



# Imágenes Polinómicas y Regulares de Espacios Euclídeos

**Carlos Ueno Jacue**

Licenciado en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad Complutense de Madrid

Memoria presentada para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Matemáticas  
Diciembre 2012

Dirigida por el Profesor Titular

**José Francisco Fernando Galván**

Doctor en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad Complutense de Madrid



*A mis padres*



# Agradecimientos

Para entender mejor lo que esta tesis significa para mí hay que retroceder bastante en el tiempo, casi veinte años. Se acercaba el verano de 1994 y yo me encontraba terminando el primer año de doctorado en la Universidad de Toronto, a la que había accedido con la recomendación de José María Montesinos Amilibia. En aquellos días una idea se había alojado en mi cabeza de forma persistente: La misión de completar un doctorado y de hacer investigación en Matemáticas excedía mi capacidad; la abstracción de los contenidos, la profundidad de los resultados, la cantidad de aportaciones y referencias que se acumulaban en el estudio de cualquier problema... Me sentía incapaz de ponerme al día, de añadir algo que resultara de interés, y albergaba dudas interiores sobre si mi esfuerzo y dedicación darían fruto. Decidí pues que era la hora de poner un punto y aparte (*¿final acaso?*) a mi carrera de matemático en ciernes. Recuerdo el momento en que entré en el despacho de Man-Duen Choi, por aquel entonces Jefe del Departamento de Matemáticas de la *U. of T.*, y recuerdo en particular sus palabras de consejo y de ánimo para no desistir en lo que hasta ese momento había sido mi vocación. Sin embargo, yo ya tenía la decisión tomada. Y el profesor Choi acabó con unas palabras de advertencia: *“Debes tener claro que si algún día quieres volver a investigar en Matemáticas la tarea no te resultará nada fácil”*. Y tenía razón. Mi desconexión del mundo académico a partir de entonces fue prácticamente total. Me hice profesor de secundaria, y tan sólo alguna lectura esporádica me permitía mantener un contacto tenue y distante con el ámbito universitario. Estaba, matemáticamente hablando, fuera de juego.

Pero la vida da muchas vueltas, y de aquel naufragio académico vinieron a rescatarme mi antiguo (calificativo que se adecuaba poco a su carácter) profesor José Manuel Gamboa y mi Director de Tesis, José Francisco Fernando Galván. Contacté con ellos para compartir unas ideas que había tenido después de leer un artículo firmado por ambos. Tras un intercambio de *e-mails* desarrollando esas ideas me convencieron de que podía sacar adelante un trabajo interesante, y me guiaron y animaron hasta llegar al punto en el que nos encontramos hoy. Los dos estuvieron siempre ahí, dándome consejos, proponiéndome nuevos retos, y colaborando en refinar, formalizar y comprender mejor los resultados que poco a poco iban surgiendo, así como en darles el acabado profesional que demanda un entorno científico cada vez más exigente. Esta tesis es el producto final de esa estrecha colaboración, y supone para mí el retorno matemático que años atrás había considerado

imposible. Tal vez este retorno sea fugaz, eso no lo sé; pero sí sé con certeza que mi deuda con José y José Manuel no tiene precio.

Por supuesto, hay más personas a las que quiero extender mi agradecimiento. Todas ellas, de forma directa o indirecta, han contribuido en cierto grado a la consecución final de esta Memoria.

Gracias al Departamento de Álgebra y al Departamento de Topología y Geometría de la UCM, por el apoyo recibido durante la finalización de mis estudios de posgrado, así como por las facilidades que me han prestado para participar en diversas actividades de formación.

Gracias a mis profesores de la Universidad Complutense y de la Universidad de Toronto, porque me enseñaron mucho y bien. En especial quiero mencionar a John B. Wilker, con quien fue un auténtico placer trabajar mientras completaba mi proyecto de Máster en Toronto durante el curso 92-93.

Gracias a Jesús Begoña, profesor del INB Cervantes de Madrid y principal responsable de que decidiera estudiar Matemáticas cuando aún era estudiante de bachillerato.

Gracias a mis amigos, presentes y pasados, por los momentos de compañía y alegría que me regalaron. En particular a la banda de los *Momonios* y a sus secuaces, que compartieron conmigo días de trabajo y celebración mientras se gestaba esta tesis.

Gracias a Davinia y a Martin, por el afecto que me demuestran y por darme lecciones constantes de humanidad y generosidad.

Gracias a mi familia, porque sé que, aun en la distancia, está siempre a mi lado, y a la que debo todo lo que esencialmente soy.

# Prefacio

El haber recibido de José F. Fernando y Carlos Ueno la invitación a escribir este prefacio es la mayor de las muchas satisfacciones que mi actividad académica me ha proporcionado. Y la razón principal es que son ellos quienes lo han hecho. Los dos fueron alumnos míos mientras estudiaron la licenciatura, y ya entonces mostraron sus formidables cualidades para aprender Matemáticas y obtener resultados nuevos. De hecho, mientras Carlos era alumno de la asignatura Geometría Analítica, del último curso, escribimos un artículo conjunto, [GU]. Fue un curso inolvidable, con sólo seis alumnos pero a cuál mejor, en el que tanto la cantidad de materia impartida como la profundidad con que aquellos excelentes alumnos la hicieron suya nos hace reclamar que las estructuras actuales nos permitan dedicarnos así a alumnos de tanta capacidad. Con José, años después, no publicamos nada, pero él se encargó, día a día, de mejorar muy sustancialmente los apuntes de esa misma asignatura que yo había elaborado. Ya entonces me asombró la velocidad a la que es capaz de aprender, de descubrir qué es verdadero o falso y cómo demostrarlo. Eran otros tiempos, en los que al “dar clase” no se le llamaba “la carga docente” y en los que los profesores podíamos dedicar tiempo a los mejores alumnos.

Pero lo que para mí hace excepcionales a ambos reside fuera del ámbito matemático. Su generosidad es proverbial, y no dudan en postponer aquello que están haciendo para ayudar a amigos y no tan amigos. La modestia que preside todo su quehacer y su elegancia al hacer sentir a los demás que el valor de sus aportaciones es mucho mayor del que en realidad tiene, hace muy placentero el compartir con ambos cualquier actividad.

Creo que la vanidad es uno de los muy graves defectos que con mayor frecuencia “adorna” a los científicos de cualquier disciplina y condición; pues bien, Carlos y José se vacunaron nada más nacer contra esta enfermedad, lo que se aprecia muy fácilmente tanto al hablar con ellos como al leer lo que escriben. Algunos ignorantes se confunden ante esto y no saben apreciar en su justa medida la valía de Carlos y José, tanto en Matemáticas como fuera de ellas. Pero es porque son verdaderamente ignorantes.

Hay otra razón por la que escribir este prefacio supone para mí una gran alegría. Es el problema que se aborda en la tesis. La llamada Geometría Algebraica Real (o Geometría Semialgebraica) nace probablemente de la observación de que muy raramente la proyección de un conjunto algebraico real es también algebraico, y de la solución a esta deficiencia. A. Tarski [T] y A. Seidenberg [S] demostraron, de modo independiente, que la proyección de cualquier conjunto semialgebraico vuelve a ser semialgebraico. Esta situación contrasta

fuertemente con lo que sucede en el caso complejo: si  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  es un conjunto algebraico y  $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus X$ , la imagen de la proyección lineal  $X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  con centro el punto  $p$  es de nuevo un conjunto algebraico.

Mientras escribía mi tesis doctoral me ví enfrentado al problema “inverso”, que no supe resolver sin la inestimable ayuda de Carlos Andradadas, [AG]. Se trataba de decidir qué subconjuntos semialgebraicos de  $\mathbb{R}^n$  son proyección de un conjunto algebraico  $V$  sumergido en  $\mathbb{R}^m$  para algún  $m > n$ . Sin más restricciones la cuestión ya había sido respondida afirmativamente por Motzkin [Mo] en todos los casos y, además con  $m = n + 1$ . Pero nosotros necesitábamos que  $V$  fuese irreducible, lo que hacía el problema más difícil.

Del Teorema de Tarski-Seidenberg se desprende muy fácilmente que la imagen de un conjunto semialgebraico mediante una aplicación polinómica es semialgebraico. Por ello, animado por el éxito del trabajo anterior, e influenciado por unas conferencias sobre robótica organizadas por Tomás Recio, traté de abordar a principios de los 1990’s, otro problema inverso; ¿qué subconjuntos  $S$  (semialgebraicos, por supuesto) de un espacio afín  $\mathbb{R}^n$  son imagen de algún otro  $\mathbb{R}^m$  mediante alguna aplicación polinómica  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ? Tras descubrir algunas obstrucciones muy sencillas, el problema se manifestó en seguida muy difícil para mí, y muy pronto me centré en abordarlo para  $m = n = 2$ . Seguía siendo un asunto complicado, y costó mucho probar que un semiplano abierto o el complementario del disco abierto son imagen polinómica del plano. Y lo que era mucho peor, tras demostrarlo uno seguía sin saber por qué era así. Pasé mucho tiempo intentando sin éxito decidir si un cuadrante abierto es imagen polinómica del plano. Por su posible relación con la Conjetura Jacobiana Real y con los problemas de robótica ya mencionados, el caso en que  $S$  es abierto siempre ha parecido tener particular interés.

Surgió entonces la posibilidad de hablar del problema en Oberwolfach, con la esperanza de escuchar nuevas ideas. Como es obvio mis conferencias no solían levantar expectación. Pero esta vez la cosa fué algo distinta; el título de la charla ya atrajo la atención de la gente y, sobre todo, al acabar se pegaban por darme ideas de por qué el cuadrante abierto  $Q \subset \mathbb{R}^2$  NO era imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ . Algunos argumentos eran muy originales, por supuesto, pero ninguno llegó a buen puerto. Yo hablé el primer día, y conforme fue transcurriendo la semana la gente se iba desanimando. El enunciado era atractivo, pero no existían técnicas con las que hincarle el diente. Una vez más la cohomología de haces no me había salvado ... la cara aunque, como se puede leer en esta Memoria, la Topología Algebraica, en manos de alguien como Carlos, arroja algo de luz sobre el problema.

Así que me volví a Madrid sin solución aunque, eso sí, convencido por la opinión de la mayoría que  $Q$  no era imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ . Merece la pena señalar una observación que surgió hablando con Jesús M. Ruiz: la unión  $Q \cup \{(0, 0)\}$  es la imagen de la aplicación  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2y^4, x^4y^2)$ , pero no hay quién se desprenda del origen de coordenadas. En los años siguientes empleé muchas horas en el problema, pero llegó un momento en que me absorbía de tal modo que tuve que dejarlo.

Al principio de este siglo, tras acabar los estudios de Licenciatura en la Facultad de



---

CC. Matemáticas de la UCM y realizar una preciosa tesis doctoral acerca de algunos aspectos del problema decimoséptimo de Hilbert en el ámbito de los gérmenes de función analítica bajo la dirección de Jesús M. Ruiz, se incorporó a nuestro Grupo de Investigación José F. Fernando. Esto supuso una formidable inyección de fuerza, entusiasmo y, sobre todo, capacidad para las Matemáticas, para el grupo. En particular volvimos a montar un Seminario, en el que conté todo lo (poco) que sabía acerca de las imágenes polinómicas. Se generó una intensa actividad durante varios meses y, aunque tarde, ya es momento de agradecer sus aportaciones a todos los que participaron; MariEmi Alonso y Javier Cirre entre otros. Y a resultas de aquel seminario probamos que  $Q$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ , [FG1], de lo que se deduce que fijadas formas lineales linealmente independientes  $f_1, \dots, f_r$  en  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

Este resultado representa el punto de arranque de la tesis de Carlos Ueno. Aunque el problema general acerca de cuáles son las imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^2$  sigue estando fuera de nuestro alcance, si nos restringimos a aquellos subconjuntos cuya frontera es lineal a pedazos la cuestión es abordable. José y yo escribimos a continuación un trabajo [FG2] en el que además de nuevas obstrucciones representamos algunos polígonos no acotados y sus complementarios como imagen polinómica de cierto  $\mathbb{R}^m$ , donde  $m$  depende del número de lados del polígono. Y he aquí que, sorprendentemente, nuestros dos artículos llegaron, vía Internet, a manos de Carlos, que había obtenido una plaza de Profesor de Matemáticas de Enseñanza Secundaria en Las Palmas y seguía manteniendo su interés y curiosidad por las Matemáticas. Como le sonaban los nombres de los autores empezó a leer los trabajos y cuenta que, para su sorpresa, entendía casi todo. Como es tan discreto no se puso en contacto con nosotros hasta que ya había resuelto alguna de las cuestiones abiertas que aparecían en nuestros artículos. Su solución era brillante, y ese fue el comienzo de un muy duro trabajo por su parte, en un ambiente poco favorable a la investigación al no tener cerca otros investigadores, y que ha tenido como fruto una magnífica tesis. Estudiarla y, a poder ser, aprovechar los resultados que contiene para obtener otros mejores, es tarea para quien haya llegado leyendo hasta aquí.

J. Manuel Gamboa Mutuberría,

Madrid, Mayo 2012



# Contenido

Introducción . . . . .	1
Capítulo I. Preliminares . . . . .	7
I.1. Conceptos, notaciones y resultados básicos . . . . .	7
I.2. Antecedentes I: El trabajo de Z. Jelonek . . . . .	17
I.3. Antecedentes II: El trabajo de Fernando–Gamboa. . . . .	24
I.4. Poliedros convexos . . . . .	29
Capítulo II. Algunos ejemplos fundamentales . . . . .	55
II.1. El semiplano abierto . . . . .	55
II.2. Complementario de un conjunto semialgebraico básico . . . . .	56
II.3. El cuadrante abierto en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	60
Capítulo III. Propiedades de imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	83
III.1. Preliminares y herramientas . . . . .	83
III.2. Imágenes polinómicas y regulares de dimensión 1 . . . . .	92
III.3. Conexión del conjunto de puntos de infinito de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	99
III.4. Frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	112
III.5. Conjunto de puntos de infinito de una imagen regular de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	119
III.6. Frontera exterior de una imagen regular de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	125
III.7. Componentes conexas del exterior . . . . .	128
Capítulo IV. Complementarios de poliedros convexos como imágenes polinómicas y regulares . . . . .	137
IV.1. Herramientas de recorte de tipo I . . . . .	139
IV.2. Complementario de un poliedro convexo . . . . .	154
IV.3. Herramientas de recorte de tipo II . . . . .	159
IV.4. Complementario del interior de un poliedro convexo . . . . .	170
IV.5. Aplicación: exterior de la bola $n$ -dimensional . . . . .	175

---

Capítulo V. Poliedros convexos como imágenes regulares de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	179
V.1. Particiones de la frontera de un poliedro convexo . . . . .	179
V.2. El interior de un poliedro convexo $n$ -dimensional . . . . .	190
V.3. Poliedros convexos $n$ -dimensionales. . . . .	194
V.4. Aplicación: la bola $n$ -dimensional . . . . .	209
Apéndice A: Origami polinómico . . . . .	213
A.1. Introducción . . . . .	213
A.2. Polígonos convexos en el origami tradicional. . . . .	216
A.3. Polígonos convexos en el origami polinómico. . . . .	218
Apéndice B: Algunos resultados de Z. Jelonek desarrollados . . . . .	223
B.1. Aplicaciones polinómicas complejas propias . . . . .	223
B.2. El teorema de Perron . . . . .	231
B.3. Propiedades del conjunto $\mathcal{S}_f$ en el caso complejo. . . . .	236
B.4. Compactificaciones proyectivas de variedades afines . . . . .	242
B.5. Propiedades de $\mathcal{S}_f$ en el caso real. . . . .	244
Apéndice C: Poliedro sin proyecciones seccionales . . . . .	247
C.1. Propiedades de las proyecciones seccionales . . . . .	247
C.2. Poliedros esféricos . . . . .	249
C.3. Demostración del resultado . . . . .	252
Bibliografía . . . . .	253

# Introducción

A principios de los años 90 del siglo pasado, J.M. Gamboa propuso en el congreso Reelle Algebraische Geometrie celebrado en Oberwolfach [G] el problema de determinar qué subconjuntos  $\mathcal{S}$  de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  son imagen de otro espacio euclídeo  $\mathbb{R}^m$  por una aplicación *polinómica* o *regular*. Es muy sencillo demostrar que tales conjuntos  $\mathcal{S}$  son necesariamente semialgebraicos, conexos, y de dimensión pura. Sin embargo estas propiedades no caracterizan las imágenes polinómicas o regulares de espacios euclídeos, y hoy en día nos encontramos lejos de alcanzar caracterizaciones geométricas satisfactorias de estos conjuntos.

Es natural preguntarse acerca de la utilidad de que un subconjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  sea imagen de una aplicación polinómica o regular  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Señalemos algunos ejemplos.

(1) Para abordar problemas de optimización sobre  $\mathcal{S}$ , pues los puntos de  $\mathcal{S}$  en los que  $g$  alcanza sus valores máximos y mínimos, absolutos o relativos, son las imágenes por  $f$  de los puntos en los que alcanza dichos valores la composición  $g \circ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

(2) Para caracterizar las funciones polinómicas o regulares  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cuya restricción  $g|_{\mathcal{S}} \geq 0$ , ya que esta condición equivale a que  $g \circ f \geq 0$  lo que, por la solución de E. Artin al Problema 17 de Hilbert, equivale a que exista un polinomio  $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  no nulo tal que el producto  $h^2 \cdot (g \circ f)$  sea suma de cuadrados de polinomios.

(3) Para construir trayectorias en  $\mathcal{S}$  de cierta naturaleza, pues para trazar una curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{S}$  es suficiente trazar una  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que por composición proporciona la curva  $\alpha := f \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ .

En particular, tiene especial interés estudiar este problema cuando el conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  tiene propiedades topológicas añadidas, como por ejemplo ser abierto o cerrado. Aunque en esta Memoria no hemos caracterizado en términos geométricos las imágenes polinómicas o regulares en espacios euclídeos de dimensión arbitraria, sí hemos ampliado el catálogo conocido de este tipo de conjuntos, y hemos encontrado una nueva obstrucción que se añade a las conocidas hasta el momento.

