [FU, 3.3.6] invariantes y conexos, y están contenidos en el conjunto $A := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{C}) \cup Y_{\mathbb{C}})$, la intersección $\mathsf{K}_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))$ es invariante y no vacía, y de hecho contiene, en virtud de [FU, 3.3.8] un único punto $p_i \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Así, tras un cambio de coordenadas afin e invariante, podemos suponer que $H_{i0} := \mathtt{t}_0^d$ y que $h_i := H_i|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación polinómica no constante. Se sigue de la demostración de [FU, 3.3.12] que

$$\mathrm{Im}(h_i) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}). \tag{3}$$

Comprobamos que $b_i \equiv b_{i,y} = p_i \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$. Si $i = 1$ el resultado es claro; por tanto, suponemos $i \ge 2$. Sean K_j las componentes irreducibles de $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ que satisfacen $\mathsf{K}_j \cap \mathbb{RP}^k = \mathsf{C}_j$ para cada $1 \le j \le r-1$. Por [FU, 3.3.10] y las propiedades (i)-(iii) ya demostradas, la curva algebraica proyectiva compleja

$$T_i := \mathsf{K}_\infty \cup (\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C}))) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathsf{K}_j \subset \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{C})) \subset A$$

es conexa. En consecuencia, como también $\mathsf{K}_i \subset A$ es conexa, la intersección $\mathsf{K}_i \cap T_i$ es, por (iii), no vacía y contiene al punto $\{b_i\}$. Pero $\mathsf{K}_i \cap T_i$ es, por [FU, 3.3.8], un único punto, luego $\mathsf{K}_i \cap T_i = \{b_i\}$. Se tiene entonces

$$\{p_i\} = \mathsf{K}_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) = \mathsf{K}_i \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{C})) \subset \mathsf{K}_i \cap T_i = \{b_i\},$$

es decir, $b_i = p_i$.

Ahora comprobamos (v). Como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}}$ es constante y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$, la intersección $\mathsf{C}_{i,y} \cap \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R})) = \varnothing$. Además, por (iii) sabemos que existe un índice $1 \leq j < i$ tal que la intersección $\mathsf{C}_{j,y} \cap \mathsf{C}_{i,y} = \{b_{i,y}\}$. Como $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))$ se tiene $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{j,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$. Si $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{j,y}}$ no es constante hemos terminado, puesto que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathsf{C}_{i,y}} \equiv \widehat{F}_{\mathbb{R}}(b_{i,y})$. En otro caso repetimos el procedimiento con $\mathsf{C}_{j,y}$ hasta que llegamos al índice que nos interesa. Este proceso debe terminar puesto que $\mathsf{C}_{1,y} \cap \mathsf{C}_\infty \neq \varnothing$ y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})$.

Pasamos a probar (vi). Sea $\mathcal{G}_y := \{1 \leq i \leq s_y : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y}) \not\subset \mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})\}$ para cada $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$. Como consecuencia de los siguientes hechos:

- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) = \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S}_\infty = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})))$, véase [FU, 3.3.12],
- $\mathsf{C}_\infty \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))$, y por tanto $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})))$,
- $\mathcal{S} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$,
- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty) \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)))$,

por la igualdad (2) en el enunciado, y de los apartados anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X) \setminus (\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) \cup \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)))\\ &\subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}))) \subset \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{G}_y} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\})\\ &= \mathcal{D} = \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),\end{aligned}$$

y por tanto (vi) queda demostrado.

Finalmente comprobamos (vii). En primer lugar, como $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{RP}^m$ es una aplicación propia también lo es su restricción

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D})} : X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$

Así, como la aplicación $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ satisface $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$, para demostrar que la aplicación $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ es propia es suficiente ver que $X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}))$. En efecto, de [FU, 3.3.11] y la definición del conjunto $\mathcal{D}$, se deduce que

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})).$$

De esta igualdad resulta

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))\\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})),\end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned}X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= X \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})))\\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

Ahora bien, para cada punto $z \in \mathcal{D}$ existen un punto $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$, un índice $i \in \mathcal{F}_y$ y un punto $u \in \mathsf{C}_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\} \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$ tales que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$. Al ser $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ denso en X, existe una sucesión $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ que converge a $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$. En consecuencia, si denotamos $x_k = \pi_{\mathbb{R}}(u_k)$, la sucesión $\{x_k\}_k$ es totalmente no acotada en $\mathbb{R}^2$, mientras que $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$, luego la sucesión $\{f(x_k)\}_k$ converge al punto z. □

El Lema anterior 3.1 proporciona una nueva demostración del siguiente resultado, (véase [FG2, 3.8]).

Corolario 3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica cuya imagen $\mathcal{S}$ tiene dimensión 2. Entonces existe una familia finita de semilíneas paramétricas $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ tales que $\delta\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.*

Observaciones 3.3. (i) Dada una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la clausura de Zariski $Z := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^m$ de $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto algebraico irreducible. En particular, la clausura de Zariski de una semilínea paramétrica es un conjunto algebraico irreducible de dimensión 1.