Para facilitar la exposición del contenido de la tesis introducimos ya cierta terminología. Para cada conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  denotaremos

$$\begin{aligned} p(\mathcal{S}) &:= \inf\{n \geq 1 : \exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ polinómica tal que } f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}, \\ r(\mathcal{S}) &:= \inf\{n \geq 1 : \exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ regular tal que } f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Obviamente, la condición  $p(\mathcal{S}) := +\infty$  caracteriza la no representabilidad de  $\mathcal{S}$  como imagen polinómica de ningún espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , mientras que la igualdad  $r(\mathcal{S}) := +\infty$  tiene el significado análogo para aplicaciones regulares.

Es evidente que  $\dim(\mathcal{S}) \leq r(\mathcal{S}) \leq p(\mathcal{S})$ , y ambas desigualdades pueden ser estrictas. Por ejemplo, se demuestra en [F2] que si  $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto no acotado, entonces  $1 = \dim(\mathcal{S}) < r(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S}) = 2$ , y que si  $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}$  es un intervalo de la forma  $\mathcal{S} := (a, b]$ , entonces  $1 = r(\mathcal{S}) < p(\mathcal{S}) = +\infty$ .

Además, es sencillo demostrar que  $p(\mathcal{S}) = \infty$  si  $\mathcal{S}$  es acotado y tiene más de un punto; en particular la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  cumple  $p(\mathbb{S}^1) = \infty$ , mientras que  $\dim(\mathbb{S}^1) = r(\mathbb{S}^1) = 1$ , pues  $\mathbb{S}^1$  es la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^2} ((t^2 - 1)^2 - 4t^2, 4t(t^2 - 1))$$

que resulta de componer la inversa de la proyección estereográfica  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  desde  $(1, 0)$  con la aplicación

$$g : \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2, \quad z = x + \sqrt{-1}y \equiv (x, y) \mapsto z^2 \equiv (x^2 - y^2, 2xy).$$

Por otro lado, se prueba en [FG2, 6.3] que  $\dim(\mathcal{S}) = 2 = r(\mathcal{S}) < p(\mathcal{S}) = 3$  para el conjunto semialgebraico

$$\mathcal{S} := \{x > 0, y > 0, x - y + 4 > 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Otro ejemplo relevante lo proporcionan los complementarios en  $\mathbb{R}^n$  de una bola abierta  $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$  y su clausura  $\overline{\mathcal{B}}_n$ . En la Proposición IV.5.1 y el Corolario IV.5.2 probamos que

$$p(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_n) = n \quad \text{y} \quad p(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{B}}_n) = n + 1,$$

extendiendo los resultados obtenidos por Fernando-Gamboa para  $n = 2$  en [FG2].

En el Capítulo I se introducen las notaciones y resultados que se emplearán a lo largo del trabajo, prestando especial atención a los antecedentes más cercanos a los problemas que nosotros abordamos, y que se encuentran en los artículos de [J3], [J5], [J4] y [J1] de Z. Jelonek y los trabajos [FG1] y [FG2] de Fernando-Gamboa. Además, como muchos resultados de la Memoria hacen referencia a poliedros, acotados o no, este primer capítulo recoge aquellos resultados sobre poliedros que emplearemos en capítulos posteriores.

En el Capítulo II se presentan algunos ejemplos fundamentales acerca de subconjuntos  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  para los que se sabía que  $p(\mathcal{S}) = r(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}) = n$  ya antes de elaborar esta Memoria, y se encuentran otros nuevos o se dan demostraciones alternativas de resultados conocidos. Entre los primeros señalamos el Teorema II.2.1 que afirma que si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto semialgebraico básico, el conjunto  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathcal{A} \times \{0\})$  cumple que

$$\dim(\mathcal{S}) = r(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S}) = n + 1.$$

Esto implica, como casos particulares, dos resultados obtenidos por Fernando–Gamboa en [FG1] y [FG2], respectivamente: el complementario en  $\mathbb{R}^n$  de un conjunto finito y el complementario en  $\mathbb{R}^2$  de una unión finita de intervalos cerrados de  $\mathbb{R} \times \{0\}$  son subconjuntos para los que los invariantes  $p$ ,  $r$  y dimensión coinciden.

Un resultado que jugó un papel esencial en la obtención de respuestas parciales al problema de encontrar conjuntos  $\mathcal{S}$  tales que  $\dim(\mathcal{S}) = p(\mathcal{S})$  se obtuvo en [FG1], y afirma que dadas formas lineales independientes  $f_1, \dots, f_m$  sobre  $\mathbb{R}^n$  el conjunto

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) > 0, \dots, f_m(x) > 0\}$$

cumple  $p(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}) = n$ . La clave radica en demostrar que un cuadrante abierto de  $\mathbb{R}^2$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ , y presentamos tres demostraciones esencialmente diferentes de este resultado. La primera prueba se publicó en [FG1], y requiere el uso de MAPLE para efectuar ciertos cálculos; hemos añadido dos pruebas originales más que, a diferencia de la anterior, no requieren emplear software informático.

En el Capítulo III destacamos cuatro resultados. En primer lugar se caracterizan, en los Teoremas III.2.6 y III.2.8, las curvas semialgebraicas  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  que son imagen polinómica (resp. regular) de algún  $\mathbb{R}^n$ , y se prueba que en tal caso  $r(\mathcal{S}) \leq p(\mathcal{S}) \leq 2$ . Además, si  $p(\mathcal{S})$  es finito, entonces vale 1 si y sólo si  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathbb{R}^m$ .

Como  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , tiene sentido considerar la clausura  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S})$  de  $\mathcal{S}$  en el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , y demostramos que si  $r(\mathcal{S})$  es finito, entonces vale 1 si y sólo si  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  o la diferencia  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  es un único punto  $p$  y el menor germen analítico que contiene al germen  $\mathcal{S}_p$  es irreducible.

Por otro lado, también se demuestra en este Capítulo uno de los resultados más reseñables de la Memoria. Se define el *conjunto de puntos de infinito* de un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  como la intersección  $\mathcal{S}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{S}) \cap H_\infty$ , donde  $H_\infty$  es el hiperplano de los puntos de infinito de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , y se demuestra en el Teorema III.3.1, que el conjunto de puntos de infinito de una imagen polinómica (no constante) de un espacio euclídeo es un conjunto conexo y no vacío.

Este resultado, que deja de ser cierto para las imágenes de  $\mathbb{R}^n$  por una aplicación regular arbitraria pero se extiende a la subclase de las aplicaciones *cuasi-polinómicas*, representa una nueva obstrucción significativa para la finitud del invariante  $p(\mathcal{S})$  de un subconjunto semialgebraico.

El tercero de los resultados mencionados anteriormente está contenido en los Teoremas III.4.1 y III.6.1, en los que se describen propiedades geométricas de la frontera exterior  $\delta\mathcal{S} = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  de un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  que es la imagen de una aplicación polinómica o regular  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y donde  $\text{Cl}(\mathcal{S})$  denota la clausura de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{R}^m$ . Ambos teoremas permiten decidir en buen número de situaciones que  $p(\mathcal{S}) = \infty$  o  $r(\mathcal{S}) = \infty$  para clases muy amplias de subconjuntos semialgebraicos  $\mathcal{S}$ . Estos tres resultados constituyen el núcleo de nuestro trabajo [FU1].

Por último, dentro de este tercer Capítulo, mencionamos el Teorema III.7.10, que es el

resultado fundamental de nuestro artículo [U1], en el que damos respuesta negativa a una cuestión planteada en [FG2, 7.3.2]. En él demostramos que para cada entero  $k \geq 1$  existe una aplicación polinómica  $\Phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen  $\mathcal{S}_k := \Phi_k(\mathbb{R}^2)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera tiene, exactamente,  $k + 1$  componentes conexas. Además, el exterior de  $\mathcal{S}_k$  también tiene  $k + 1$  componentes conexas.

Llamamos *franja* a todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  afinmente equivalente al producto  $[0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ . En el Capítulo IV demostramos que se cumplen las igualdades

$$r(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = r(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) = n$$

para cada poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  que no es una franja. Obsérvese que las imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$  son conjuntos conexos, por lo que el anterior es el mejor resultado posible en esta dirección, ya que el complementario  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  de un poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K}$  y el complementario  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  de su interior son disconexos si y sólo si  $\mathcal{K}$  es una franja.

En los casos en que  $n = 2$  o  $n = 3$ , o  $n$  es arbitrario pero el poliedro  $\mathcal{K}$  es acotado, probamos un resultado más fuerte:

$$p(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = p(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) = n.$$

Además, determinamos la obstrucción para que la técnica general desarrollada arroje las igualdades anteriores en el caso en que  $n \geq 4$  y  $\mathcal{K}$  no es acotado.

Estos resultados se demuestran en las tres primeras secciones, mientras que en la sección cuarta demostramos, como aplicación de lo visto en la sección segunda, que el complementario en  $\mathbb{R}^n$  de una bola abierta  $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . Este resultado extiende el obtenido para  $n = 2$  en [FG2, 4.1]. Además, en [FG2, 4.2] se prueba que  $p(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{B}}_2) = 3$ , y terminamos el Capítulo demostrando en el Corolario IV.5.2 que  $p(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{B}}_n) = n + 1$ .

El Capítulo V consiste, esencialmente, en nuestro artículo [FGU1], y se dedica a demostrar el Teorema V.1, que afirma que si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro  $n$ -dimensional y convexo, acotado o no, entonces  $r(\mathcal{K}) = r(\text{Int}(\mathcal{K})) = n$ . Como consecuencia se deduce que también las bolas abiertas de  $\mathbb{R}^n$  y sus clausuras son imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ . Ya hemos señalado que las imágenes polinómicas no constantes de  $\mathbb{R}^n$  son conjuntos no acotados, luego  $p(\mathcal{K}) = p(\text{Int}(\mathcal{K})) = \infty$  si el poliedro  $\mathcal{K}$  es acotado, lo que trae al escenario las aplicaciones regulares. Existen pocos resultados previos acerca de las imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ ; cabe citar los obtenidos por Fernando–Gamboa en [FG2]. Allí se demuestra que si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  es un polígono convexo con  $e \geq 2$  lados, entonces

$$r(\text{Int}(\mathcal{K})) \leq \begin{cases} \text{máx}\{2, e - 1\} & \text{si } \mathcal{K} \text{ tiene dos lados paralelos} \\ \text{máx}\{2, e\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

mientras que, como caso particular del Teorema V.1, se desprende que  $r(\text{Int}(\mathcal{K})) = 2$ .



Obsérvese, además, que todo poliedro convexo  $d$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $0 \leq d < n$ , está contenido en un subespacio afín  $d$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  que, tras un cambio afín de coordenadas, podemos identificar con  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ . Por tanto, se deduce del Teorema V.1 que  $r(\mathcal{K}) = r(\text{Int}_v \mathcal{K}) = d$ . En el aserto anterior  $\text{Int}_v \mathcal{K}$  denota el interior del poliedro  $\mathcal{K}$  como variedad topológica con borde.

En el Apéndice A, titulado *Origami polinómico* se recogen algunos resultados de nuestro artículo [U2] y otros estrechamente relacionados con ellos y obtenidos con posterioridad. Entre estos últimos destacamos el Teorema A.1.2, en el que se demuestra que todo polígono convexo no acotado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  cuyos lados no acotados no son paralelos es un *plegado polinómico*, esto es,  $p(\mathcal{P}) = 2$ .

En el Apéndice B, y con la intención de que la Memoria sea tan autocontenida como sea posible, se dan demostraciones detalladas de los resultados de Z. Jelonek relativos al conjunto de puntos donde una aplicación continua no es propia reseñados en el primer Capítulo, algunos de los cuales son empleados a lo largo de la Memoria.

Por último, en el Apéndice C, presentamos ejemplos de poliedros  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que para cada proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de base un hiperplano  $H$  y dirección una recta  $\vec{\ell}$  se cumple que  $\pi(\mathcal{K}) \neq \mathcal{K} \cap H$ . Dicho poliedro recoge la obstrucción que impide que la técnica desarrollada para probar que  $r(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = r(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) = n$  pueda ser extendida en general al caso polinomial para poliedros convexos no acotados  $n$ -dimensionales si  $n \geq 4$ .



## Preliminares

### I.1. Conceptos, notaciones y resultados básicos

A lo largo de esta Memoria,  $\mathbb{R}^n$  denota el conjunto de  $n$ -tuplas

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}$$

con su estructura vectorial habitual de suma de  $n$ -tuplas y producto de escalares por  $n$ -tuplas. Este conjunto puede considerarse con diversas estructuras, cuya interacción a menudo juega un papel importante en nuestros resultados; por ello es conveniente describir primero estas distintas formas de considerar  $\mathbb{R}^n$ , e introducir los conceptos y notaciones fundamentales que serán utilizados posteriormente.

**I.1.a. El espacio métrico  $\mathbb{R}^n$ .** En el conjunto  $\mathbb{R}^n$  sólo consideraremos la distancia euclídea habitual y la topología inducida por ella. Una base de esta topología está formada por las bolas abiertas  $\mathcal{B}_n(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$  de centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $\varepsilon > 0$ . Denotaremos por  $\overline{\mathcal{B}}_n(x, \varepsilon)$  las correspondientes bolas cerradas.

En los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  consideramos la topología inducida por el espacio ambiente. Dados conjuntos  $S \subset A \subset \mathbb{R}^n$  escribimos  $\text{Int}_A(S)$  y  $\text{Cl}_A(S)$  para referirnos, respectivamente, al interior y clausura de  $S$  en  $A$ . Abreviaremos  $\text{Int}_{\mathbb{R}^n}(S) = \text{Int}(S)$  y  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^n}(S) = \text{Cl}(S)$ . Se define la *frontera exterior* de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  como  $\delta S := \text{Cl}(S) \setminus S$ .

Cuando  $S$  es una variedad topológica con borde de dimensión  $k \leq n$  escribiremos  $\text{Int}_v S$  y  $\partial S$  para referirnos a su interior y a su borde respectivamente considerados en la topología de variedad de  $S$ . Nótese que si  $S$  es una variedad topológica con borde en  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $k < n$ , entonces  $\emptyset = \text{Int}(S) \neq \text{Int}_v S$ , mientras que  $\text{Int}(S) = \text{Int}_v S$  si  $S$  es  $n$ -dimensional.

**I.1.b. La variedad algebraica afín  $\mathbb{K}^n$ .** Denotemos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{K}^n$  se dice *algebraico* si existe un subconjunto finito  $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tal que

$$X = \mathcal{Z}_{\mathbb{K}^n}(f_1, \dots, f_k) := \{x \in \mathbb{K}^n : f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0\}.$$

Los subconjuntos algebraicos de  $\mathbb{K}^n$  son los subconjuntos cerrados de una topología en  $\mathbb{K}^n$ , denominada de *Zariski*, y se dice que  $\mathbb{K}^n$ , dotado de la topología de Zariski, es una *variedad algebraica afín*. Diremos que estos conjuntos son *cerrados Zariski* y sus complementarios son *abiertos Zariski*.

Se llama *topología de Zariski* en el conjunto algebraico  $X \subset \mathbb{K}^n$  a la topología inducida en  $X$  por la topología de Zariski de  $\mathbb{K}^n$ . La clausura de  $S \subset X$  en la topología de Zariski de  $X$  es el menor subconjunto algebraico de  $X$  que contiene a  $S$ , y lo denotaremos  $\text{Cl}_X^{\text{zar}}(S)$ . Para  $X = \mathbb{K}^n$  abreviaremos  $\text{Cl}_{\mathbb{K}^n}^{\text{zar}}(S) = \text{Cl}^{\text{zar}}(S)$ .

El ideal del anillo de polinomios  $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  asociado a un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{K}^n$  se define como

$$\mathcal{J}(S) := \{f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}] : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in S\}.$$

Una función  $f : S \rightarrow \mathbb{K}$  definida en un subconjunto  $S \subset \mathbb{K}^n$  se dice *polinómica* si existe un polinomio  $F \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  tal que  $f(x) = F(x)$  para todo  $x \in S$ . El conjunto  $\Gamma[S]$  formado por las funciones polinómicas  $S \rightarrow \mathbb{K}$  constituye un anillo, con las operaciones definidas punto a punto. Identificando cada polinomio con la función polinómica  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  asociada resulta  $\Gamma[\mathbb{K}^n] = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ . Además,  $\mathcal{J}(S)$  es el núcleo del homomorfismo sobreyectivo

$$\mathbb{K}[\mathbf{x}] \rightarrow \Gamma[S], F \mapsto F|_S,$$

por lo que identificaremos  $\Gamma[S] := \mathbb{K}[\mathbf{x}]/\mathcal{J}(S)$ . Si  $X$  es un subconjunto algebraico de  $\mathbb{K}^n$  es tradición decir que  $\Gamma[X]$  es *el anillo de coordenadas* de  $X$ .

Una *subvariedad algebraica afín* de  $\mathbb{K}^n$  es un subconjunto algebraico  $X \subset \mathbb{K}^n$  *irreducible*, esto es, que no es unión de dos subconjuntos algebraicos afines estrictamente contenidos en  $X$ . Nótese que el subconjunto algebraico  $X \subset \mathbb{K}^n$  es irreducible si y sólo si el ideal  $\mathcal{J}(X)$  es primo, esto es, el anillo  $\Gamma[X]$  es dominio de integridad. En esta situación se denota  $\Gamma(X)$  el cuerpo de fracciones de  $\Gamma[X]$ , que se denomina *cuerpo de funciones racionales de  $X$* .