En efecto, sea $\mathbb{R}[\mathtt{y}] := \mathbb{R}[\mathtt{y}_1, \dots, \mathtt{y}_m]$ y probemos que $\mathcal{J}(Z) := \{g \in \mathbb{R}[\mathtt{y}] : \ g|_Z \equiv 0\}$ es un ideal primo. Sean $g, h \in \mathbb{R}[\mathtt{y}]$ tales que $gh \in \mathcal{J}(Z)$. Entonces $gh|_{\mathcal{S}} = 0$, luego los polinomios $G := g \circ f$ y $H := h \circ f \in \mathbb{R}[\mathtt{x}] := \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n]$ cumplen que su producto GH es idénticamente nulo. Como el anillo de polinomios $\mathbb{R}[\mathtt{x}]$ es un dominio podemos suponer que $G = 0$, luego $g|_Z = 0$, es decir, $g \in \mathcal{J}(Z)$.

(ii) Con las notaciones del Corolario 3.2, supongamos que existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}_i$ tal que $\dim(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}) = 1$. Entonces, $\mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S})$.

En efecto, en virtud del apartado anterior la clausura de Zariski $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{L}_i)$ es un conjunto algebraico irreducible unidimensional, y contiene a $\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}$, luego también contiene a $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S})$, que por hipótesis tiene dimensión 1. En consecuencia,

$$\mathcal{L}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{L}_i) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}).$$

(iii) Se deduce directamente del Corolario 3.2 que si $p \in \delta\mathcal{S}$ es un punto aislado, entonces existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que contiene a p.

Antes de probar el Teorema 1.2 recordamos el siguiente Lema de Selección de curvas racionales, demostrado en [FU, 2.5], cuyo enunciado sigue la línea introducida en el clásico Lema de Selección de curvas debido a Milnor, [M, §3. 3.1].

Lema 3.4 (Lema de Selección de curvas racionales)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación regular con imagen $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$. Sean $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ un subconjunto semialgebraico denso de $\mathcal{S}$ y $p \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$. Entonces existen enteros $r \geq 1$, $k_1, \dots, k_n$ con $k_1 := \mathrm{mín}\{k_1, \dots, k_n\} < 0$, y polinomios $\mathtt{p}_2, \dots, \mathtt{p}_n \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0) \neq 0$ para cada $2 \leq i \leq n$, tales que, tras reordenar las variables en caso necesario, para cada $\beta \in (\mathtt{t}^r)\mathbb{R}[\mathtt{t}]^n$ se cumplen las siguientes dos condiciones:*

(i) *$p = \mathrm{lím}_{t \to 0^+}(f \circ (\alpha + \beta))(t)$, donde $\alpha(\mathtt{t}) := (\pm\mathtt{t}^{k_1}, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}), \dots, \mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$,*

(ii) *$(f \circ (\alpha + \beta))((0, \varepsilon)) \subset \mathcal{T}$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

Ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema 1.2.

Demostración del Teorema 1.2. Comenzamos probando (i). Sea $\mathcal{F} := \{q_1, \dots, q_r\} \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito y sea $\mathcal{G} := \{p_1, \dots, p_r\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(p_i) = q_i$ para cada índice $1 \le i \le r$. Comprobemos primero que existe una involución polinómica $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que transforma cada p_i en un punto de la forma $(a_i, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

En efecto, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que las primeras coordenadas de los puntos p_i son distintas dos a dos, esto es, si $p_i := (a_{1i}, \dots, a_{ni})$ entonces $a_{1i} \ne a_{1j}$ si $i \ne j$. Por tanto, existen polinomios $\gamma_j \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\gamma_j(a_{1i}) = a_{ji}$ para cada $2 \le j \le n$, luego la aplicación

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \gamma_2(x_1) - x_2, \dots, \gamma_n(x_1) - x_n)$$

es una involución polinómica de $\mathbb{R}^n$ que satisface $h(a_i, \mathbf{0}) = p_i$ para todo $1 \le i \le r$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \to (t, 0, \dots, 0)$ y la semilínea paramétrica $\mathcal{L} := \operatorname{Im}(f \circ h \circ \alpha)$, que satisface $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.

Para demostrar (ii), fijemos un punto $p \in \delta\mathcal{S}$. Por el Lema 3.4, existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros k_i con $k_1 = \text{mín}\{k_1, \dots, k_n\} < 0$, y
- polinomios $\mathtt{p}_i \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0) \ne 0$ para $2 \le i \le n$,

tales que $p = \text{lím}_{t \to 0^+} (f \circ \alpha)(t)$, donde $\alpha(\mathtt{t}) = (\mathtt{t}^{k_1}, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}), \dots, \mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$. Escribimos

$$h_i(\mathtt{x}, \mathtt{y}) := \begin{cases} \mathtt{y}^{|k_i|}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i < 0, \\ \mathtt{x}^{k_i}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i \ge 0, \end{cases}$$

para $1 \le i \le n$. Consideramos las aplicaciones polinómicas

$$h := (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad g := (g_1, \dots, g_m) = f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m.$$

Como $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2) \subset f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$, el punto $p \notin \mathcal{S}_0$. Por otra parte, si $\beta(\mathtt{t}) := (\mathtt{t}, 1/\mathtt{t})$ se tiene $p = \text{lím}_{t \to 0^+} (g \circ \beta)(t)$, luego $p \in \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0) \setminus \mathcal{S}_0 = \delta\mathcal{S}_0$. Así, por el Corolario 3.2, existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L} \subset \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0) \subset \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que contiene a p.

Finalmente probamos (iii). Suponemos que $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)} \ne \varnothing$, porque en caso contrario no hay nada que probar. Sean X el grafo de f y $\mathcal{D} := \pi_2(\operatorname{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X) \cap \mathbb{R}^m$, donde $\pi_2 : \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m \to \mathbb{RP}^m,\ (x, y) \to y$ es la proyección sobre el segundo factor. Como la restricción

$$\rho := \pi_2|_{\operatorname{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X)} : \operatorname{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \to \mathbb{RP}^m$$

es propia y $\rho^{-1}(\mathsf{H}_\infty(\mathbb{R})) \subset \operatorname{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X$, también es propia la restricción

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$

Además, para cada $y \in \mathcal{D}$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{f(x_k)\}_k$ converge a y. En virtud de [BCR, 2.8.13] la dimensión del conjunto semialgebraico $\mathcal{D}$ es $\le n - 1$, por lo que la dimensión de $\mathcal{R} := \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{S} \setminus (\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ es $\le n - 2$. En particular, el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{T} := \delta\mathcal{S} \setminus \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R}) &= \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus (\mathcal{S} \cup \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R})) \\ &= \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \setminus (\operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \cup \mathcal{S}) = \delta\mathcal{S} \setminus \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \end{aligned} \tag{4}$$

tiene dimensión $n-1$ y $\delta\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{R})$ tiene dimensión $\leq n-2$. Por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &:= ((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}\cap\mathcal{T})\setminus \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})\\ &= (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}\setminus(\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}\cap\mathcal{S})\cup \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}))\end{aligned}$$

es un subconjunto semialgebraico abierto y denso de $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$.

Tomamos $p\in\mathcal{U}$; por el Lema 3.4 existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros r, k_i con $k_1 = \text{mín}\{k_1,\dots,k_n\} < 0$, y
- polinomios $\mathtt{p}_i\in\mathbb{R}[\mathtt{t}]$ con $\mathtt{p}_i(0)\neq 0$ para $2\leq i\leq n$

tales que $p = \text{lím}_{t\to 0^+}(f\circ\alpha)(t)$, donde $\alpha(\mathtt{t}) := (\mathtt{t}^{k_1}+\mathtt{t}^r, \mathtt{t}^{k_2}\mathtt{p}_2(\mathtt{t}),\dots,\mathtt{t}^{k_n}\mathtt{p}_n(\mathtt{t}))$.

Tras la sustitución $\mathtt{t}\to\mathtt{t}^2$ podemos suponer que k_1 y r son pares. Escribimos $h_1(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \mathtt{y}^{|k_1|}+\mathtt{x}^r$ y para cada $2\leq i\leq n$

$$h_i(\mathtt{x},\mathtt{y}) := \begin{cases}\mathtt{y}^{|k_i|}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i<0,\\ \mathtt{x}^{k_i}\mathtt{p}_i(\mathtt{x}) & \text{si } k_i\geq 0.\end{cases}$$

Observamos que la aplicación $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ es propia, puesto que si $\{z_k\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}^2$, entonces $\{h_1(z_k)\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}$, luego $\{h(z_k)\}_k$ es una sucesión no acotada en $\mathbb{R}^n$. Es más, $p = \text{lím}_{t\to 0^+} h(t,1/t)$ en $\mathbb{RP}^n$. Ahora escribimos $g := f\circ h$ cuya restricción $g|_{\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D})}:\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$ es propia, porque tanto la restricción $f|_{\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(\mathcal{D})}:\mathbb{R}^n\setminus f^{-1}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$ como h lo son. Denotemos $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2)\subset\mathcal{S}$.

Por el Lema 3.1 (vi-vii) sabemos que existe un número finito de semilíneas paramétricas $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_r$ tales que

$$\delta\mathcal{S}_0\subset\mathcal{D}_0 := \bigcup_{i=1}^r\mathcal{L}_i\subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}_0)\subset\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\cup\delta\mathcal{S},$$

la restricción $g:\mathbb{R}^2\setminus g^{-1}(\mathcal{D}_0)\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}_0$ es propia y para cada $z\in\mathcal{D}_0$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k\subset\mathbb{R}^2$ tal que $\{g(x_k)\}_k$ converge a z. Al ser h propia, $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$, y por tanto, $\mathcal{D}_0\cap\mathcal{S}\subset\mathcal{D}\cap\mathcal{S}$. Más aún, puesto que $p\in\delta\mathcal{S}_0$ se deduce que existe un índice $1\leq i\leq r$ con $p\in\mathcal{L} := \mathcal{L}_i$. Observamos también que

$$\mathcal{L}\subset(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_0)\cup(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})\cup(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}).$$