Dados subconjuntos  $S \subset \mathbb{K}^n$  y  $T \subset \mathbb{K}^m$ , una aplicación

$$f = (f_1, \dots, f_m) : S \rightarrow T, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

se dice *polinómica* si cada componente  $f_i \in \Gamma[S]$ . Toda aplicación polinómica  $f : S \rightarrow T$  induce, por composición, un homomorfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras

$$f^* : \Gamma[T] \rightarrow \Gamma[S], g \mapsto g \circ f.$$

**1.1.c. Conjuntos semialgebraicos en  $\mathbb{R}^n$ .** Un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice *semialgebraico* si se puede expresar como combinación finita de operaciones booleanas (unión, intersección y complementario) aplicadas a los conjuntos del tipo  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$ , donde  $g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] := \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Tienen especial interés los conjuntos semialgebraicos *básicos*, que son aquéllos que se pueden representar como

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) * 0, \dots, f_r(x) * 0\},$$

donde cada  $f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  y  $*$  representa uno cualquiera de los símbolos  $>$  o  $\geq$ . Si todos los símbolos  $*$  son  $\geq$  el semialgebraico  $\mathcal{S}$  se llama *básico cerrado* y si todos los símbolos  $*$  son  $>$  el semialgebraico  $\mathcal{S}$  se llama *básico abierto*.

Todo subconjunto algebraico  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto semialgebraico básico cerrado, y su complementario  $\mathbb{R}^n \setminus X$  es un conjunto semialgebraico básico abierto. En efecto, sean  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0\}$ . Denotando

$$f = \sum_{i=1}^m f_i^2 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \quad \text{y} \quad g = -f$$

se tiene  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ .

En los Capítulos IV y V emplearemos que todo poliedro cerrado y convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto semialgebraico básico cerrado, pues existen polinomios  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  de grado 1 tales que

$$\mathcal{K} := \{f_1 \geq 0, \dots, f_m \geq 0\}.$$

Obviamente, todo conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  es unión finita de semialgebraicos básicos y no es difícil probar que todo semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  admite una expresión del tipo

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^r \{f_i = 0, g_{1i} > 0, \dots, g_{1s} > 0\}$$

donde cada  $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ . Nuestra referencia habitual acerca de las propiedades de este tipo de conjuntos es [BCR].

Por supuesto, la familia de los conjuntos semialgebraicos de  $\mathbb{R}^n$  tiene estructura de álgebra y es cerrada respecto de las uniones e intersecciones finitas y respecto de la complementación. Además, una formulación del Teorema de Tarski-Seidenberg dice que la imagen de un conjunto semialgebraico de  $\mathbb{R}^n$  mediante una aplicación lineal  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un conjunto semialgebraico de  $\mathbb{R}^m$ . De esto se deduce el resultado siguiente.

**Teorema I.1.1** *Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica o regular y  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico. Entonces  $f(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^m$  es un conjunto semialgebraico.*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) * 0, \dots, g_r(x) * 0\}$$

es un conjunto semialgebraico básico. El grafo de  $f$

$$\mathfrak{G}_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_i(x) * 0, 1 \leq i \leq r, y = f(x)\},$$

es un conjunto semialgebraico básico de  $\mathbb{R}^{n+m}$  y, si  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la proyección sobre el segundo factor, se deduce del Teorema de Tarski-Seidenberg, [BCR, 2.2.1], que  $f(\mathcal{S}) = \pi(\mathfrak{G}_f)$  es un conjunto semialgebraico. En general, todo conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  se escribe  $\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^r \mathcal{T}_i$ , donde cada  $\mathcal{T}_i$  es un semialgebraico básico, luego  $f(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=1}^r f(\mathcal{T}_i)$  es, por lo anterior, semialgebraico.  $\square$

A continuación, recordamos algunos conceptos y resultados relativos a la irreducibilidad de conjuntos semialgebraicos.

**Definiciones y Notaciones I.1.2** (i) Dado un conjunto semialgebraico abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  se dice que una función  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es *de Nash* si es analítica y su grafo es un subconjunto semialgebraico de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta segunda condición equivale a que exista un polinomio no nulo  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, t]$  tal que  $P(x, f(x)) = 0$  para cada  $x \in \mathcal{U}$ .

(ii) Dado un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que una función  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  es *de Nash* si existen un conjunto semialgebraico abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{S}$  y una función de Nash  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g|_{\mathcal{S}} = f$ . El conjunto de funciones de Nash sobre  $\mathcal{S}$ , con las operaciones definidas punto a punto, forma un anillo que denotamos  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ .

(iii) Dado un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  se dice que una aplicación

$$f := (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

es *de Nash* si cada componente  $f_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Nash.

(iv) Se dice que el conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  es *irreducible* si  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$  es un dominio de integridad. Por analogía con el caso polinómico, dado un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  se define

$$\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}) := \{f \in \mathcal{N}(\mathcal{S}) : f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{T}\}.$$

Además, para cada ideal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$  denotamos

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathcal{S} : f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

En [FG3, 3.1] se prueba que todo conjunto semialgebraico irreducible es conexo y su clausura de Zariski es un conjunto algebraico irreducible. Recordamos a continuación otros resultados más profundos sobre conjuntos semialgebraicos irreducibles, cuyas pruebas se encuentran en [FG3], y que serán utilizados en esta Memoria.

**Teorema I.1.3** ([FG3, 4.3]) *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico. Entonces, existe una familia finita  $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k\}$  de subconjuntos semialgebraicos irreducibles de  $\mathcal{S}$  que satisface las dos propiedades siguientes:*

- (i)  $\mathcal{S}_i = \mathcal{Z}_{\mathcal{S}}(\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_i))$  para cada  $1 \leq i \leq k$ ;
- (ii)  $\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_1), \dots, \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_k)$  son los ideales primos minimales del anillo  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ .

*Esta familia es única, y se dice que  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$  son las componentes irreducibles de  $\mathcal{S}$ .*

**Proposición I.1.4** ([FG3, 3.1(iv)]) *Si  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto semialgebraico irreducible y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación de Nash, entonces  $f(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^m$  es también un conjunto semialgebraico irreducible.*

Aunque sobre la normalización de conjuntos algebraicos hablaremos más adelante (véase el Teorema I.1.9), recordamos aquí el siguiente resultado que relaciona la irreducibilidad de un conjunto semialgebraico con la conexión a través del morfismo de normalización.

**Proposición I.1.5** ([FG3, 3.5]) *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto semialgebraico y denotemos  $(Y, \pi)$  una normalización de  $\text{CI}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ . Supongamos además que  $\pi(\pi^{-1}(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$ . Entonces,  $\mathcal{S}$  es irreducible si y sólo si existe una componente conexa  $\mathcal{T}$  de  $\pi^{-1}(\mathcal{S})$  tal que  $\pi(\mathcal{T}) = \mathcal{S}$ .*

**I.1.d. Complejificación del espacio  $\mathbb{R}^n$ .** Denotamos  $\mathbb{C} := \mathbb{R}[i]$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ , el cuerpo de los números complejos, y consideremos la conjugación compleja

$$\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = a + bi \mapsto \bar{z} = a - bi,$$

cuyo conjunto de puntos fijos es  $\mathbb{R}$ . Análogamente,  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de puntos fijos de la involución

$$\sigma_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Cada aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se extiende, de modo único, a una aplicación polinómica  $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , esto es,  $f_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}^n} = f$ . En general, diremos que una aplicación polinómica  $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  es  $\sigma$ -invariante si  $\sigma_m \circ g = g \circ \sigma_n$ . Nótese que si  $g$  es  $\sigma$ -invariante entonces  $g(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  y tiene sentido considerar la restricción  $g_{\mathbb{R}} := g|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que es una aplicación polinómica.

Este proceso de complejificación de espacios y aplicaciones de variable real nos permitirá a menudo aprovechar los resultados y métodos de la geometría algebraica compleja para obtener resultados relacionados en geometría real.

**I.1.e. El espacio proyectivo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  y sus variedades.** A continuación, para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , definimos el espacio proyectivo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  como el espacio cociente de  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , donde 0 es el origen de  $\mathbb{K}^{n+1}$ , con respecto a la relación de equivalencia

$$x \sim y \text{ si y sólo si existe } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tal que } y = \lambda x.$$

Para referirnos a un punto  $x$  de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  escribimos  $x = (x_0 : \dots : x_n)$ . Análogamente a como hemos hecho en el caso afín, en el espacio proyectivo se definen los *subconjuntos algebraicos proyectivos*  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  como los conjuntos de ceros comunes de familias finitas de polinomios *homogéneos*, es decir, polinomios  $F \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n]$  que satisfacen la igualdad  $F(\lambda x) = \lambda^d F(x)$  para cada  $\lambda \in \mathbb{K}$  y cada  $x \in \mathbb{K}^n$ , donde  $d$  es el grado de  $F$ . Se define la *topología de Zariski* de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  como la que tiene por subconjuntos cerrados a sus conjuntos algebraicos, e identificamos, vía la inmersión

$$j : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n),$$

el conjunto  $\mathbb{K}^n$  con el subconjunto  $\{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , que es abierto en la topología de Zariski de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , y por tanto en la usual. De hecho la topología inducida en  $\mathbb{K}^n$  por la topología de Zariski de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  coincide con su topología de Zariski. También en este contexto denominaremos *variedades algebraicas proyectivas* a los subconjuntos algebraicos proyectivos irreducibles de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , es decir, aquéllos que no pueden ser expresados como unión de dos subconjuntos algebraicos proyectivos más pequeños.

En este ámbito también tienen interés los conjuntos *cuasi-proyectivos*, que son los subconjuntos localmente cerrados de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  con su topología de Zariski, es decir, aquellos subconjuntos de  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  que son intersección de un abierto y un cerrado Zariski. Como en los casos anteriores, aquellos conjuntos cuasi-proyectivos que no son unión de dos subconjuntos cuasi-proyectivos propios se denominan *variedades algebraicas cuasi-proyectivas*. Puesto que podemos identificar  $\mathbb{K}^n$  con el subconjunto abierto  $\{x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , los subconjuntos algebraicos afines de  $\mathbb{K}^n$  son conjuntos algebraicos cuasi-proyectivos. Además, dado un conjunto algebraico proyectivo  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  existen conjuntos algebraicos cuasi-proyectivos,  $X_i = X \cap \{x_i \neq 0\}$ , donde  $0 \leq i \leq n$ , tales que  $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$ .

Dada una variedad algebraica cuasi-proyectiva  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  se define el cuerpo  $\Gamma(X)$  de *funciones racionales* sobre  $X$  como el conjunto formado por los cocientes de polinomios homogéneos  $F/G$  donde  $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  tienen el mismo grado  $d$ , además de la función racional idénticamente nula, módulo la relación de equivalencia,  $F_1/G_1 \equiv F_2/G_2$  si y sólo si el polinomio homogéneo  $F_2G_1 - F_1G_2$  es idénticamente nulo sobre  $X$ . Nótese que una función racional  $F/G$  está bien definida en el subconjunto  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(G)$  porque

$$\frac{F(\lambda x)}{G(\lambda x)} = \frac{\lambda^d F(x)}{\lambda^d G(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  y cada  $x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ .

### I.1.f. Aplicaciones racionales, regulares y morfismos entre variedades.

(1) Dados polinomios homogéneos  $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n]$  del mismo grado y una variedad algebraica proyectiva  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  consideramos la  $m$ -tupla  $F = (F_0, \dots, F_m)$  y el conjunto

$$N(F) := \{x \in X : F_0(x) = 0, \dots, F_m(x) = 0\}.$$

Se tiene así una aplicación, que llamamos *racional* y denotamos

$$F = (F_0 : F_1 : \dots : F_m) : X \setminus N(F) \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m, \quad x \mapsto (F_0(x) : F_1(x) : \dots : F_m(x)).$$

Además, si  $Y \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  es una variedad proyectiva y  $F(x) \in Y$  para todo  $x \in X \setminus N(F)$  la aplicación anterior define otra, que denotamos igual, entre  $X \setminus N(F)$  e  $Y$ . Nótese que esta aplicación tal vez pudiera extenderse a un subconjunto de  $X$  mayor que  $X \setminus N(F)$ , y la denotamos por

$$F = (F_0 : F_1 : \dots : F_m) : X \dashrightarrow Y, \quad x \mapsto (F_0(x) : F_1(x) : \dots : F_m(x)),$$

donde se emplea el símbolo  $\dashrightarrow$  en lugar de  $\rightarrow$  para indicar que no se quiere precisar cuál es el dominio de definición de  $F$ . En relación con esto veremos en el Capítulo 3 cómo se aborda el problema de resolver *el lugar de indeterminación* de una aplicación racional entre dos variedades proyectivas.

Una *equivalencia birracional* entre las variedades algebraicas proyectivas  $X$  e  $Y$  es una aplicación racional  $F : X \dashrightarrow Y$  tal que existe otra aplicación racional  $G : Y \dashrightarrow X$  que



satisface  $F \circ G = \text{id}_X$  y  $G \circ F = \text{id}_Y$ , donde ambas igualdades hay que entenderlas *en su dominio de definición*.

(2) Si  $X \subset \mathbb{K}^n$  e  $Y \subset \mathbb{K}^m$  son variedades algebraicas afines, una *aplicación racional* entre  $X$  e  $Y$  es una asignación

$$f = (f_1, \dots, f_m) : X \dashrightarrow Y, \quad x \mapsto (f_1(x)/g_1(x), \dots, f_m(x)/g_m(x)),$$

donde  $f_i, g_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  son polinomios tales que los  $g_i$  no son idénticamente nulos sobre  $X$ . Esta aplicación está definida en  $X \setminus \mathcal{Z}_X(g)$ , donde  $g = g_1 \cdots g_m$ , pero pudiera extenderse a un conjunto mayor.

(3) De modo más general se introduce el concepto de *morfismo entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas*. Antes de ello, decimos que una función racional  $\varphi \in \Gamma(X)$  es *regular* en un punto  $x$  de una variedad algebraica cuasi-proyectiva  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  si existen polinomios homogéneos  $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  del mismo grado tales que  $\varphi = F/G$  en  $X$  y  $G(x) \neq 0$ . Una función racional  $\varphi$  es *regular* en un abierto Zariski  $U$  de  $X$  si es regular en cada uno de los puntos de  $U$ . Por supuesto, si la variedad  $X$  es afín, entonces podemos definir la regularidad de funciones racionales, del modo evidente, usando polinomios de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

(4) Un *morfismo*  $\phi : X \rightarrow Y$  entre las variedades algebraicas cuasi-proyectivas  $X \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  e  $Y \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  es una aplicación continua respecto de la topología Zariski de  $X$  e  $Y$  tal que para cada subconjunto abierto Zariski  $U$  de  $Y$  y cada función racional  $\psi$  sobre  $Y$  que es regular en  $U$  se cumple que  $\psi \circ \phi \in \Gamma(X)$  es una función regular en  $\phi^{-1}(U)$ . Por tanto, los morfismos entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas son “aquellas aplicaciones que al componer con funciones regulares nos devuelven funciones regulares”. La composición de morfismos entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas es de nuevo un morfismo entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas. Además, todo morfismo  $\phi : X \rightarrow Y$  entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas induce un homomorfismo de anillos  $\phi^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[X]$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ \phi$ .

Observamos que si  $F : X \dashrightarrow Y$  es una aplicación racional entre las variedades algebraicas cuasi-proyectivas  $X$  e  $Y$  existe un abierto Zariski  $U \subset X \setminus N(F)$  tal que  $F|_U : U \rightarrow Y$  es un morfismo. Por otra parte, diremos que un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  es *birracional* si su restricción a un abierto Zariski adecuado de  $X$  es una aplicación birracional.

(5) Si  $X$  e  $Y$  son variedades algebraicas afines y  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  todos los morfismos  $f : X \rightarrow Y$  son aplicaciones polinómicas. Por otro lado, si  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  son variedades algebraicas afines y  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , los morfismos

$$f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow Y$$

son *aplicaciones regulares*, es decir, cada componente  $f_i$  es una función regular. De hecho, cada función regular  $f_i$  se puede escribir como un cociente polinomios  $f_i = p_i/q_i$  tales que  $q_i$  no se anula en ningún punto de  $X$ . Esto implica, en virtud del Positivstellensatz estricto para polinomios, [BCR, 4.4.3(ii)], que existen polinomios  $h_{i1}, \dots, h_{ik} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  tales que cada  $q_i = 1 + \sum_{j=1}^k h_{ij}^2$ .

**I.1.g. Algunos resultados relevantes de geometría algebraica compleja.** Para nuestros propósitos ulteriores necesitamos recordar algunos resultados fundamentales de la geometría algebraica de variedades complejas. Algunas de las referencias empleadas a este respecto son [Ha], [H1], [Mu], [Sh1] y [Sh2]. Comenzamos recordando algunos conceptos. Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre dos variedades algebraicas cuasi-proyectivas  $X$  e  $Y$  se dice *dominante* si  $\text{Cl}^{\text{zar}}(f(X)) = Y$ . Por otra parte, decimos que  $f$  es *genéricamente finito* si existe un abierto Zariski  $U$  de  $Y$  tal que las fibras  $f^{-1}(y)$  son finitas para cada  $y \in U$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo dominante y genéricamente finito, la extensión de cuerpos  $\Gamma(X)|f^*(\Gamma(Y))$  es finita. Además, si  $\dim(X) = \dim(Y)$ , entonces  $f$  es dominante si y sólo si  $f$  es genéricamente finita.

Recordamos que dada una extensión de anillos  $A \subset B$ , un elemento  $b \in B$  es *entero sobre  $A$*  si existen un entero positivo  $k$  y elementos  $a_0, \dots, a_k \in A$  tales que

$$b^k + a_{k-1}b^{k-1} + \dots + a_0 = 0.$$

El *cierre íntegro*  $\tilde{A}_B$  de  $A$  en  $B$  es el conjunto formado por todos los elementos de  $B$  que son enteros sobre  $A$ , y es un subanillo de  $B$ . Se llama *cierre íntegro* de un dominio de integridad  $A$ , y se denota  $\tilde{A}$ , a su cierre íntegro en su cuerpo de fracciones. La extensión  $A \subset B$  se dice *entera* si  $\tilde{A}_B = B$ . Se dice que un dominio de integridad  $A$  es *íntegramente cerrado* si coincide con su cierre íntegro. Se dice que un homomorfismo de anillos  $\varphi : A \rightarrow B$  es *finito* si la extensión de anillos  $\varphi(A) \subset B$  es entera.