En consecuencia, si $\dim(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) = 0$ se tiene

$$p\in\mathcal{L}\subset\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{D}_0\cap\mathcal{S})\cup\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)})\subset\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}\cap\mathcal{D})\cup\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}\setminus(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}),$$

lo que contradice que $p\in\mathcal{U}$. Por tanto, $\dim(\mathcal{L}\cap(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) = 1$ y $\mathcal{L}\subset\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)})$, como queríamos ver. □

Definición y Observación 3.5. (i) Decimos que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^m$ es *conexo por semilíneas paramétricas* si para cada par de puntos $x,y\in\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica contenida en $\mathcal{S}$ que pasa por x e y. Más aún, si para cada subconjunto finito $\mathcal{F}\subset\mathcal{S}$ existe una semilínea paramétrica $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}\subset\mathcal{S}$ decimos que $\mathcal{S}$ es *completamente conexo por semilíneas paramétricas.*

(ii) El Teorema 1.2 (i) afirma que las imágenes polinómicas de espacios euclídeos son subconjuntos completamente conexos por semilíneas paramétricas. En particular son conexos por semilíneas paramétricas, por lo que el siguiente resultado proporciona obstrucciones a que un conjunto semialgebraico sea imagen polinómica de un espacio euclídeo.

Proposición 3.6. *Un conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ conexo por semilíneas paramétricas es irreducible, de dimensión pura, y la imagen $h(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ por toda función polinómica $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es no acotada o se reduce a un punto.*

Demostración. En efecto, supongamos primero que $\mathcal{S}$ es reducible y sean $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r$ las componentes irreducibles de $\mathcal{S}$, véase [FG3, 4.1]. Para $i = 1, 2$ sea $x_i \in \mathcal{S}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{S}_j$ y sea $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\alpha(\mathbb{R}) := \mathcal{L}$. Por [FG3, 2.4, 4.3] existe una función de Nash $f \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$ tal que $\mathcal{S}_1 := \{x \in \mathcal{S} : f(x) = 0\}$. Sea $\mathcal{C} := \alpha^{-1}\big(\bigcup_{i=2}^{r} \mathcal{S}_i\big) \subset \mathbb{R}$, que es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que no interseca a $\alpha^{-1}(x_1)$. Entonces $f \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Nash que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$. Por el Principio de Identidad, $f \circ \alpha$ es idénticamente nula, luego $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_1$, que es una contradicción.

Supongamos que $\mathcal{S}$ no tiene dimensión pura y sean $d := \dim \mathcal{S}$ y $\mathcal{T} := \bigcup_{0 \leq k < d} \mathcal{S}_{(k)}$. El conjunto semialgebraico $\mathcal{S}_{(d)}$ es cerrado en $\mathcal{S}$ y la clausura de Zariski $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$ tiene dimensión $\leq d - 1$. Sea $g \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_m]$ tal que $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) = 0\}$ y elijamos puntos $x_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$ y $x_2 \in \mathcal{T}$. Sea $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ y sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\beta(\mathbb{R}) := \mathcal{L}$. Consideramos el subconjunto cerrado $\mathcal{C}' := \beta^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{(d)})$ de $\mathbb{R}$, que no interseca al conjunto $\beta^{-1}(x_2)$. Consecuentemente, $g \circ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}$. Por el Principio de Identidad, $g \circ \beta$ es idénticamente nula, luego $\mathcal{L} \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\mathcal{T})$, que es una contradicción.

Finalmente, supongamos que existe una aplicación polinómica $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $h(\mathcal{S})$ es acotado y no se reduce a un punto. Sean $q_1, q_2 \in h(\mathcal{S})$ con $q_1 \neq q_2$ y sean $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $h(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2$. Sean $\mathcal{L}$ una semilínea paramétrica tal que $p_1, p_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación polinómica tal que $\gamma(\mathbb{R}) = \mathcal{L}$. Observamos que $h \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación polinómica con imagen acotada, luego $h \circ \gamma$ es constante, y esto es falso porque $q_1, q_2 \in (h \circ \gamma)(\mathbb{R})$. □

Del enunciado anterior surgen algunas cuestiones cuya respuesta desconocemos.

Cuestiones 3.7. (i) Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico 2-dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas, cuyo conjunto $\mathcal{S}_\infty$ de puntos de infinito es conexo y tal que existe un número finito de semilíneas paramétricas contenidas en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$ que recubren su frontera exterior $\delta\mathcal{S}$. ¿Se cumple que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = 2$?

(ii) Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico n-dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito $\mathcal{S}_\infty$ es conexo y existe un subconjunto semialgebraico $\mathcal{U}$, abierto y denso en $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$, tal que para cada $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea paramétrica que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$. ¿Se cumple que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = n$?