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se dice que un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas es *finito* si es dominante y, además, existen recubrimientos finitos  $\{X_i : i \in I\}$  e  $\{Y_i : i \in I\}$  de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, tales que tanto  $X_i = f^{-1}(Y_i)$  como  $Y_i$  son abiertos Zariski de  $X$  e  $Y$ , son variedades algebraicas afines y el homomorfismo de anillos  $f^* : \Gamma[Y_i] \rightarrow \Gamma[X_i]$  es finito para cada índice  $i \in I$ .

Los morfismos finitos son aplicaciones cerradas y tienen fibras finitas, luego compactas. Se deduce por tanto de la Proposición I.2.1 que son aplicaciones propias. Más información acerca de los morfismos finitos puede obtenerse, ejemplo, en [Sh1, 5.3]. De hecho, los morfismos finitos y los morfismos entre variedades algebraicas proyectivas son casos particulares de un tipo más general de morfismo que recibe el nombre de *morfismo propio*, que tiene gran interés en geometría algebraica, pero que no necesitamos en el desarrollo de esta Memoria.

Recordamos también que una variedad algebraica cuasi-proyectiva  $X$  es *normal* si admite un recubrimiento finito  $\{X_i : i \in I\}$  de  $X$  tal que cada  $X_i$  es un abierto Zariski de  $X$ , es una variedad algebraica afín y el anillo de coordenadas  $\Gamma[X_i]$  es *íntegramente cerrado*, [Sh1, Ch.II, 5.1].

A lo largo de este trabajo se mencionarán y utilizarán otros conceptos y herramientas de la geometría algebraica de variedades complejas; entre otras, explosiones de puntos, propiedades de curvas y superficies algebraicas, etc. Éstos se presentarán detalladamente

en el capítulo de esta Memoria donde sean utilizados, para lo que nuestras referencias básicas son [Mu] y [Sh1].

En particular, los dos teoremas siguientes desempeñan un papel relevante en la obtención de algunos de los resultados más importantes de esta Memoria.

**Teorema I.1.6 (Teorema principal de Zariski, [H1, III.11.4])** Sean  $X$  e  $Y$  variedades algebraicas proyectivas complejas y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo birracional. Supongamos que  $Y$  es normal. Entonces, la fibra  $f^{-1}(y)$  es conexa para cada  $y \in Y$ .

**Teorema I.1.7 (Teorema de Factorización de Stein, [H1, III.11.5])** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo sobreyectivo entre variedades algebraicas proyectivas. Entonces, existen una variedad algebraica proyectiva  $Z$ , un morfismo finito  $g : Z \rightarrow Y$  y un morfismo  $h : X \rightarrow Z$  cuyas fibras son conexas tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \nearrow g \\ & & Z \end{array}$$

Si además  $X$  es una variedad algebraica proyectiva normal, entonces  $Z$  también lo es.

**I.1.h. Puntos regulares, lisos y singulares. Normalización.** Antes de recordar algunas de las principales propiedades de la normalización de una variedad algebraica afín revisamos los conceptos de *punto regular*, *punto liso* y *punto singular* que empleamos a lo largo de esta Memoria.

Decimos que un punto  $x$  de la variedad algebraica afín  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un *punto liso* de  $X$  de dimensión  $d$  si existe un difeomorfismo analítico  $\varphi : \mathcal{B}_d(\mathbf{0}, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ , donde  $\Omega$  es un entorno abierto de  $x$  en  $X$  con su topología usual.

Dados un punto  $x \in X$  y un abierto Zariski  $U$  de  $X$  que contiene al punto  $x$ , denotamos

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \Gamma[U] : f(x) = 0\},$$

sin hacer referencia explícita al abierto  $U$ . Este ideal es maximal, y se dice que  $x$  es un *punto regular* de  $X$  si existe un entorno abierto Zariski  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x$  en  $X$  que es además una variedad algebraica afín, tal que el anillo local  $\Gamma[U]_{\mathfrak{m}_x}$  es regular, es decir, su ideal maximal admite un sistema de generadores cuyo cardinal coincide con la dimensión de Krull de  $\Gamma[U]_{\mathfrak{m}_x}$ . Como consecuencia del criterio Jacobiano se cumple que  $x$  es un punto regular de  $X$  si y sólo si existe un sistema de generadores  $f_1, \dots, f_r$  del ideal  $\mathcal{J}(U)$  tal que el rango de la matriz Jacobiana

$$\left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{\substack{j=1, \dots, r \\ i=1, \dots, n}}$$

es  $n - d$ , donde  $d$  es la dimensión de Krull de  $\Gamma[U]_{\mathfrak{m}_x}$ . Denotaremos  $\text{Reg}(X)$  al conjunto de los puntos regulares de  $X$ , mientras que el conjunto de los *puntos singulares* de  $X$ , lo denotaremos por  $\text{Sing}(X) = X \setminus \text{Reg}(X)$ .

Mientras que en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  los puntos lisos y los puntos regulares de una variedad algebraica afín coinciden, en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  los conceptos de punto regular y punto liso son distintos; todo punto regular es liso de dimensión máxima, pero no todo punto liso, incluso de dimensión máxima, es regular, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo I.1.8** Para ilustrar la diferencia entre punto liso de dimensión máxima y punto regular, consideramos la variedad algebraica afín

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xz(x^2 + y^2) - y^4 = 0\},$$

y elegimos un punto  $p := (0, 0, a)$  con  $a \neq 0$ . El anillo  $\Gamma[X]_{\mathfrak{m}_p}$  no es regular, mientras que mediante las parametrizaciones

$$\varphi_\varepsilon : \{t > 0\} \rightarrow X \cap \{\varepsilon z > 0\}, (s, t) \mapsto \varepsilon((s^2 + t^2)s^2, (s^2 + t^2)st, t^4),$$

donde  $\varepsilon = \pm 1$ , cuyas imágenes recubren  $U = X \setminus \{0\}$ , se pone de manifiesto que todos los puntos de  $U$  son lisos.

A continuación recordamos algunos resultados relativos a la normalización de una variedad algebraica afín, real o compleja. Por razones técnicas que serán útiles posteriormente abordaremos la normalización de una variedad algebraica afín real, dentro de la menor variedad algebraica afín compleja que la contiene.

Momentáneamente introducimos la siguiente notación para distinguir variedades algebraicas afines reales y complejas. Sean  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y  $Z \subset \mathbb{K}^n$  una variedad algebraica afín de  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathfrak{a}$  un ideal del anillo de polinomios  $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Denotamos

$$\mathcal{J}_{\mathbb{K}}(Z) := \{f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}] : f(z) = 0 \ \forall z \in Z\} \quad \text{y} \quad \mathcal{Z}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}) := \{z \in \mathbb{K}^n : f(z) = 0, \ \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

Dado un subconjunto algebraico afín real  $X \subset \mathbb{R}^n$  denotamos

$$X_{\mathbb{C}} := \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0, \ \forall f \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(X)\},$$

que es el menor subconjunto algebraico afín de  $\mathbb{C}^n$  que contiene a  $X$ , y que recibe el nombre de *complexificación de  $X$* . Si denotamos

$$\sigma_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n),$$

diremos que un subconjunto  $A \subset \mathbb{C}^n$  es  $\sigma_n$ -invariante, o *invariante por conjugación*, si  $\sigma_n(A) = A$ . Por supuesto, si  $X$  es un subconjunto algebraico afín de  $\mathbb{R}^n$  su complexificado  $X_{\mathbb{C}}$  es  $\sigma_n$ -invariante.

El siguiente resultado es conocido, aunque no hemos encontrado una única referencia donde esté así formulado. El apartado (i) es un cálculo directo, (ii) se deduce de [E, 13.13], mientras que el apartado (iii) es una consecuencia casi inmediata de [Ra, §1. Thm. 1], [MR, Thm. 1.5] y [E, 4.13], este último para la segunda parte de (iii.2). Denotamos  $i = \sqrt{-1}$ .

**Proposición I.1.9 (Normalización)** Sean  $X \subset \mathbb{R}^n$  una variedad algebraica afín,  $\widetilde{\Gamma[X]}$  el cierre íntegro de su anillo de coordenadas y  $\widetilde{\Gamma[X_{\mathbb{C}}]}$  el cierre íntegro del anillo de coordenadas de su complejificación  $X_{\mathbb{C}}$ . Entonces:

(i) Se cumplen las siguientes igualdades:  $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}(X_{\mathbb{C}}) = \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(X)\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ ,

$$\Gamma[X_{\mathbb{C}}] = \Gamma[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Gamma[X][i] \quad \text{y} \quad \Gamma(X_{\mathbb{C}}) = \Gamma(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Gamma(X)[i].$$

(ii)  $\widetilde{\Gamma[X_{\mathbb{C}}]}$  es el cierre íntegro de  $\Gamma[X]$  en  $\Gamma(X_{\mathbb{C}})$  y  $\widetilde{\Gamma[X_{\mathbb{C}}]} = \widetilde{\Gamma[X]} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \widetilde{\Gamma[X]}[i]$ .

(iii) Existen un número entero  $m \geq n$ , y una variedad algebraica afín  $Y \subset \mathbb{R}^m$  tales que si denotamos  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{m-n})$ ,

(1)  $\widetilde{\Gamma[X]} \cong \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(Y)$  y  $\widetilde{\Gamma[X_{\mathbb{C}}]} \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] / \mathcal{J}_{\mathbb{C}}(Y_{\mathbb{C}})$ .

(2) Denotemos  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  la proyección sobre las  $n$  primeras coordenadas de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{C}^m$ , respectivamente. Entonces, las restricciones  $\pi|_Y : Y \rightarrow X$  y  $\pi_{\mathbb{C}}|_{Y_{\mathbb{C}}} : Y_{\mathbb{C}} \rightarrow X_{\mathbb{C}}$  son morfismos finitos.

(3)  $Y \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(X))$  es una subvariedad analítica del abierto  $\mathbb{R}^m \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(X))$  de  $\mathbb{R}^m$  e  $Y_{\mathbb{C}} \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\text{Sing}(X_{\mathbb{C}}))$  es una subvariedad analítica del abierto  $\mathbb{C}^m \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\text{Sing}(X_{\mathbb{C}}))$ . Más aún, las restricciones

$$\pi| : Y \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(X)) \rightarrow X \setminus \text{Sing}(X) \quad \text{y} \quad \pi_{\mathbb{C}}| : Y_{\mathbb{C}} \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\text{Sing}(X_{\mathbb{C}})) \rightarrow X_{\mathbb{C}} \setminus \text{Sing}(X_{\mathbb{C}})$$

son morfismos birregulares.

(4) La aplicación  $\pi_{\mathbb{C}}$  es sobreyectiva y  $\text{Cl}(\text{Reg}(X)) \subset \text{Im}(\pi)$ .

En lo que sigue  $(Y, \pi)$  se denominará la *normalización de  $X$*  e  $(Y_{\mathbb{C}}, \pi_{\mathbb{C}})$  la *normalización de la complejificación  $X_{\mathbb{C}}$  de  $X$* .

**Observación I.1.10** La Proposición anterior para variedades algebraicas afines se extiende de modo natural a conjuntos algebraicos afines no necesariamente irreducibles, empleando el anillo total de fracciones en lugar del cuerpo de fracciones del anillo de coordenadas.

## 1.2. Antecedentes I: El trabajo de Z. Jelonek

No se dispone hasta el momento de técnicas de carácter general para abordar el problema de decidir qué subconjuntos  $S \subset \mathbb{R}^m$  son imagen polinómica o regular de algún  $\mathbb{R}^n$ . Hemos observado, como consecuencia del Teorema de Tarski-Seidenberg, que una primera restricción es la semialgebricidad de  $S$ ; veremos sin embargo a lo largo de esta Memoria que existen multitud de conjuntos semialgebraicos que no son imagen polinómica de ningún espacio euclídeo. Se deben por tanto encontrar obstrucciones de naturaleza topológica o álgebra-geométrica que permitan asegurar que los invariantes  $p(S)$  o  $r(S)$  de un subconjunto semialgebraico  $S \subset \mathbb{R}^m$  no son finitos o son mayores que cierto entero. Encontraremos algunas de estas obstrucciones en el propio conjunto, su frontera, su exterior u otros conjuntos

asociados. En esta sección introducimos las nociones necesarias para describir dichas obstrucciones y enunciamos, sin demostración, los resultados auxiliares, esencialmente debidos a Z. Jelonek, quien los obtuvo en diversos trabajos (véase [J1, J2, J3, J4, J5]) dedicados al análisis y comprensión de la conjetura Jacobiana. En el Apéndice B de esta Memoria encontrará el lector interesado sus demostraciones.

**I.2.a. Aplicaciones propias y frontera exterior.** Veremos más adelante que la *frontera exterior* de  $S \subset \mathbb{R}^n$ , definida como  $\delta S := \text{Cl}(S) \setminus S$ , y que “mide cuánto se aleja”  $S$  de ser un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , desempeña un papel relevante para decidir la finitud de los invariantes  $p(S)$  y  $r(S)$  o acotar inferiormente su valor. La razón de esto estriba en que la frontera exterior de la imagen de una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  está relacionada con el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos en los que la aplicación  $f$  no es propia. Explicamos esto con precisión en el Lema I.2.4, pero comenzamos recordando la definición y caracterización habitual de las aplicaciones propias. Es claro que la imagen inversa por  $f$  de un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^m$  es siempre cerrada en  $\mathbb{R}^n$ ; sin embargo, la imagen inversa de un conjunto compacto no es necesariamente compacto. Las aplicaciones propias son aquéllas para las que la imagen inversa de un conjunto compacto es necesariamente compacto. Con más precisión,

**Definición y Proposición I.2.1** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua.

(i) Se dice  $f$  es *propia* si para cada subconjunto compacto  $K \subset Y$  el conjunto  $f^{-1}(K)$  es compacto.

(ii) *Supongamos que  $Y$  es un espacio Hausdorff y localmente compacto. Entonces  $f$  es propia si y solo si es cerrada y para cada  $y \in Y$  la fibra  $f^{-1}(y)$  es un conjunto compacto.*

**Definiciones I.2.2** Dada una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacio topológicos  $X$  e  $Y$  y un punto  $y \in Y$ , decimos que  $f$  es *propia en  $y$*  si existe un entorno  $W$  de  $y$  tal que la restricción  $f|_{f^{-1}(W)} : f^{-1}(W) \rightarrow W$  es una aplicación propia. Denotaremos  $\mathcal{S}_f \subset Y$  el conjunto de puntos  $y \in Y$  en los que  $f$  no es propia (convenimos aquí que cualquier  $f : \emptyset \rightarrow Y$  es propia).

**Observaciones I.2.3** (i) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$  y sea  $Z \subset Y$ . Entonces,  $g := f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$  es también propia, porque para cada subconjunto compacto  $K \subset Z$  también es compacto  $g^{-1}(K) = f^{-1}(K)$ .

(ii) Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos localmente compactos e  $Y$  es Hausdorff, es propia si y sólo si el conjunto  $\mathcal{S}_f$  es vacío.

(iii) Sea  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow Y$  una aplicación continua tal que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  e  $Y$  es un espacio topológico Hausdorff, que cumple el primer axioma de numerabilidad. Entonces,  $y \in \mathcal{S}_f$  si y sólo si existe una sucesión  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{K}^n$  tal que  $\|x_k\| \geq k$  para cada  $k \geq 1$  mientras que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{f(x_k)\}_k = y$ .

En efecto, supongamos que  $y \in \mathcal{S}_f$  y sea  $\{V_k\}_k$  una base de entornos de la topología de  $Y$  en  $y$ . Como  $f$  no es propia en  $y$ , para cada  $k \geq 1$  existe un subconjunto compacto  $K_k \subset V_k$  tal que  $f^{-1}(K_k)$  no es compacto; como  $K_k$  es cerrado,  $f^{-1}(K_k)$  es también cerrado y por tanto no puede ser acotado. Esto significa que podemos elegir  $x_k \in f^{-1}(K_k)$  tal que  $\|x_k\| \geq k$  para cada  $k \geq 1$ . Observamos que  $f(x_k) \in V_k$  y debemos tener  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{f(x_k)\}_k = y$ . El recíproco es evidente.  $\square$

El siguiente resultado relaciona la frontera exterior  $\delta\mathcal{S}$  de la imagen  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  de una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con el conjunto  $\mathcal{S}_f$ , y justifica nuestro interés en el estudio de este último conjunto.

**Lema I.2.4** *Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica y  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, el conjunto de puntos  $\mathcal{S}_f$  en los que  $f$  no es propia contiene a  $\delta\mathcal{S}$ .*

*Demostración.* Sean  $y \in \delta\mathcal{S}$  y supongamos que existe un entorno abierto  $W$  de  $y$  en  $\mathbb{R}^m$  tal que la restricción  $g = f|_{f^{-1}(W)} : f^{-1}(W) \rightarrow W$  es propia, y en particular es cerrada. Por tanto,

$$W \cap \mathcal{S} = W \cap f(\mathbb{R}^n) = g(f^{-1}(W))$$

es un subconjunto cerrado en  $W$ . Esto significa que

$$\mathcal{S} \cap W = \text{Cl}_W(\mathcal{S} \cap W) = \text{Cl}(\mathcal{S} \cap W) \cap W = (\text{Cl}\mathcal{S}) \cap W, \text{ es decir } \delta\mathcal{S} \cap W = \emptyset,$$

y esto es una contradicción ya que  $y \in \delta\mathcal{S} \cap W$ . En consecuencia,  $y \in \mathcal{S}_f$ .  $\square$

El Lema anterior sugiere estudiar las propiedades topológicas, y álgebra-geométricas del conjunto de puntos donde una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es propia. Esto fue llevado a cabo por Z. Jelonek en los artículos anteriormente citados. De hecho, Z. Jelonek aborda primero el caso complejo y deduce los resultados del caso real a través de la “complejificación” de la aplicación polinómica real, pues el comportamiento de las variedades algebraicas complejas presenta menos patologías que el de sus análogas reales.

A continuación, recordamos los enunciados de varios de los resultados más relevantes de los trabajos de Z. Jelonek en los que estudia las propiedades del conjunto  $\mathcal{S}_f$ . Algunos de ellos han sido fundamentales para nuestro trabajo porque nos han inspirado en la búsqueda de condiciones necesarias para que un subconjunto semialgebraico sea imagen polinómica o regular de un espacio euclídeo. Entre ellas se debe señalar el Teorema III.3.1 en el que probamos que si  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^m)$ , donde  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación polinómica no constante, entonces,  $\mathcal{S}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \cap H_\infty(\mathbb{R})$  es no vacío y conexo.

**I.2.b. Aplicaciones polinómicas complejas propias.** Comenzamos recordando que en el caso complejo las aplicaciones polinómicas propias  $f : X \rightarrow Y$  entre dos variedades algebraicas afines  $X$  e  $Y$ , quedan caracterizadas por las propiedades algebraicas del homomorfismo que  $f$  induce entre los anillos de coordenadas de  $Y$  y  $X$ .

**Proposición I.2.5** Sean  $X \subset \mathbb{C}^n$  e  $Y \subset \mathbb{C}^m$  variedades algebraicas afines complejas y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación polinómica. Entonces,  $f$  es propia si y sólo si el homomorfismo de anillos  $f^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[X]$ ,  $g \mapsto g \circ f$  es finito.

A continuación recordamos los conceptos de multiplicidad global y local.

**Definiciones I.2.6 (Multiplicidades global y local)** Recordamos que si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación regular dominante entre variedades algebraicas cuasi-proyectivas complejas, se define la *multiplicidad*  $\mu(f)$  de  $f$  como el número de elementos de una fibra genérica de  $f$ . Para calcularla procedemos como sigue:

- (i) Si  $\dim(Y) < \dim(X)$ , entonces  $\mu(f) = +\infty$ ;
- (ii) Si  $\dim(Y) = \dim(X)$ , entonces como consecuencia de [Mu, 3.17] existe un subconjunto algebraico  $Z \subset Y$  de dimensión  $\leq \dim(Y) - 1$  tal que la restricción

$$f|_{X \setminus f^{-1}(Z)} : X \setminus f^{-1}(Z) \rightarrow Y \setminus Z$$

es una aplicación propia y sobreyectiva que es difeomorfismo local. Se desprende de [Ho], que  $f|_{X \setminus f^{-1}(Z)}$  es una cubierta. Como  $Y$  es irreducible y  $\dim(Z) < \dim(Y)$  entonces  $Y \setminus Z$  es conexo (véase [Mu, 4.16]) y por tanto el cardinal de las fibras  $f^{-1}(y)$  es constante para cada  $y \in Y \setminus Z$ . Se cumple que  $\mu(f)$  es el cardinal de cualquiera de las fibras  $f^{-1}(y)$ , donde  $y \in Y \setminus Z$ , y coincide con el grado de la extensión algebraica de cuerpos  $\Gamma(X)|\Gamma(Y)$  (véase [Mu, 3.17]).

- (iii) Por otro lado, sean  $x \in X$  un punto tal que  $\{x\}$  es una componente conexa de  $f^{-1}(f(x))$  e  $Y$  es *uniramificada en  $f(x)$* , es decir,  $f(x)$  admite una base de entornos  $\{U_k\}_{k \geq 1}$  en  $Y$  tal que  $U_k \setminus T$  es conexo para todo  $k \geq 1$  y todo subconjunto algebraico  $T \subsetneq Y$ . Se define la *multiplicidad*  $\mu_x(f)$  de  $f$  en  $x$  del modo siguiente. Sea  $V$  un entorno abierto de  $x$  tal que existe un entorno abierto  $W$  de  $y := f(x)$  y un conjunto algebraico cerrado  $Z \subset Y$  de modo que  $f|_{V \setminus f^{-1}(Z)} : V \setminus f^{-1}(Z) \rightarrow W \setminus Z$  es una cubierta,  $W \setminus Z$  es conexo y  $f^{-1}(f(x)) \cap V = \{x\}$ . Entonces  $\mu_x(f)$  es igual al cardinal de cualquiera de las fibras de  $f|_{V \setminus f^{-1}(Z)}$ . La consistencia de esta definición se prueba, por ejemplo, en [Mu, 3.12].

**Observaciones I.2.7** (i) Obviamente, si la fibra  $f^{-1}(y)$  es finita, entonces se cumple que  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f) \leq \mu(f)$ .

- (ii) Si  $Y$  es una variedad algebraica cuasi-proyectiva compleja normal, entonces,  $Y$  es uniramificada en todos sus puntos.

En efecto, como  $Y$  es normal es localmente irreducible en sentido analítico, por lo que cada punto  $y \in Y$  admite una base  $\{U_k\}_{k \geq 1}$  de entornos abiertos irreducibles. Sea  $T \subsetneq Y$  un subconjunto algebraico; la intersección de  $T$  con  $U_k$  define un subconjunto analítico de  $U_k$  y, como éste es irreducible,  $U_k \setminus T$  es conexo (véase [Na, IV.1.Cor.2, pag. 68]). Por tanto,  $Y$  es uniramificada en todos sus puntos.



El siguiente resultado caracteriza en el caso algebraico afín las aplicaciones propias en un punto de la imagen, en términos de las multiplicidades global y local.

**Proposición I.2.8** Sean  $X, Y$  variedades algebraicas afines complejas de la misma dimensión tal que  $Y$  es normal y sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación regular dominante. Entonces  $f$  es propia en un punto  $y \in Y$  si y sólo si la fibra  $f^{-1}(y)$  es finita, no vacía, y  $\mu(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f)$ .

**I.2.c. Propiedades de  $\mathcal{S}_f$  en el caso complejo.** Tras describir algunas propiedades de las aplicaciones propias, nuestro objetivo principal en esta sección será describir el conjunto de puntos  $\mathcal{S}_f$  en los que una aplicación polinómica dominante  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia. “Geoméricamente” y a la vista de la Proposición B.1.9 lo podemos caracterizar como el conjunto de puntos  $y \in \mathbb{C}^n$  cuya fibra  $f^{-1}(y)$  tiene dimensión  $\geq 1$  o tiene dimensión cero y  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f) < \mu(f)$ . Antes de analizar las propiedades “algebraicas” de dicho conjunto, recordamos el significado de algunos de los conceptos que involucran nuestros próximos resultados.

**Definiciones I.2.9** (i) Se dice que una curva algebraica proyectiva compleja  $\Gamma$  es *racional* si existe una aplicación birracional entre  $\Gamma$  y la recta proyectiva compleja  $\mathbb{C}P^1$ .

(ii) Decimos que una curva algebraica afín compleja  $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}^n$  es *racional* si y sólo si su clausura de Zariski proyectiva es una curva racional.

(iii) Un subconjunto  $L \subset \mathbb{C}^n$  es una *línea paramétrica afín* si existe una aplicación polinómica  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $\phi(\mathbb{C}) = L$ .

(iv) Un conjunto  $S \subset \mathbb{C}^n$  es  *$\mathbb{C}$ -unireglado* si para cada punto  $p \in S$  existe una línea paramétrica afín  $L$  tal que  $p \in L \subset S$ . Con más generalidad, diremos que el conjunto  $S$  es *genéricamente  $\mathbb{C}$ -unireglado* si existe un subconjunto abierto y no vacío  $U \subset S$  en la topología de Zariski de  $S$  tal que para cada punto  $p \in U$  existe una línea paramétrica afín  $L$  tal que  $p \in L \subset S$ .

El siguiente resultado presenta una descripción “algebraica” del conjunto  $\mathcal{S}_f$ . Para simplificar la notación, denotaremos  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$ .

**Proposición I.2.10** Sea  $f := (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación polinómica dominante y consideremos la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$ , que es finita por ser  $f$  dominante. Para cada polinomio  $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  elegimos un polinomio irreducible

$$P_h(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{m_h} a_j^h(f) \mathbf{t}^j \in \mathbb{C}[f][\mathbf{t}],$$

donde cada  $a_j^h \in \mathbb{C}[f]$  y  $a_m^h \neq 0$  tal que  $P_h(h) = 0$ . Se cumple que:

(i)  $\{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_h}^h(y) = 0\} \subset \mathcal{S}_f$ .

(ii) Sean  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  tales que  $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_r]$ . Entonces, con las notaciones del apartado anterior,

$$\mathcal{S}_f = \bigcup_{i=1}^r \{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_{h_i}}^{h_i}(y) = 0\}.$$

(iii) En particular, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  de puntos en los que  $f$  no es propia es vacío o una hipersuperficie.

(iv) Existe una forma lineal  $h := \sum_{i=1}^n c_i x_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  que es un elemento primitivo de la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$  y para el que se cumple la igualdad

$$\mathcal{S}_f = \{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_h}^h(y) = 0\}.$$

Otra caracterización de naturaleza “geométrica” del conjunto  $\mathcal{S}_f$  es la siguiente.

**Proposición I.2.11** Sea  $G_f \subset \mathbb{C}^{2n}$  el grafo de una aplicación continua  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  y denotemos  $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  la proyección sobre el segundo factor. Entonces, el conjunto de puntos en los que  $f$  no es propia cumple la igualdad  $\mathcal{S}_f = \pi(\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n}(G_f) \setminus G_f)$ .

**Corolario I.2.12** Sea  $G_f$  el grafo de una aplicación polinómica dominante  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Supongamos que el conjunto algebraico multi-proyectivo complejo  $\widehat{G}_f = \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n}(G_f) \setminus G_f$  es irreducible. Entonces,  $f$  es propia.

**Observación I.2.13** El Corolario anterior generaliza un resultado elemental: la función polinómica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  inducida por un polinomio no constante  $f \in \mathbb{C}[\mathbf{t}]$  es una aplicación propia, porque para  $n = 1$  y  $f$  no constante el conjunto  $\widehat{G}_f$  se reduce a un punto, que es un conjunto irreducible.

El siguiente resultado recoge las principales propiedades del conjunto  $\mathcal{S}_f$  de puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que una aplicación polinómica  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia.

**Teorema I.2.14** Sea  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación polinómica dominante. Entonces, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  de puntos en los que la aplicación  $f$  no es propia es el conjunto vacío o una hipersuperficie  $\mathbb{C}$ -unireglada de grado no superior a

$$\frac{\prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f)}{\min_{i=1, \dots, n} \deg(f_i)}.$$

Además, se cumple que  $\deg(f^{-1}(\mathcal{S}_f)) \leq \prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f)$ .

**I.2.d. Propiedades de  $\mathcal{S}_f$  en el caso real.** De los resultados anteriores se desprenden otros, que exponemos a continuación y utilizaremos más adelante, acerca de la naturaleza del conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos en los que una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es propia. En lo que resta de esta sección, si  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto semialgebraico denotaremos por  $X_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$  la clausura de Zariski de  $X \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  en  $\mathbb{C}^n$ . Esta definición puede extenderse a conjuntos algebraicos de  $\mathbb{RP}^n$ ,  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m$ , etc. Una de las claves para “trasladar” al caso real los resultados del caso complejo es el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

**Lema I.2.15** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica genéricamente finita. Entonces el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos de  $\mathbb{R}^n$  donde  $f$  no es propia está contenido en el conjunto  $\mathcal{S}_{f_{\mathbb{C}}}$  formado por los puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que su complejificación  $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  no es propia.*

*Demostración.* Para todo punto  $y \in \mathcal{S}_f$  existe una sucesión  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\|x_k\| \geq k$  para cada  $k \geq 1$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{f(x_k)\}_k = y$ . Como  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ , se tiene  $y \in \mathcal{S}_{f_{\mathbb{C}}}$ .  $\square$

Introducimos a continuación las nociones que desempeñan en el caso real un papel análogo al que desarrollan aquéllas ya vistas en I.2.9 en el caso complejo.

**Definiciones I.2.16** (i) Un subconjunto  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  es una *semilínea paramétrica* si existe una aplicación polinómica no constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\mathbb{R}) = \mathcal{L}$ . Obsérvese que  $\mathcal{L}$  es un conjunto no acotado pues las imágenes de las aplicaciones polinómicas no constantes  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no son acotadas.

(ii) Un conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es  *$\mathbb{R}$ -unireglado* si para cada punto  $p \in \mathcal{S}$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $p \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ . Además, el conjunto  $\mathcal{S}$  es *genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado* si existe un subconjunto abierto y denso  $U \subset \mathcal{S}$  en la topología usual de  $\mathcal{S}$  tal que para cada punto  $p \in U$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  con  $p \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ .

El siguiente resultado recoge una propiedad fundamental acerca del conjunto  $\mathcal{S}_f \subset \mathbb{R}^n$  formado por los puntos donde una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es propia.

**Teorema I.2.17** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica no constante. Entonces, el conjunto  $\mathcal{S}_f \subset \mathbb{R}^2$  formado por los puntos en los que  $f$  no es propia es la unión de una familia finita, tal vez vacía, de semilíneas paramétricas.*

Para aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $n > 2$  las propiedades conocidas acerca del conjunto  $\mathcal{S}_f$  son menos concluyentes que las del Teorema I.2.17, pero las emplearemos en I.3.3 para obtener una condición necesaria para que un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  cumpla la igualdad  $p(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}) = m$ .

**Teorema I.2.18** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica no constante con  $n \geq 2$ . Entonces el conjunto  $\mathcal{S}_f$  es semialgebraico,  $\mathbb{R}$ -unireglado, cerrado en  $\mathbb{R}^m$  y, si es no vacío, la dimensión de cada una de sus componentes conexas está comprendida entre 1 y  $n - 1$ .*

### I.3. Antecedentes II: El trabajo de Fernando–Gamboa.

En este apartado describimos las principales contribuciones realizadas por J.F. Fernando y J.M. Gamboa, en la búsqueda de condiciones de carácter topológico o geométrico que son satisfechas por las imágenes polinómicas de espacios euclídeos. Empezamos por aquéllas de comprobación más sencilla, y recordamos que el Teorema de Tarski–Seidenberg implica que si un subconjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  es imagen polinómica de algún  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\mathcal{S}$  es semialgebraico. Recordamos que un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  tiene *dimensión pura* si el conjunto  $\text{Reg}(\text{Cl}^{\text{zar}} \mathcal{S}) \cap \mathcal{S}$  formado por los puntos regulares de  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  contenidos en  $\mathcal{S}$  es denso en  $\mathcal{S}$ .

**Lema I.3.1** *Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica y  $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,*

- (i)  $\mathcal{S}$  tiene dimensión pura.
- (ii)  $\mathcal{S}$  es un conjunto semialgebraico irreducible. En particular,  $\mathcal{S}$  es conexo y su clausura de Zariski es también irreducible.
- (iii) Si  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una función polinómica, entonces  $g(\mathcal{S})$  es un punto o un intervalo no acotado. En particular, la imagen de  $\mathcal{S}$  por una proyección lineal es un punto o un conjunto semialgebraico no acotado.

**Observación I.3.2** Veremos en la Proposición III.4.5 que las propiedades anteriores son consecuencia de que las imágenes polinómicas  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  son *conexas por semilíneas paramétricas*, es decir, dados dos puntos  $p, q \in \mathcal{S}$  existe una aplicación polinómica  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ ,  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = q$ . Por ello, para evitar repeticiones innecesarias, postponemos la prueba del Lema I.3.1 hasta entonces.

A continuación veremos algunas propiedades de la frontera exterior  $\delta\mathcal{S} := \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  de una imagen polinómica  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  de algún  $\mathbb{R}^n$ . Los siguientes resultados, que fueron probados por vez primera en [FG2], son consecuencia del Lema I.2.4 y de los resultados de Z. Jelonek presentados en la sección anterior.

**Teorema I.3.3** *Sean  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto semialgebraico  $n$ -dimensional que es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\delta\mathcal{S}$  su frontera exterior. Entonces, existen dos conjuntos semialgebraicos  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \subset \mathbb{R}^n$  que satisfacen las siguientes condiciones:*

- (i)  $\dim(\mathcal{S}_1) \leq n - 2$ .
- (ii) Bien  $\mathcal{S}_0$  es el conjunto vacío o bien es un subconjunto  $(n - 1)$ -dimensional, cerrado en  $\mathbb{R}^n$  y genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado.

(iii)  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ , existe una aplicación polinómica  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ . Por el Teorema I.2.18, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  es cerrado, semialgebraico,  $\mathbb{R}$ -unireglado y  $\dim(\mathcal{S}_f) \leq n - 1$ . Sean  $X_1, \dots, X_\ell$  las componentes irreducibles de  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_f)$ . Podemos suponer que  $\dim(X_i \cap \delta\mathcal{S}) \leq n - 2$  si y sólo si  $1 \leq i \leq r$  para algún  $r \leq \ell$ . Consideramos el conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}_1 = \bigcup_{i=1}^r X_i \cap \delta\mathcal{S}$ , de dimensión  $\leq n - 2$ .

Si  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1$ , entonces tomamos  $\mathcal{S}_0 = \emptyset$  y hemos terminado. En otro caso, sea

$$\mathcal{T} := \left( \mathcal{S}_f \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i \right) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}) = (\mathcal{S}_f \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})) \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i.$$

Como  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_f \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ , también  $\text{Cl}(\mathcal{T}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ . Además,  $\mathcal{T}$  y  $\text{Cl}(\mathcal{T})$  son conjuntos semialgebraicos y  $\mathcal{T}$  es un subconjunto abierto de  $\text{Cl}(\mathcal{T})$ .