Observaciones 3.8. (i) Existen conjuntos semialgebraicos $\mathcal{S}$ completamente conexos por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito $\mathcal{S}_\infty$ no es conexo, y viceversa. En efecto, si $\mathcal{S}_1 := \{0 \leq x \leq 1\} \cup \{0 \leq y \leq x\} \subset \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\mathcal{S}_{1,\infty} = \{(0:0:1)\} \cup \{(0:1:t),\ 0 \leq t \leq 1\},$$

que no es conexo. Sin embargo, mediante interpolación y el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, se puede comprobar que $\mathcal{S}_1$ es completamente conexo por semilíneas paramétricas. Por otra parte, el conjunto de puntos de infinito de la banda $\mathcal{S}_2 := \mathbb{R} \times [0,1]$ se reduce a un único punto, y por tanto es conexo, pero $\mathcal{S}_2$ no es completamente conexo por semilíneas paramétricas porque su proyección sobre la segunda coordenada es acotada y distinta de un punto.

(ii) El conjunto semialgebraico $\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es completamente conexo por semilíneas paramétricas y su conjunto de puntos del infinito es conexo; sin embargo su frontera exterior no puede ser recubierta con un conjunto finito de semilíneas paramétricas. Por tanto, $\mathcal{S}$ no es imagen polinómica de $\mathbb{R}^2$, aunque sí lo es de $\mathbb{R}^3$ (véase [FG2, 4.2]).

(iii) Los resultados obtenidos en esta sección acerca de la frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ descansan sobre la resolución del lugar de indeterminación de aplicaciones racionales complejas que son extensión de aplicaciones polinómicas definidas sobre $\mathbb{R}^2$. Tal vez se puedan obtener condiciones más restrictivas sobre la geometría de la frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ empleando aplicaciones más generales.

4. Demostración del Teorema 1.3.

Nuestro último objetivo en este trabajo es demostrar el Teorema 1.3, en cuya prueba emplearemos técnicas y estrategias semejantes a las utilizadas anteriormente en la del Teorema 1.2. Antes necesitamos algunos resultados auxiliares acerca de los subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ que son imagen de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$ por una aplicación regular. Recordemos que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ las curvas algebraicas proyectivas birracionalmente isomorfas a la recta proyectiva $\mathbb{KP}^1$ se llaman *racionales.*

Lema 4.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo que no es abierto en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una función regular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R}) = I$.*

Demostración. Basta probar que los intervalos $[0,+\infty)$, $[0,1]$ y $[0,1)$ son imágenes de funciones regulares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se comprueba inmediatamente que las funciones

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto t^2, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1+t^2},$$

cumplen las igualdades $f_1(\mathbb{R}) = [0,+\infty)$, $f_2(\mathbb{R}) = [0,1]$ y $f_3(\mathbb{R}) = [0,1)$. □

Proposición 4.2. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico de dimensión pura 1 tal que $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ es una curva racional. Entonces $\mathcal{S}$ es unión de un número finito de semilíneas regulares.*

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{RP}^1 \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ la normalización real de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$. Si se cumple que $\mathcal{S} = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$, entonces podemos suponer que $\mathcal{S} = \mathbb{S}^1$, luego por la igualdad (1) en la Introducción, $\mathcal{S}$ es imagen de $\mathbb{R}$ por una aplicación regular, y hemos concluido. Por otra parte, si $\mathcal{S} \neq \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$ denotamos p_∞ el punto de infinito de $\mathbb{RP}^1$ y podemos suponer que $\phi(p_\infty) \in \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)}) \setminus \mathcal{S}$. En consecuencia, $\phi^{-1}(\mathcal{S})$ es un conjunto semialgebraico de $\mathbb{R} = \mathbb{RP}^1 \setminus \{p_\infty\}$, esto es, $\phi^{-1}(\mathcal{S})$ es una unión finita $\bigcup_{i=1}^s \{p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^s I_j$ de puntos p_i e intervalos I_j. Esto implica, al ser $\mathcal{S}$ de dimensión pura, que $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^s \phi(I_j)$.

Dado un índice $1 \leq j \leq s$, si el intervalo I_j no es abierto se deduce del Lema 4.1 que $\phi(I_j)$ es una semilínea regular, mientras que si $I_j := (a_j, b)$ es un intervalo abierto, donde $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$, escribimos $I_j = (a_j, c] \cup [c, b_j)$ y, por el Lema 4.1, $\phi_j(I_j)$ es unión de dos semilíneas regulares, lo que termina la demostración. □

Lema 4.3. *Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación racional no constante cuya imagen denotamos $\mathcal{S}$. Entonces:*

(i) *Existe una aplicación regular invariante $F : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^m$ tal que $F|_{\mathbb{R}} = f$ y $F(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$.*

(ii) *El conjunto $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es una curva algebraica racional compleja y existen una aplicación sobreyectiva, regular, birracional e invariante $\pi : \mathbb{CP}^1 \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ y una aplicación regular, sobreyectiva e invariante $\widetilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tales que*

$$F = \pi \circ \widetilde{F} \quad y \quad \pi(\mathbb{RP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S}_{(1)}).$$

Demostración. (i) Quitando denominadores y homogeneizando adecuadamente, f se extiende a una aplicación racional invariante

$$F := (F_0 : F_1 : \cdots : F_m) : \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m,$$

donde cada polinomio $F_i \in \mathbb{R}[\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1]$ es homogéneo y $\deg(F_i) = \deg(F_j)$ para cada par de índices $0 \leq i < j \leq m$. Esta extensión es de hecho regular, por [M, 7.1], y por el principio de identidad, es única. Además, $F(\mathbb{CP}^1)$, que está contenido en $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$, contiene, por [Mu, 2.31], un subconjunto no vacío abierto en la topología de Zariski de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$; por tanto, como F es propia y $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es irreducible concluimos, en virtud de [Mu, 2.33], que $F(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$.