Comprobemos ahora que para cada  $x \in \mathcal{T}$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \text{Cl}(\mathcal{T})$ . En efecto, como  $\mathcal{S}_f$  es un conjunto  $\mathbb{R}$ -unireglado, para cada  $x \in \mathcal{T} \subset \mathcal{S}_f$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}_f$ . Puesto que  $x \in \mathcal{T}$ , la semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  no está contenida en ninguno de los conjuntos algebraicos  $X_1, \dots, X_r$ , por lo que  $\mathcal{L} \cap \bigcup_{i=1}^r X_i$  es un conjunto finito y  $\text{Cl}(\mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i) = \mathcal{L}$ . Por otra parte, como  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_f$  es irreducible, existe  $r+1 \leq j \leq \ell$  tal que  $\mathcal{L} \subset X_j$ . Más aún, por ser  $X_j$  irreducible y  $\dim(X_j \cap \delta\mathcal{S}) = n - 1 = \dim(X_j)$ , concluimos que  $\mathcal{L} \subset X_j \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ . Esto implica que

$$\mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i \subset \left( \mathcal{S}_f \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i \right) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}) = \mathcal{T},$$

luego  $\mathcal{L} = \text{Cl}(\mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i) \subset \text{Cl}(\mathcal{T})$ . Así, el conjunto semialgebraico  $(n - 1)$ -dimensional  $\mathcal{S}_0 = \text{Cl}(\mathcal{T})$  es cerrado en  $\mathbb{R}^n$  y genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado. Comprobamos finalmente que  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ . Como  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_f \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ , si existe algún punto  $x \in \delta\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$  entonces

$$x \in \delta\mathcal{S} \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i \subset \left( \mathcal{S}_f \setminus \bigcup_{i=1}^r X_i \right) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}) = \mathcal{T} \subset \mathcal{S}_0,$$

y esto concluye la demostración. □

**Observaciones I.3.4** (1) El conjunto  $\mathcal{S}_0$  en el teorema anterior es genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado, pero no sabemos si es de hecho  $\mathbb{R}$ -unireglado. Hasta donde sabemos, el problema de determinar qué conjuntos semialgebraicos genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglados son  $\mathbb{R}$ -unireglados todavía permanece abierto.

(2) Es claro que la unión de conjuntos  $\mathbb{R}$ -unireglados también lo es. Sin embargo, las componentes irreducibles de un conjunto algebraico  $\mathbb{R}$ -unireglado  $X \subset \mathbb{R}^n$  no tienen que ser

ni siquiera genéricamente  $\mathbb{R}$ -uniregladas. Como ejemplo, consideremos  $X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^3$  donde  $X_1$  y  $X_2$  son los conjuntos algebraicos irreducibles de ecuaciones

$$X_1 : x_3^2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 = 0 \quad y \quad X_2 : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

El cilindro  $X_2$  es  $\mathbb{R}$ -unireglado, mientras que  $X_1$  es la unión de la imagen de la aplicación

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \mapsto (t^2, s, t(t^4 + s^2 - 1))$$

y la circunferencia  $C = \{x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ . Nótese que para cada  $p \in X_1 \setminus \{x_1 < 0\}$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L} \subset X_1$  que pasa por  $p$ ; por tanto,  $X$  es  $\mathbb{R}$ -unireglado. Sin embargo, para cada punto  $q \in X_1 \cap \{x_1 < 0\} = C \cap \{x_1 < 0\}$  no hay una semilínea paramétrica que pasa por  $q$  y esté contenida en  $X_1$ ; por consiguiente,  $X_1$  no es ni siquiera genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado, ya que  $X_1 \setminus C$  no es denso en  $X_1$ .

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.3.3 es la siguiente obstrucción para que un subconjunto semialgebraico  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  sea imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Corolario 1.3.5** Sean  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico  $n$ -dimensional y  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto algebraico  $(n - 1)$ -dimensional. Supongamos que  $X \cap \text{Cl}(\mathcal{S})$  es acotado y que  $\dim(X \cap \delta\mathcal{S}) = n - 1$ . Entonces  $\mathcal{S}$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . Por el Teorema 1.3.3 existen dos conjuntos semialgebraicos  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \subset \mathbb{R}^n$  que satisfacen:

- (i)  $\dim(\mathcal{S}_1) \leq n - 2$ ,
- (ii)  $\mathcal{S}_0$  es vacío o un conjunto cerrado,  $(n - 1)$ -dimensional y genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado,
- (iii)  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ .

Como  $\dim(X \cap \delta\mathcal{S}) = n - 1$  y  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ , también  $\dim(X \cap \delta\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_0) = n - 1$ . De aquí que  $X$  y  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_0)$  comparten una componente irreducible  $Y$  de dimensión  $n - 1$  que satisface  $\dim(Y \cap \delta\mathcal{S}) = n - 1$ . Como  $\dim(Y \cap \delta\mathcal{S}) = n - 1$  y  $\dim(\mathcal{S}_1) \leq n - 2$  existe un punto  $x \in Y \cap \delta\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_0$  que no pertenece a ninguna de las otras componentes irreducibles de  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_0)$ . Como  $\mathcal{S}_0$  es un conjunto genéricamente  $\mathbb{R}$ -unireglado, podemos elegir  $x \in Y \cap \delta\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_0$  de modo que existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_0$  que lo contiene.

Ahora queremos ver que  $\mathcal{L} \subset Y \subset X$ . Puesto que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_0$ , tenemos  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{L}) \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_0)$ . Al ser  $\mathcal{L}$  irreducible, deducimos que  $x \in \mathcal{L} \subset Z$  para alguna componente irreducible  $Z$  de  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_0)$ . De hecho, necesariamente  $Z = Y$ , pues  $Y$  es la única componente irreducible de  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_0)$  que contiene a  $x$ . Por tanto,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_0 \cap X \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap X$ , y esto es una contradicción porque  $X \cap \text{Cl}(\mathcal{S})$  es un conjunto acotado y  $\mathcal{L}$  no lo es.  $\square$

**Observación 1.3.6** El resultado previo no se extiende a un conjunto algebraico  $X$  de codimensión  $\geq 2$ . Por ejemplo, consideremos el octante

$$\mathcal{S} := \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

que es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^3$  según probaremos en la Proposición II.3.21, y la recta  $X = \{x_3 = 0, x_1 + x_2 = 1\}$ . Observamos que  $\dim(X \cap \delta\mathcal{S}) = 1$  y que la intersección

$$X \cap \text{Cl}(\mathcal{S}) = \{x_3 = 0, x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

es un conjunto acotado.

**Ejemplo I.3.7** Los conjuntos semialgebraicos

$$\mathcal{S} = \{x_1 *_1 0, \dots, x_n *_n 0, x_1 + \dots + x_n > 1\},$$

donde  $*_i$  denota  $>$  o  $\geq$ , no son imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$ . En efecto, el hiperplano  $X = \{x_1 + \dots + x_n = 1\}$  es un conjunto algebraico  $(n - 1)$ -dimensional y la intersección

$$X \cap \text{Cl}(\mathcal{S}) = \{x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} = X \cap \delta\mathcal{S}$$

es acotado y tiene dimensión  $n - 1$ , y basta aplicar el Corolario I.3.5.

**Corolario I.3.8** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  un polígono abierto convexo. Entonces  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$  si y sólo si  $\mathcal{S}$  tiene sólo dos aristas, es decir,  $\mathcal{S}$  es afínmente equivalente a un cuadrante abierto.*

*Demostración.* En primer lugar supongamos que  $\mathcal{S}$  tiene más de dos aristas. Entonces alguna de ellas, que denotamos  $\mathcal{E}$  es acotada. Como  $\mathcal{S}$  es convexo,  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{E}) \cap \text{Cl}(\mathcal{S}) = \text{Cl}(\mathcal{E})$  es un segmento acotado. Se deduce de I.3.5 que  $\mathcal{S}$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{S}$  sólo tiene dos aristas entonces es afínmente equivalente a un cuadrante abierto, y esto implica, por la Proposición II.3.1, que  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

A continuación mostramos que el Teorema I.3.3 puede ser ligeramente mejorado en el caso  $n = 2$ ; volveremos sobre este resultado en la Sección III.6. Podemos hacer esto porque, como hemos visto en el Teorema I.2.17, conocemos propiedades del conjunto  $\mathcal{S}_f$  que son específicas para aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; en este sentido es conveniente comparar los resultados [J5, 4.2] y [J5, 6.4].

**Teorema I.3.9** *Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica cuya imagen  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2)$  es bidimensional. Entonces, su frontera exterior  $\delta\mathcal{S}$  es vacía o existen un conjunto finito  $F$  y una familia finita de semilíneas paramétricas  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$  tales que*

$$\delta\mathcal{S} \subset F \cup \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}).$$

*Demostración.* Por el Teorema I.2.17, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  es vacío o una unión finita de semilíneas paramétricas  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ , y podemos suponer que existe un entero  $r$  tal que el conjunto  $\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}$  es finito, tal vez vacío, si y sólo si  $r < i \leq s$ . En consecuencia, el conjunto  $F = (\mathcal{L}_{r+1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_s) \cap \delta\mathcal{S}$  es un subconjunto finito de  $\delta\mathcal{S}$ .

Ahora demostramos que  $\mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$  para cada índice  $1 \leq i \leq r$ . En primer lugar, recordemos que  $\mathcal{S}_f \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$ . Por otra parte, como  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{L}_i)$  es un conjunto algebraico irreducible de dimensión 1 y  $\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}$  es infinito entonces  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{L}_i) \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ , y por tanto  $\mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ . Finalmente, como  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_f$ , se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \delta\mathcal{S} \cap \mathcal{S}_f = \bigcup_{i=1}^s (\delta\mathcal{S} \cap \mathcal{L}_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^r (\delta\mathcal{S} \cap \mathcal{L}_i) \cup \bigcup_{i=r+1}^s (\delta\mathcal{S} \cap \mathcal{L}_i) \subset \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \cup F \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S}), \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

Terminamos la sección con el siguiente resultado, que emplearemos con posterioridad.

**Proposición I.3.10** *Sean  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  polinomios que no se anulan simultáneamente en el origen. Entonces, existe una aplicación polinómica  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  cuya imagen es el conjunto  $\mathcal{S} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ , donde*

$$X := \{f_1 = 0, \dots, f_r = 0, x_{n+1} = 0\}.$$

*Nótese que  $\delta\mathcal{S} = X$ .*

*Demostración.* Consideramos las aplicaciones polinómicas

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1 x_{n+1}, \dots, x_n x_{n+1}, x_{n+1}), \\ h: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \left( x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \left( 1 - x_{n+1}^2 \sum_{i=1}^r f_i^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Es obvio que  $g(\mathbb{R}^{n+1}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_{n+1} = 0\}) \cup \{\mathbf{0}\}$ . En cuanto a la aplicación  $h$ , observamos que para cada  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , la recta vertical  $\ell_a = \{x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es invariante por  $h$ . Además,

- (i) Si  $(a, 0) \in X$  se cumple la igualdad  $h(\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) = \ell_a \setminus \{(a, 0)\}$ ;
- (ii) Si  $(a, 0) \notin X$ , entonces  $h(\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) = \ell_a$ .
- (iii)  $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \notin X$ .



De estas propiedades de  $g$  y  $h$  se deduce que la composición  $f := h \circ g$  es una aplicación polinómica que satisface la igualdad  $f(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus X = \mathcal{S}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}^{n+1}) &= h((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_{n+1} = 0\}) \cup \{\mathbf{0}\}) = \{h(\mathbf{0})\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n} h(\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) \\ &= \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup_{(a,0) \notin X} \ell_a \cup \bigcup_{(a,0) \in X} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus X. \end{aligned}$$

Finalmente,  $\delta\mathcal{S} = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathbb{R}^{n+1} \setminus X) = X$ .  $\square$

## 1.4. Poliedros convexos

En los Capítulos IV y V de esta Memoria centraremos nuestra atención en una familia especial de conjuntos semialgebraicos, la formada por los *poliedros convexos*. Es por ello conveniente introducir algunas nociones y resultados fundamentales relativos a este tipo de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , que serán fundamentales para el desarrollo de dichos capítulos. Para el estudio detallado de las propiedades de los conjuntos convexos remitimos al lector a [Be1, Be2], [Gr] y [R]. Exponemos a continuación algunos resultados generales sobre poliedros convexos que utilizaremos en los capítulos citados. A lo largo de toda esta sección  $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$  denota el anillo de polinomios  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

**1.4.a. Generalidades.** Para cada hiperplano afín  $H \subset \mathbb{R}^n$  existe un polinomio  $h \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  de grado uno tal que  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\} = \mathcal{Z}(h)$ . Este polinomio  $h$  determina dos *semiespacios cerrados*  $H^+$  y  $H^-$ , definidos por

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\} \equiv \{h \geq 0\} \quad \text{y} \quad H^- := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\} \equiv \{h \leq 0\}.$$

Los semiespacios anteriores quedan determinados de modo natural por la orientación de  $H$  inducida por el vector normal que apunta en la dirección de  $H^+$ , es decir,  $H^+ := \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq 0\}$  si y solo si  $H := \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  y el vector normal “que orienta a  $H^+$ ” es el vector  $\frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$ . De este modo, la asignación de las etiquetas  $H^+$  y  $H^-$  la atribuiremos a la elección del polinomio  $h$  que se elige para describir el hiperplano  $H$  y es equivalente a orientar  $H$ . Por supuesto, basta sustituir  $h$  por  $-h$  para intercambiar los papeles de  $H^+$  y  $H^-$ .

Además, como es habitual denotaremos por  $\vec{h}$  a la parte homogénea de grado 1 de  $h$  y por  $\vec{H} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{h}(\vec{v}) = 0\}$  al *hiperplano vectorial de dirección de  $H$* . De modo más general si  $W \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio afín, denotamos por  $\vec{W}$  el *subespacio vectorial de dirección de  $W$* .

**Definiciones y Notaciones I.4.1** (i) Se dice que un subconjunto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un *poliedro convexo* si se puede escribir como intersección finita  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^r H_i^+$ , donde cada  $H_i^+$  es un

semiespacio cerrado; permitimos que esta familia de semiespacios sea vacía, en cuyo caso  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ . La dimensión  $\dim(\mathcal{K})$  de un poliedro convexo  $\mathcal{K}$  es su dimensión como variedad topológica con borde, y coincide con su dimensión como subconjunto semialgebraico de  $\mathbb{R}^n$ . Cuando es necesario especificar la dimensión  $k$  de un poliedro convexo diremos que es un *poliedro convexo  $k$ -dimensional*.

(ii) Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional. Según [Be2, 12.1.5] existe una familia única  $\{H_1, \dots, H_m\}$  de hiperplanos afines de  $\mathbb{R}^n$ , que es vacía si y sólo si  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ , de cardinalidad mínima entre todas aquéllas que satisfacen la igualdad  $\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ . Esta familia  $\mathfrak{H} := \{H_1, \dots, H_m\}$  es, en particular, irredundante; nos referimos a ella como la *presentación mínima* de  $\mathcal{K}$ . Senso estricto, para determinar  $\mathcal{K}$  a partir de  $\mathfrak{H}$  necesitamos conocer además un punto  $p \in \mathcal{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i$  que nos permita elegir ecuaciones lineales  $h_i$  que definen  $H_i$  de modo que  $\mathcal{K} \subset H_i^+$ . Por supuesto, en lo sucesivo siempre supondremos que hemos elegido correctamente la ecuación lineal  $h_i$ .

Las *facetas* de  $\mathcal{K}$  son las intersecciones  $\mathcal{F}_i := H_i \cap \mathcal{K}$  para  $1 \leq i \leq m$ . El único poliedro de  $\mathbb{R}^n$  que no tiene facetas es el propio  $\mathbb{R}^n$ . Cada faceta  $\mathcal{F}_j = H_j^- \cap \bigcap_{i=1}^m H_i^+$  es, a su vez, un poliedro convexo contenido en  $H_j$ . También decimos que  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  son las  $(n-1)$ -*caras* de  $\mathcal{K}$ . Por otra parte, denotaremos  $\mathcal{K}_{i,\times} = \bigcap_{j \neq i} H_j^+$ . Obsérvese que  $\mathcal{K}_{i,\times}$  es un poliedro convexo que, por la minimalidad de la familia  $\{H_1, \dots, H_m\}$ , contiene estrictamente a  $\mathcal{K}$ . Además,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{i,\times} \cap H_i^+$ .

Para  $0 \leq j \leq n-2$ , definimos inductivamente las  $j$ -*caras* de  $\mathcal{K}$  como las facetas de las  $(j+1)$ -*caras* de  $\mathcal{K}$ , que son de nuevo poliedros convexos. En particular, las 0-*caras* son los *vértices* de  $\mathcal{K}$  y las 1-*caras* son las *aristas* de  $\mathcal{K}$ ; obsérvese que si  $\mathcal{K}$  tiene un vértice entonces  $m \geq n$  (véase [Be2, 12.1.8-9]). En general, denotamos por  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$  que no es necesariamente una faceta, para distinguirla de las facetas  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  del poliedro  $\mathcal{K}$ , y el subespacio afín generado por  $\mathcal{E}$  se denota habitualmente por  $W$  para distinguirlo de los hiperplanos  $H_1, \dots, H_m$  generados por las facetas  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  de  $\mathcal{K}$ .

(iii) Sea  $\mathcal{E}$  un poliedro convexo  $k$ -dimensional o una de sus  $j$ -*caras*. Entonces  $\mathcal{E}$  es una variedad topológica con borde, cuyo interior  $\text{Int}_\vee \mathcal{E}$  es la mayor variedad topológica sin borde contenida en  $\mathcal{E}$ . Nótese que  $\text{Int}_\vee \mathcal{E}$  coincide con el interior  $\text{Int}(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{E}$  en  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $\dim(\mathcal{E}) = n$ . El *borde* de  $\mathcal{E}$  es  $\partial \mathcal{E} = \mathcal{E} \setminus \text{Int}_\vee \mathcal{E}$ ; en particular, si  $\mathcal{E}$  sólo contiene un punto,  $\text{Int}_\vee \mathcal{E} = \mathcal{E}$  y  $\partial \mathcal{E} = \emptyset$ .

Dado un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  se tiene  $\partial H^+ = H = \partial H^-$ . Si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo, un *hiperplano de soporte* de  $\mathcal{K}$  es un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  que corta a  $\mathcal{K}$  y cumple que  $\mathcal{K} \subset H^+$  o  $\mathcal{K} \subset H^-$ . Veremos en el Lema 1.4.3 que la intersección de un poliedro  $\mathcal{K}$  con uno de sus hiperplanos de soporte es una cara de  $\mathcal{K}$ . En el Capítulo III comprobaremos que los hiperplanos de soporte juegan un papel importante para comprender mejor el comportamiento “en el infinito” de un poliedro convexo no acotado.

(iv) Recordamos además que si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo acotado, entonces  $\mathcal{K}$  coincide con la clausura convexa del conjunto formado por sus vértices, es decir, si  $p_1, \dots, p_r$

son los vértices de  $\mathcal{K}$ , entonces

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i p_i : \mu_i \geq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \right\}.$$

En el Lema I.4.20, recordaremos una caracterización similar para poliedros no acotados que involucra, como es de esperar, los vértices y vectores directores de las aristas no acotadas.

(v) Un tipo particular de poliedros convexos son los conos (acotados o no). El *cono acotado de vértice  $p$  y base el poliedro convexo acotado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$*  es el conjunto

$$\mathcal{C} := \{ \lambda p + (1 - \lambda)q : q \in \mathcal{P}, 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

(véase [RS, Ch.1]). Por otra parte, dados un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y vectores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$  se define el *cono (no acotado) de vértice  $p$  generado por los vectores  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$*  como el conjunto  $\mathcal{C} := \{ p + \sum_{i=1}^r \lambda_i \vec{v}_i : \lambda_i \geq 0 \}$ .

(vi) Un caso particular de conos acotados y no acotados son los segmentos y las semirrectas, respectivamente. En lo sucesivo, dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^n$  denotaremos  $\overline{pq} := \{ \lambda p + (1 - \lambda)q : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$  el *segmento cerrado que une  $p$  con  $q$* . Por otra parte, dados un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , denotamos  $p\vec{v} := \{ p + \lambda \vec{v} : \lambda \geq 0 \}$  la *semirrecta cerrada o rayo de extremo  $p$  y dirección  $\vec{v}$* . La frontera del segmento  $\mathcal{E} := \overline{pq}$  como variedad topológica con borde es  $\partial \mathcal{E} = \{p, q\}$  y su interior es  $\text{Int}_v \mathcal{E} = \mathcal{E} \setminus \{p, q\}$ , mientras que la frontera de la semirrecta  $\mathcal{S} := p\vec{v}$  como variedad topológica con borde es  $\partial \mathcal{S} = \{p\}$  y su interior es  $\text{Int}_v \mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus \{p\}$ .

(vii) Si  $K \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n$  es un poliedro convexo, denotaremos  $\widehat{K} := \text{Cl}_{\mathbb{RP}^n}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{K}_\infty := \widehat{K} \cap \text{H}_\infty(\mathbb{R})$ , donde  $\text{H}_\infty(\mathbb{R}) := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n : x_0 = 0\}$  es el hiperplano de infinito del espacio proyectivo  $\mathbb{RP}^n$ .

Las *aplicaciones afines*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  son aquellas aplicaciones que preservan las combinaciones afines de puntos, es decir, dados puntos  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^n$  y escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tales que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$  se cumple que  $f(\sum_{i=1}^r \lambda_i p_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(p_i)$ . En particular, las aplicaciones afines son aplicaciones polinómicas que preservan la convexidad, y por tanto transforman poliedros convexos en poliedros convexos. Dada una aplicación afín  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  denotaremos por  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la aplicación lineal asociada a  $f$  (que por supuesto coincide con su derivada).

A lo largo de esta Memoria utilizaremos frecuentemente proyecciones afines  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sobre un subespacio afín  $W$  en la dirección de un subespacio vectorial  $\vec{V}$  (tales que  $\vec{W} \oplus \vec{V} = \mathbb{R}^n$ ), y biyecciones afines del espacio  $\mathbb{R}^n$ , a las que nos referiremos como *cambios afines de coordenadas*. Dos subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  se dicen *afínmente equivalentes* si existe un cambio afín de coordenadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(X) = Y$ ; como es natural, en todos los enunciados y demostraciones relativas a poliedros convexos podremos reemplazar uno de estos conjuntos por otro afínmente equivalente.

El siguiente resultado representa el borde y el interior de un poliedro en términos de su presentación mínima.

**Lema I.4.2** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional,  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  y  $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m\}$  el conjunto de sus facetas. Entonces  $\partial\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i$  e  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \bigcap_{i=1}^m (H_i^+ \setminus H_i)$ .

*Demostración.* En virtud de [Be2, 12.1.5],  $\partial\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i = \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{K} \cap H_i)$  y, por tanto,

$$\text{Int}(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \setminus \partial\mathcal{K} = \mathcal{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{K} \cap H_i) = \bigcap_{j=1}^m H_j^+ \cap \bigcap_{i=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus H_i) = \bigcap_{i=1}^m (H_i^+ \setminus H_i),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema I.4.3** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hiperplano tal que  $\mathcal{K} \subset H^+$ . Entonces  $\mathcal{K} \cap H = \partial\mathcal{K} \cap H$ , y esta intersección es el conjunto vacío o una cara de  $\mathcal{K}$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre la dimensión  $n$  de  $\mathcal{K}$ . Si  $n = \dim(\mathcal{K}) = 1$  podemos asumir que  $H^+ = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ ; luego, o bien  $\mathcal{K} \subset \{x > 0\}$  y así  $\mathcal{K} \cap H = \emptyset$ , o bien  $\mathcal{K} \cap H = \{0\}$ , que es una cara de  $\mathcal{K}$ . Supongamos probado el resultado para poliedros con dimensión menor que  $n$ , y sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional. Como  $\mathcal{K} \subset H^+$  tenemos  $\text{Int}(\mathcal{K}) \subset \text{Int}(H^+)$ , y por tanto  $\mathcal{K} \cap H \subset \partial\mathcal{K}$ , luego  $\mathcal{K} \cap H = \partial\mathcal{K} \cap H$ . Sean  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  las facetas de  $\mathcal{K}$ . Por I.4.2,  $\partial\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i$ , y

$$\mathcal{K} \cap H = \partial\mathcal{K} \cap H = \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{F}_i \cap H).$$

Tras reordenar los índices  $1 \leq i \leq m$ , podemos suponer que  $\dim(\mathcal{F}_1 \cap H) \geq \dim(\mathcal{F}_j \cap H)$  para cada  $2 \leq j \leq m$ ; de aquí que  $\dim(\mathcal{K} \cap H) = \dim(\mathcal{F}_1 \cap H) = d \leq n - 1$ . Observamos que  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{F}_1 \cap H$ . En efecto, como  $\mathcal{F}_1 \cap H \subset \mathcal{K} \cap H$  son poliedros de la misma dimensión generan el mismo subespacio afín  $W$ . Dicho subespacio está contenido en el hiperplano  $H_1$  de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathcal{F}_1$ . Por tanto,  $\mathcal{F}_1 \cap H = \mathcal{K} \cap H_1 \cap H = \mathcal{K} \cap H$ .

Distinguimos dos posibilidades: o bien  $H = H_1$  y  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K} \cap H_1 = \mathcal{K} \cap H$ , o bien  $H \cap H_1$  es un hiperplano de  $H_1$  y  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K} \cap H_1 \subset H^+ \cap H_1$ . En el primer caso  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{F}_1$  es una cara de  $\mathcal{K}$  y en el segundo, y al ser  $\dim(\mathcal{F}_1) = n - 1$ , se sigue de la hipótesis de inducción que

$$\mathcal{K} \cap H = \mathcal{F}_1 \cap H = \mathcal{F}_1 \cap (H \cap H_1) = \emptyset \quad \text{o} \quad \mathcal{K} \cap H = \mathcal{F}_1 \cap (H \cap H_1) = \mathcal{F}_1 \cap H = \mathcal{K} \cap H$$

es una cara de  $\mathcal{F}_1$ , luego de  $\mathcal{K}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario I.4.4** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y  $H$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,  $H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  si y sólo si  $\emptyset \neq \mathcal{K} \cap H \subset \partial\mathcal{K}$ .

*Demostración.* En primer lugar, observamos que podemos suponer para el resto de la prueba que  $\mathcal{K}$  es  $n$ -dimensional. Ahora, como consecuencia del Lema I.4.3, se cumple que si  $H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$ , entonces  $\emptyset \neq \mathcal{K} \cap H \subset \partial\mathcal{K}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\emptyset \neq \mathcal{K} \cap H \subset \partial\mathcal{K}$ . Como  $\dim \mathcal{K} = n$  y  $\dim H = n-1$ , podemos suponer que existe  $p \in H^+ \cap \text{Int}(\mathcal{K})$ . Veamos ahora que  $\mathcal{K} \cap H^- \subset \partial\mathcal{K}$ . En caso contrario, existe un punto  $q \in H^- \cap \text{Int}(\mathcal{K})$ . Como  $\text{Int}(\mathcal{K})$  es convexo, se cumple que  $\overline{pq} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Por otro lado, como  $p \in H^+$  y  $q \in H^-$ , entonces existe un punto  $b \in H \cap \overline{pq} \subset H \cap \text{Int}(\mathcal{K})$ ; lo que contradice la inclusión  $\partial\mathcal{K} \supset H \cap \mathcal{K}$ . Por tanto,  $\text{Int}(\mathcal{K}) \subset H^+$  y como  $H^+$  es cerrado, tenemos que  $\mathcal{K} = \text{Cl}(\text{Int}(\mathcal{K})) \subset H^+$ , luego  $H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  (usando también la hipótesis  $\mathcal{K} \cap H \neq \emptyset$ ).  $\square$

**Corolario I.4.5** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$ . Entonces existe un hiperplano  $H$  de soporte de  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{E}$ .

*Demostración.* Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  y supongamos, tras reordenar los índices si fuera necesario, que  $H_1, \dots, H_r$  son los hiperplanos de la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{E}$ . Escribimos  $H_i := \{h_i = 0\}$  para polinomios  $h_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  de grado 1 tales que  $\mathcal{K} \subset H_i^+ = \{h_i \geq 0\}$  y consideramos el polinomio  $h := h_1 + \dots + h_r \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  de grado 1, que cumple que  $\mathcal{K} \subset \{h \geq 0\}$  y

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{K} \cap \{h = 0\} = \mathcal{K} \cap \{h_1 \geq 0, \dots, h_r \geq 0, h = 0\} = \mathcal{K} \cap \{h_1 = 0, \dots, h_r = 0\} = \mathcal{E}.$$

Por el Corolario I.4.4, deducimos que  $H := \{h = 0\}$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$ .  $\square$

**Corolario I.4.6** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo de dimensión  $n \geq 2$  y  $p$  un punto de  $\mathcal{K}$ . Entonces,  $p$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  si y sólo si existe un hiperplano  $H$  (de soporte) de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{K} \cap H = \{p\}$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $p$  es un vértice de  $\mathcal{K}$ . Como consecuencia del Corolario I.4.5 existe un hiperplano  $H$  (de soporte) de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{K} \cap H = \{p\}$ . Recíprocamente, supongamos que existe un hiperplano  $H$  con  $\mathcal{K} \cap H = \{p\}$ . En particular,  $p \in \partial\mathcal{K}$  y por el Corolario I.4.4  $H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$ . Ahora por el Lema I.4.3,  $\{p\} = \mathcal{K} \cap H$  es una cara de  $\mathcal{K}$  y así  $p$  es un vértice de  $\mathcal{K}$ .  $\square$

**I.4.b. Polígonos.** Como es habitual denominamos *polígonos convexos* a los poliedros convexos de dimensión 2 contenidos en  $\mathbb{R}^2$ . Como estamos suponiendo que  $\dim(\mathcal{K}) = 2$ , el interior  $\text{Int}_v \mathcal{K}$  y la frontera  $\partial\mathcal{K}$  de  $\mathcal{K}$  como variedad topológica con borde coinciden, respectivamente, con su interior y frontera como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Veamos algunas propiedades básicas de los polígonos que nos serán de utilidad más adelante.

**Lema I.4.7** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  un polígono convexo. Entonces se satisface una de las siguientes condiciones, que son excluyentes dos a dos:*

- (i)  $\mathcal{P}$  es un polígono acotado cuyo borde es semialgebraicamente homeomorfo a una circunferencia.
- (ii)  $\mathcal{P}$  es un semiplano cerrado con una sola arista, que es una recta.
- (iii)  $\mathcal{P}$  es afínmente equivalente a  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  y tiene exactamente dos aristas, que son rectas paralelas. En este caso diremos que  $\mathcal{P}$  es una banda.
- (iv) El borde  $\partial\mathcal{P}$  de  $\mathcal{P}$  es semialgebraicamente homeomorfo a  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{P}$  tiene exactamente dos aristas no acotadas. En particular,  $\partial\mathcal{P}$  contiene al menos un vértice.

*Demostración.* La demostración de este resultado se sigue fundamentalmente de [Be1, 11.3.4-8]. Si  $\mathcal{P}$  no es acotado su borde es homeomorfo a  $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}$  o a  $\mathbb{R}$ ; el primer caso se da, exactamente, cuando  $\mathcal{P}$  es una banda. Suponemos ahora que  $\mathcal{P}$  no es acotado y no satisface ni (ii) ni (iii), y escribimos  $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^m H_i^+$  con  $m \geq 2$ . Entonces, el borde de  $\mathcal{P}$  es semialgebraicamente homeomorfo a  $\mathbb{R}$  y este borde contiene exactamente dos aristas no acotadas, con lo que se cumple (iv).  $\square$

El resultado anterior nos permite describir los polígonos convexos con uno o más vértices del modo siguiente.

- (i) Si el polígono  $\mathcal{K}$  es acotado y  $v_1, \dots, v_m$  son sus vértices consecutivos, entonces escribimos  $\mathcal{K} := [v_1, \dots, v_m]$ . En este caso las aristas del polígono son  $\overline{v_1 v_2}, \dots, \overline{v_{m-1} v_m}, \overline{v_m v_1}$ .
- (ii) Si el polígono  $\mathcal{K}$  no está acotado, sus vértices consecutivos son  $v_1, \dots, v_{m-1}$  y sus aristas no acotadas son las semirrectas  $v_1 \vec{u}$  y  $v_{m-1} \vec{w}$ , entonces las  $n$  aristas de  $\mathcal{K}$  son  $v_1 \vec{u}, \overline{v_1 v_2}, \dots, \overline{v_{m-2} v_{m-1}}$  y  $v_{m-1} \vec{w}$ , y denotamos  $\mathcal{K} := [\vec{u}, v_1, \dots, v_{m-1}, \vec{w}]$ .

Si un polígono  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  es intersección de 2 semiplanos esenciales, se dan dos posibilidades en función de su posición relativa:

- (i) Un *ángulo* es un polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera es la unión de dos semirrectas cerradas que comparten el origen.
- (ii) Una *banda* es un polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera es la unión de dos rectas paralelas.

Otro ejemplo de polígono que desempeñará un papel importante en nuestra discusión es el siguiente:

(iii) Una *semibanda* es un polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  afínmente equivalente al conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, -1 \leq y \leq 1\}.$$

**I.4.c. Cono director de un poliedro convexo.** A los poliedros convexos les podemos asociar conjuntos denominados *conos directores* que serán de utilidad más adelante. Presentamos a continuación su definición y propiedades básicas.

**Definición I.4.8** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y  $p \in \mathcal{K}$ . Definimos el *cono director* de  $\mathcal{K}$  en el punto  $p$  como  $\vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K}) := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : p\vec{v} \subset \mathcal{K}\}$ . Denotaremos  $\text{Con}_p(\mathcal{K})$  el cono  $p + \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$ , que coincide con la unión de todas las semirrectas cerradas de  $\mathbb{R}^n$  contenidas en  $\mathcal{K}$  que tienen a  $p$  como extremo, o con  $\{p\}$  si  $\mathcal{K}$  no contiene ninguna semirrecta.

De la definición I.4.8 se deducen directamente los resultados siguientes:

**Lema I.4.9** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y  $p \in \mathcal{K}$ . Se cumple que:

- (i) Si  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\lambda\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$ .
- (ii) Si  $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces  $\lambda\vec{v} + (1 - \lambda)\vec{w} \in \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$ .

*Demostración.* Únicamente la afirmación (ii) requiere algún comentario. Tenemos que probar que si  $0 \leq \lambda \leq 1$  entonces  $p(\lambda\vec{v} + (1 - \lambda)\vec{w}) \subset \mathcal{K}$ . En efecto, sea  $x \in p(\lambda\vec{v} + (1 - \lambda)\vec{w})$ , esto es, existe  $\mu \geq 0$  tal que  $x = p + \mu(\lambda\vec{v} + (1 - \lambda)\vec{w})$ . Como  $p\vec{v}, p\vec{w} \subset \mathcal{K}$  tanto  $p + \mu\vec{v}$  como  $p + \mu\vec{w}$  pertenecen al conjunto convexo  $\mathcal{K}$ , y deducimos que:

$$x = p + \mu(\lambda\vec{v} + (1 - \lambda)\vec{w}) = \lambda(p + \mu\vec{v}) + (1 - \lambda)(p + \mu\vec{w}) \in \mathcal{K},$$

como queríamos demostrar. □

El resultado anterior justifica el nombre de cono que reciben  $\vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$  y  $\text{Con}_p(\mathcal{K})$ . Comprobemos a continuación que el cono director de un poliedro convexo  $\mathcal{K}$  no depende del punto elegido para calcularlo:

**Lema I.4.10** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo. Entonces,  $\vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K}) = \vec{\mathcal{C}}_q(\mathcal{K})$  para cualesquiera  $p, q \in \mathcal{K}$ .

*Demostración.* Basta comprobar que, dado  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}_p(\mathcal{K})$ , se cumple que  $q\vec{v} \subset \mathcal{K}$ . Podemos suponer que  $q \notin p\vec{v} \cup p(-\vec{v})$  porque en caso contrario, al ser  $\mathcal{K}$  convexo, la comprobación de la inclusión  $q\vec{v} \subset \mathcal{K}$  es inmediata.