(ii) Sea $C \subset \mathbb{CP}^k$ la normalización de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ que es, por [Sh1, 5.3], una curva proyectiva irreducible no singular birracionalmente equivalente a $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$, vía una aplicación regular sobreyectiva $\pi : C \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$. Como $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{CP}^m}(\mathcal{S})$ es invariante podemos suponer que también C y π lo son. La composición $\pi^{-1} \circ F : \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow C$ es una aplicación racional invariante que, de nuevo por [M, 7.1], se extiende a una aplicación regular sobreyectiva invariante $\widetilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to C$ que cumple la igualdad $F = \pi \circ \widetilde{F}$. Esto implica que C es una curva algebraica proyectiva no singular racional, es decir, de género aritmético $g_a(C) = 0$, pues, por [Mu, 7.6, 7.20], $0 = g_a(\mathbb{CP}^1) \geq g_a(C) \geq 0$. En consecuencia podemos suponer que $C = \mathbb{CP}^1$. Para concluir es suficiente observar que, por la unicidad de la normalización, el par $(\mathbb{RP}^1, \pi|_{\mathbb{RP}^1})$ es la normalización de $\mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$ y $\pi(\mathbb{RP}^1) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S}_{(1)})$. □

Proposición 4.4. *Dada una aplicación regular $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^m$ cuya imagen $\mathcal{S}:=f(\mathbb{R}^2)$ es un conjunto acotado, existe una familia finita de curvas racionales $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$ que cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $\delta\mathcal{S}\subset\mathcal{D}:=\bigcup_{i=1}^r\mathcal{M}_{i,(1)}\subset\operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

(ii) *La restricción $f|_{\mathbb{R}^2\setminus f^{-1}(\mathcal{D})}:\mathbb{R}^2\setminus f^{-1}(\mathcal{D})\to\mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$ es una aplicación propia y para cada $z\in\mathcal{D}$ existe una sucesión totalmente no acotada $\{x_k\}_k\subset\mathbb{R}^2$ tal que $\{f(x_k)\}_k$ converge a z.*

Demostración. Como f es regular existen polinomios $f_0,f_1,\dots,f_m\in\mathbb{R}[\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2]$ tales que f_0 no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^2$ y

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^m,\ x\mapsto\frac{1}{f_0(x)}(f_1(x),\dots,f_m(x)).$$

Sea $d:=\max_{i=0,\dots,m}\{\deg(f_i)\}$ y consideremos la aplicación racional

$$F_{\mathbb{R}}=(F_0:F_1:\cdots:F_m):\mathbb{RP}^2\dashrightarrow\mathbb{RP}^m,\ \text{ donde }\ F_i(\mathtt{x}_0:\mathtt{x}_1:\mathtt{x}_2)=\mathtt{x}_0^d f_i\Big(\frac{\mathtt{x}_1}{\mathtt{x}_0},\frac{\mathtt{x}_2}{\mathtt{x}_0}\Big).$$

La demostración se desarrolla en varios pasos.

(4.5.1) La aplicación $F_{\mathbb{R}}$ se extiende de manera natural a una aplicación racional invariante $F_{\mathbb{C}}:\mathbb{CP}^2\dashrightarrow\mathbb{CP}^m$, y podemos suponer que $\gcd(F_0,F_1,\dots,F_m)=1$, por lo que el conjunto de puntos de indeterminación de $F_{\mathbb{K}}$ es

$$Y_{\mathbb{K}}:=\{x\in\mathbb{KP}^2:\ F_i(x)=0,\ \text{ para todo }\ 0\le i\le m\}.$$

Como f es regular, $Y_{\mathbb{R}}\subset\ell_\infty(\mathbb{R})$.

(4.5.2) Recordemos las notaciones y propiedades vistas en 2.2 y 2.3. Sean $(Z,\pi_{\mathbb{C}},\widehat{F}_{\mathbb{C}})$ una resolución invariante de $F_{\mathbb{C}}$, la superficie proyectiva real no singular $X:=Z\cap\mathbb{RP}^k$ y la aplicación racional invariante $\pi_{\mathbb{R}}:=\pi_{\mathbb{C}}|_X:X\to\mathbb{RP}^2$ cuya restricción

$$\pi_{\mathbb{R}}|_{X\setminus\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}:X\setminus\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})\to\mathbb{RP}^2\setminus Y_{\mathbb{R}}$$

es un isomorfismo birregular, y $\widehat{F}_{\mathbb{R}}:=\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_X:X\to\mathbb{RP}^m$, que es una aplicación regular real que cumple la igualdad $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X\setminus\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}=F_{\mathbb{R}}\circ\pi_{\mathbb{R}}|_{X\setminus\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}$.

(4.5.3) Además, la transformada estricta $\mathsf{C}_\infty:=\operatorname{Cl}_X(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})\setminus Y_{\mathbb{R}})$ es una curva algebraica proyectiva racional real no singular y cada fibra $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$ con $y\in Y_{\mathbb{R}}$ es una unión finita de curvas algebraicas racionales proyectivas reales no singulares $\mathsf{C}_{i,y}$, donde $i=1,\dots,r_y$. En consecuencia, $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))=\mathsf{C}_\infty\cup\bigcup_{y\in Y_{\mathbb{R}}}\bigcup_{i=1}^{r_y}\mathsf{C}_{i,y}$.

(4.5.4) Observamos que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(X)=\operatorname{Cl}_{\mathbb{RP}^m}(\mathcal{S})$, ya que la aplicación $\widehat{F}_{\mathbb{R}}$ es propia y el conjunto $\mathcal{S}$ es acotado; además $\mathcal{S}=f(\mathbb{R}^2)=F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)=\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$. Por tanto,

$$\delta\mathcal{S}\subset\mathcal{D}:=\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})))=\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_\infty)\cup\bigcup_{y\in Y_{\mathbb{R}}}\bigcup_{i=1}^{r_y}\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathsf{C}_{i,y})\subset\operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}),$$

lo que, por el Lema 4.3 (ii), demuestra la afirmación (i).

Ahora probamos (ii). Como la aplicación $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X \to \mathbb{RP}^m$ es propia, también lo es $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X\setminus\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D})} : X\setminus\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m\setminus\mathcal{D}$. Así, como $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo birregular que satisface la igualdad $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f\circ\rho$, para demostrar que la restricción $f|_{\mathbb{R}^2\setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ es propia es suficiente comprobar que $X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})))$. Ahora bien, como $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f\circ\rho$, tenemos

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})),$$

y por tanto, se cumple que

$$\begin{aligned} X \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) &= X \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) \\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})). \end{aligned}$$

Más aún, si $z \in \mathcal{D}$ existe $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))$ tal que $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$. Al ser $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ denso en X, existe una sucesión $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$ que converge a u. Si $x_k := \pi_{\mathbb{R}}(u_k)$ la sucesión $\{x_k\}_k$ es totalmente no acotada, mientras que $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$, de modo que $\{f(x_k)\}_k$ converge a z, como queríamos ver. $\square$

Corolario 4.5. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto semialgebraico 2-dimensional que es imagen de una aplicación regular $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$. Entonces, existen un conjunto finito $\mathcal{D}$ y una familia finita de semilíneas regulares $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$ tales que*

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \cup \bigcup_{i=1}^r \mathcal{M}_i \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{zar}}(\delta\mathcal{S}).$$

Demostración. Si $\mathcal{S}$ es acotado el resultado se deduce del Corolario 4.2 y la Proposición 4.4; véase también la Observación 3.3 (2). Por tanto es suficiente probar que podemos reducir la prueba al caso acotado. Para ello consideramos la inversión respecto de la esfera de $\mathbb{R}^{m+1}$ de centro el origen y radio 1, que es la aplicación regular

$$h : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\},\ x \mapsto x/\|x\|^2,$$

e identificamos $\mathbb{R}^m$ con el hiperplano $\mathcal{H} := \{x_{m+1} = 2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Así, si $\mathcal{S}$ no es acotado tampoco lo es su identificado, al que seguimos denotando $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Por tanto sí es acotada su imagen $\mathcal{T} := h(\mathcal{S}) \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| < 1\}$, porque $\mathcal{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| > 1\}$. Como h es una involución racional, preserva el género de las curvas y, en particular su racionalidad. Además $\delta\mathcal{T} = h(\delta\mathcal{S}) \cup \{\mathbf{0}\}$, luego es suficiente demostrar el resultado para $\mathcal{T}$, como pretendíamos probar. $\square$

Ahora, la demostración del Teorema 1.3, cuyos detalles omitimos, es análoga a la del Teorema 1.2, teniendo en cuenta que, mediante una inversión, podemos suponer que el conjunto semialgebraico involucrado $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es acotado, y usando a continuación el Corolario 4.2, la Proposición 4.4 y el Corolario 4.5 en lugar del Lema 3.1 y el Corolario 3.2.

Terminamos esta sección justificando el interés del Teorema 1.3. Evidentemente, es posible formular cuestiones similares a las propuestas en 3.7 en el contexto de las imágenes regulares, tratando de averiguar si las afirmaciones recíprocas a las establecidas en el Teorema 1.3 y el Corolario 4.5 son ciertas.

Observaciones 4.6. (i) Un conjunto semialgebraico completamente conexo por semilíneas regulares es irreducible y de dimensión pura. La demostración es análoga a la de la Proposición 3.6.

(ii) Cada subconjunto semialgebraico no vacío $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 1.3. En efecto, para probar la condición (i) es suficiente observar que $\mathcal{S}$ es conexo por caminos y aproximar, mediante el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, un camino continuo que pasa por los puntos de un conjunto finito $\mathcal{F}$ dado mediante un camino polinómico, y utilizar además que, en virtud del Lema 4.1, para cada $\varepsilon > 0$ el intervalo cerrado $[0, \varepsilon]$ es imagen regular de $\mathbb{R}$. Por otro lado, la condición (ii) del Teorema 1.3 se deduce del Lema 3.4.

(iii) La situación es radicalmente diferente para conjuntos semialgebraicos arbitrarios. En lo que sigue, diremos que un subconjunto semialgebraico $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ es *genéricamente unireglado* si existe un subconjunto semialgebraico abierto y denso $\mathcal{U}$ en $\mathcal{T}$ tal que para cada punto $p \in \mathcal{U}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathcal{U}$.

Se demuestra en [C, V] que si $m \geq 4$ y $d \geq 2m - 2$ la hipersuperficie algebraica compleja genérica Z de $\mathbb{CP}^m$ de grado d no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, y lo mismo sucede si $m = 2, 3$ y $d \geq 2m - 1$. Por tanto, si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto semialgebraico cuya clausura de Zariski X en $\mathbb{RP}^m$ es una hipersuperficie genérica de $\mathbb{RP}^m$ con grado suficientemente alto, su clausura de Zariski Z en $\mathbb{CP}^m$ no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, luego $\mathcal{S}$ no es completamente conexo por semilíneas regulares. Es más, el conjunto $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$ no es genéricamente unireglado y no es cierto que para cada punto $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$. Esto prueba, en virtud del Teorema 1.3 (iii), que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$.

(iv) De modo análogo, si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto semialgebraico abierto tal que la clausura de Zariski X de $\delta\mathcal{S}$ en $\mathbb{RP}^m$ es una hipersuperficie genérica de $\mathbb{RP}^m$ cuyo grado es suficientemente alto, su clausura de Zariski en $\mathbb{CP}^m$ no contiene curvas algebraicas racionales, y por tanto, $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$ no es genéricamente unireglado. Esto implica, por el Teorema 1.3 (iii), que $\mathrm{p}(\mathcal{S}) = +\infty$. A pesar de todo, como ya hemos mencionado en el apartado (ii), si $\mathcal{S}$ es conexo entonces es completamente conexo por semilíneas regulares y para cada punto $p \in \delta\mathcal{S}$ existe una semilínea regular que pasa por p y está contenida en $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S})$.

Referencias

[BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: Real algebraic geometry. *Ergeb. Math.* **36**. Springer-Verlag, Berlin: 1998.

[C] H. Clemens: Curves in generic hypersurfaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **19** (1986), 629-636.

[F] J.F. Fernando: On the one dimensional polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[FG1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial images of $\mathbb{R}^n$. *J. Pure Appl. Algebra* **179** (2003), no. 3, 241–254.

[FG2] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Israel J. Math.* **153**, (2006), 61–92.

[FG3] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: On the irreducible components of a semialgebraic set. *Internat. J. Math.* **23** (4), (2012).

[FGU1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On convex polyhedra as regular images of $\mathbb{R}^n$. *Proc. London Math. Soc.* (3) **103** (2011), 847-878.

[FGU2] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On complements of convex polyhedra as polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[FU] J.F. Fernando, C. Ueno: On the set of infinite points of a polynomial image of $\mathbb{R}^n$. *Preprint* RAAG, 2012.

[G] J.M. Gamboa: Reelle Algebraische Geometrie, June, $10^{\text{th}}-16^{\text{th}}$ (1990), Oberwolfach.

[M] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Math. Studies*, **61** Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo: 1968.

[Mu] D. Mumford: Algebraic geometry. I. Complex projective varieties. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **221**. Springer-Verlag, Berlin-New York: 1976.

[S] A. Seidenberg: A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math.* **60** (1954), 365–374.

[Sh1] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry I. Varieties in projective space. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.

[Sh2] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry II. Schemes and complex manifolds. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.

[T] A. Tarski: A decision method for elementary algebra and geometry. Prepared for publication by J.C.C. Mac Kinsey, Berkeley: 1951.

[U1] C. Ueno: A note on boundaries of open polynomial images of $\mathbb{R}^2$. *Rev. Mat. Iberoam.* **24** (2008), no. 3, 981-988.

[U2] C. Ueno: On convex polygons and their complementaries as images of regular and polynomial maps of $\mathbb{R}^2$. *J. Pure Appl. Algebra* doi:10.1016/j.jpaa.2012.03.016. (2012).

[V] C. Voisin: On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces. *J. Differential Geom.* **44** (1996), 200-214.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel: Commutative Algebra. Vol. I. GTM **28**. Berlin: Springer-Verlag (1975).