Sean  $x \in q\vec{v} \setminus \{q\}$  y  $\mu > 0$  tales que  $x - q = \mu\vec{v}$ . Elegimos una sucesión de puntos  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset p\vec{v} \setminus \{p\}$  de modo que la sucesión  $\{\|y_k - p\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  tiende a  $+\infty$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  sea  $\rho_k > 0$  tal que  $y_k - p = \rho_k\vec{v} = \lambda_k(x - q)$ , donde  $\lambda_k := \rho_k/\mu > 0$ . Nótese que la sucesión

$\{\lambda_k = \|y_k - p\|/\|x - q\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  también tiende a  $+\infty$ . Como  $q, y_k \in \mathcal{K}$  y este conjunto es convexo, cada segmento  $\overline{qy_k}$  está contenido en  $\mathcal{K}$ . Ahora bien, como  $y_k = p + \lambda_k(x - q)$  tenemos

$$z_k := \left(\frac{1}{1 + \lambda_k}\right)p + \left(\frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k}\right)x = \left(\frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k}\right)q + \left(\frac{1}{1 + \lambda_k}\right)y_k \in \overline{qy_k} \subset \mathcal{K},$$

y como  $\mathcal{K}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  concluimos que

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k}\right)x + \left(\frac{1}{1 + \lambda_k}\right)p \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K},$$

y con esto hemos terminado la prueba.  $\square$

A la vista del lema anterior definimos:

**Definición y Observaciones I.4.11** (1) El *cono director* de un poliedro convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , que denotamos  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , es el cono director de  $\mathcal{K}$  en cualquiera de sus puntos; obviamente,  $\text{Con}_p(\mathcal{K}) = p + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  para cada  $p \in \mathcal{K}$ .

(2) Dados dos poliedros convexos  $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$  se cumple que  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_1) \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_2)$ .

(3) Se comprueba directamente que si el poliedro convexo  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^r H_i^+$  no es vacío, entonces  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) := \bigcap_{i=1}^r \vec{\mathcal{C}}(H_i^+) = \bigcap_{i=1}^r \vec{H}_i^+$ . En consecuencia, si  $\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_s\}$  son poliedros convexos cuya intersección  $\mathcal{K} := \bigcap_{j=1}^s \mathcal{K}_j$  es no vacía, debemos tener  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) := \bigcap_{j=1}^s \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_j)$

**Lema I.4.12** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo. Entonces,  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\mathbf{0}\}$  si y sólo si  $\mathcal{K}$  es un poliedro acotado.

*Demostración.* Demostraremos el resultado anterior por inducción sobre la dimensión  $d$  de  $\mathcal{K}$ . Si  $d = 1$  el resultado es inmediato pues los únicos poliedros convexos de dimensión 1 son los segmentos, las semirrectas y las rectas. Supongamos el resultado cierto para dimensión  $d-1$  y veamos que también es cierto para dimensión  $d$ . Si  $\mathcal{K}$  es un poliedro acotado entonces  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\mathbf{0}\}$ , así que supondremos que  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \neq \{\mathbf{0}\}$  y que  $\mathcal{K}$  no es acotado. Fijamos un punto  $p \in \mathcal{K}$  y para cada entero  $k \geq 0$  elegimos  $y_k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{B}_n(p, k)$ ; denotamos  $\vec{v}_k := y_k - p$ . Como  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \neq \{\mathbf{0}\}$ , cada semirrecta  $p\vec{v}_k$  no está contenida en  $\mathcal{K}$  y por tanto corta a  $\partial\mathcal{K}$  en un punto  $z_k \in \partial\mathcal{K} \setminus \mathcal{B}_n(p, k)$ . Como  $\partial\mathcal{K}$  es una unión finita de facetas  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathcal{K}$ , podemos suponer que  $z_k \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{B}_n(p, k)$  para cada  $k \geq 1$  y así  $\mathcal{F}_1$  es un poliedro no acotado. Por hipótesis de inducción  $\{\mathbf{0}\} \neq \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1) \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\mathbf{0}\}$ , que es una contradicción; por tanto,  $\mathcal{K}$  es acotado.  $\square$

**I.4.d. Poliedros degenerados y no degenerados.** Un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^n$  es *no degenerado* si tiene al menos un vértice. En caso contrario, decimos que el poliedro es *degenerado*. A continuación presentamos algunas propiedades relacionadas con poliedros convexos degenerados y no degenerados.



**Lema I.4.13** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{K}$  es degenerado.
- (ii)  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$  o existe un poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ , donde  $1 \leq k \leq n-1$ , tal que, tras un cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ .
- (iii)  $\mathcal{K}$  contiene una recta  $\ell$ .
- (iv) Existe una recta vectorial  $\vec{\ell}$  contenida en  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$  para cada cara  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{K}$ .

*Demostración.* Comenzamos demostrando (i)  $\implies$  (ii) y supondremos que  $\mathcal{K} \neq \mathbb{R}^n$ . Sea  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$  de dimensión mínima. Al ser  $\mathcal{K}$  un poliedro convexo degenerado no tiene vértices, por lo que  $1 \leq \dim(\mathcal{E}_0) = k < n$ . Además,  $\mathcal{E}_0$  no tiene facetas, pues en caso contrario  $\mathcal{K}$  tendría caras de dimensión menor que  $\dim(\mathcal{E}_0)$ . En consecuencia,  $\mathcal{E}_0$  es afínmente equivalente a  $\mathbb{R}^k$ . Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que

$$\mathcal{E}_0 := \{x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\} = \mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\}.$$

Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  y sea  $h_i := a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i0} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio de grado uno tal que  $H_i^+ = \{h_i \geq 0\}$ . Como  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{K}$ ,

$$a_{i1}y_1 + \dots + a_{ik}y_k + a_{i0} = h_i(y, \mathbf{0}) \geq 0$$

para todo  $y \in \mathbb{R}^k$ . Así,  $a_{i1} = 0, \dots, a_{ik} = 0$  para cada índice  $1 \leq i \leq m$ , esto es, cada  $h_i := a_{i,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{in}x_n + a_{i0}$ . De aquí que  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ , donde

$$\mathcal{P} := \{z = (z_{k+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n-k} : h_1(\mathbf{0}, z) \geq 0, \dots, h_m(\mathbf{0}, z) \geq 0\}$$

es un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^{n-k}$ . Nótese que  $\mathbf{0}$  es un vértice de  $\mathcal{P}$ , por lo que  $\mathcal{P}$  es no degenerado.

Las implicaciones (ii)  $\implies$  (iii) y (iv)  $\implies$  (i) son inmediatas, así que procedemos a demostrar (iii)  $\implies$  (i). Observamos en primer lugar que  $\vec{\ell} \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  y para cada  $p \in \mathcal{K}$  denotamos  $\ell_p := p + \vec{\ell}$ . Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Entonces, cada  $H_i$  es paralelo a  $\ell$ ; en caso contrario,  $H_i \cap \ell$  es un único punto, luego  $\ell \not\subset H_i^+$ , por lo que  $\ell \not\subset \mathcal{K}$ , contradicción. Así, si  $\mathcal{F}_i := \mathcal{K} \cap H_i$  y  $p_i \in \mathcal{F}_i$ , se cumple que  $\ell_{p_i} \subset \mathcal{K} \cap H_i = \mathcal{F}_i$ . Ahora, dada una cara  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{K}$  existen, por [Be2, 12.1.9], facetas  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$  de  $\mathcal{K}$  tales que  $\mathcal{E} = \bigcap_{j=1}^s \mathcal{F}_j$ . Sea  $p \in \mathcal{E}$ ; como  $\ell_p \subset \mathcal{F}_j$  para  $1 \leq j \leq s$ , entonces  $\ell \subset \bigcap_{j=1}^s \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_j) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ , con lo que concluye la prueba.  $\square$

**Lema I.4.14** *Sea  $n \geq 2$  y sea  $\mathcal{K}$  un poliedro convexo no degenerado. Entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  es conexo.*

*Demostración.* Fijamos dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y consideramos un plano  $\Pi$  que pase por  $p$  y  $q$ . Observamos que  $\mathcal{P} := \mathcal{K} \cap \Pi$  es vacío o un poliedro de dimensión  $\leq 2$ ; además, en este último caso  $\mathcal{P}$  es no degenerado, porque en caso contrario, por el Lema I.4.13,  $\mathcal{K}$  también sería degenerado. Si  $\mathcal{P} = \emptyset$ , el segmento  $\overline{pq} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  conecta  $p$  y  $q$  y hemos terminado. En caso contrario, basta demostrar, después de un cambio de coordenadas, que si  $\mathcal{P}$  es un poliedro convexo no degenerado de  $\mathbb{R}^2$ , podemos conectar los puntos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$ .

En efecto, si  $\mathcal{P}$  tiene dimensión 1, entonces  $\mathcal{P}$  es una semirrecta y  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$  es conexo. A continuación, supongamos que  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  tiene dimensión 2. Sea  $\{\ell_1, \dots, \ell_m\}$  la presentación minimal de  $\mathcal{P}$ . Consideramos la recta  $\ell$  generada por  $p$  y  $q$ . Si el segmento  $\overline{pq}$  no interseca  $\mathcal{P}$ , conectamos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$  usando el segmento  $\overline{pq}$ . Por otro lado, si  $\overline{pq} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ , podemos suponer que  $p \in \text{Int}_v \ell_1^-$  y  $q \in \text{Int}_v \ell_m^-$ . Consideramos las rectas  $\ell'_1 := p + \vec{\ell}_1$  y  $\ell'_m := q + \vec{\ell}_m$  que están contenidas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$ . Distinguímos dos casos:

- (1) Si estas rectas no son paralelas, conectamos  $p$  y  $q$  usando el conjunto conexo  $\ell'_1 \cup \ell'_m$ .
- (2) Si estas rectas son paralelas, podemos suponer, después de un cambio de coordenadas y usando que  $\mathcal{K}$  es no degenerado, que  $\ell'_1 := \{x_1 = a\}$ ,  $\ell_1 := \{x_1 = 0\}$ ,  $\ell_m := \{x_1 = 1\}$  y  $\ell'_m := \{x_1 = b\}$  donde  $a < 0 < 1 < b$  y que  $\ell_2 = \{x_2 = 0\}$ . Ahora, conectamos  $p$  y  $q$  usando el conjunto conexo  $\ell'_1 \cup \{x_2 = -1\} \cup \ell'_m$ .  $\square$

Veamos a continuación cómo es la estructura del cono director de un poliedro convexo degenerado. Como acabamos de ver, salvo cambio afín de coordenadas, un poliedro degenerado es un producto  $\mathcal{K} := \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$  donde  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro no degenerado.

**Corolario I.4.15** Sean  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro no degenerado y  $k \geq 1$ . Entonces  $\vec{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^k \times \mathcal{P}) = \mathbb{R}^k \times \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ .

*Demostración.* Sean  $\vec{v} := (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^k \times \mathcal{P})$  y  $p \in \mathcal{P}$ . Entonces para cada  $\lambda \geq 0$  se cumple que  $(\mathbf{0}, p) + \lambda(v_1, v_2) = (\mathbf{0} + \lambda\vec{v}_1, p + \vec{v}_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ , con lo que  $p\vec{v}_2 \subset \mathcal{P}$ . Por tanto  $\vec{v} \in \mathbb{R}^k \times \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$ . El recíproco es análogo.  $\square$

**I.4.e. Poliedros en posición FU.** A lo largo del desarrollo de las partes de esta Memoria que involucran poliedros convexos no acotados será conveniente encontrar una forma de colocarlos en una posición adecuada para facilitar su estudio. Una de ellas será la siguiente.

**Definición I.4.16** Decimos que el poliedro convexo no degenerado y no acotado  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  está en *posición FU* (“facing upwards”) con respecto al hiperplano (vectorial y orientado)  $\vec{\Pi}$  de  $\mathbb{R}^n$  si existe un hiperplano (afín)  $\Pi$  paralelo a  $\vec{\Pi}$  que corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  y tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en el semiespacio abierto  $\text{Int}(\Pi^-)$ . Sea  $\vec{h} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio (homogéneo) de grado uno que determina  $\vec{\Pi}$  y coherente con su orientación y definimos  $h := 0 + \vec{h}$ . Decimos que la posición FU con respecto a  $\vec{\Pi}$  es *óptima*

si el mínimo de la función  $h|_{\mathcal{K}}$  se alcanza en un único punto  $p \in \mathcal{K}$  (que es necesariamente un vértice de  $\mathcal{K}$ ); dicho punto será denominado *vértice mínimo* de  $\mathcal{K}$  (con respecto a  $\vec{\Pi}$ ).

Probaremos a continuación que todo poliedro convexo no degenerado puede colocarse, tras un cambio afín de coordenadas, en posición FU óptima con respecto al hiperplano  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$ .

**Lema I.4.17** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no degenerado  $n$ -dimensional. Entonces, mediante de un cambio afín de coordenadas, podemos colocar  $\mathcal{K}$  en posición FU óptima con respecto a  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$  de modo que  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 1\}$ .*

*Demostración.* Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Como  $\mathcal{K}$  es no degenerado entonces  $m \geq n$ . Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer, reordenando los índices  $1 \leq i \leq m$  en caso necesario, que  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{\mathbf{0}\}$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  y  $H_i^+ = \{x_i \geq 0\}$  para  $1 \leq i \leq n$ . En consecuencia,

$$\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \subset \{x_1 + \dots + x_n > 0\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Ahora aplicamos un nuevo cambio afín de coordenadas que transforma el semiespacio  $\{x_1 + \dots + x_n \geq 0\}$  en  $\{h := x_n \geq 0\}$  y mantiene fijo el vértice  $\mathbf{0}$ . Nótese que  $h(\mathbf{0}) < h(x)$  para cada  $x \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Veamos que, después de este cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{K}$  está en posición FU óptima con respecto al hiperplano (vectorial)  $\vec{\Pi} = \{\vec{h} := x_n = 0\}$ .

En primer lugar, elegimos  $M > 0$  tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en la bola abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, M)$  y consideramos el hiperplano  $\Pi := \{x_n = M\}$ ; evidentemente, todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en  $\text{Int}(\Pi^-)$ .

Sea ahora  $\mathcal{A}$  una arista no acotada de  $\mathcal{K}$ . Como  $\mathcal{K}$  es no degenerado existen un vértice  $p \in \mathcal{K}$  y  $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  tales que  $\mathcal{A} = p\vec{v}$  (véase el Lema I.4.13). Observamos que como  $p := (p_1, \dots, p_n)$  en un vértice de  $\mathcal{K}$ , entonces  $p_n < M$ . Como  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , la semirrecta  $\mathbf{0}\vec{v} \subset \mathcal{K}$  y como  $\mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \{x_n > 0\}$ , tenemos que  $v_n > 0$ . Por tanto, existe  $t_0 > 0$  tal que  $p_n + t_0 v_n = M$  y esto significa que  $p + t_0 \vec{v} \in \mathcal{A} \cap \Pi$ .

Por tanto  $\mathcal{K}$  está en posición FU óptima con respecto al hiperplano  $\{x_n = 0\}$ . Si ahora trasladamos  $\mathcal{K}$  mediante la traslación de vector  $\vec{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$ , observamos que el poliedro trasladado sigue en posición FU óptima con respecto al hiperplano  $\{x_n = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 1\}$ .  $\square$

El siguiente resultado nos permite, entre otras cosas, reducir la prueba de algunas proposiciones sobre poliedros convexos al caso de poliedros convexos acotados.

**Lema I.4.18** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n$  un poliedro convexo no degenerado y no acotado  $n$ -dimensional en posición FU óptima con respecto a  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$  y que no corta al*

hiperplano  $\Pi_0 := \{x_n = 0\}$ . Recordamos que  $\widehat{\mathcal{K}} := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{K}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K}) \cap \text{H}_\infty(\mathbb{R})$  y consideramos la homografía involutiva

$$\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n, (x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n) \mapsto (x_n : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_0),$$

cuya restricción a  $\mathbb{R}^n$  es la aplicación racional

$$f := \phi|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) := \left( \frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{1}{x_n} \right).$$

Entonces,

- (i)  $\widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \sqcup \mathcal{K}_\infty$ .
- (ii)  $\mathcal{K}' := \text{Cl}(f(\mathcal{K})) = \phi(\widehat{\mathcal{K}}) \subset \mathbb{R}^n \equiv \{y_0 \neq 0\}$  es un poliedro convexo acotado (no degenerado) y una de sus caras es  $\mathcal{E}' := \phi(\mathcal{K}_\infty)$ .
- (iii)  $f$  es regular en  $\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'$  y satisface la igualdad  $f(\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}') = \mathcal{K}$ . Además, la restricción  $f|_{\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'} : \mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{K}$  es un homeomorfismo birregular y  $f(\text{Int}(\mathcal{K}')) = \text{Int}(\mathcal{K})$ .

*Demostración.* El apartado (i) es inmediato porque  $\mathcal{K}$  es cerrado en  $\mathbb{R}^n$ . Para probar (ii), en primer lugar demostramos que  $\phi(\widehat{\mathcal{K}}) \cap \text{H}_\infty(\mathbb{R}) = \emptyset$ , es decir, que  $\phi(\widehat{\mathcal{K}}) \subset \mathbb{R}^n$ . En caso contrario, como  $\mathcal{K} \cap \Pi_0 = \emptyset$ , existe  $z := (0 : \vec{v}) \in \mathcal{K}_\infty \cap \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\Pi_0)$ ; observamos que  $\vec{v} := (v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \in \vec{\Pi}$ . Como  $\mathcal{K}$  está en posición FU óptima con respecto a  $\{x_n = 0\}$ , existe un vértice  $p := (p_1, \dots, p_n)$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $p_n < x_n$  para todo  $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K} \setminus \{p\}$ . Sea  $\{z_k\}_k \subset \mathcal{K} \setminus \{p\}$  una sucesión que converge a  $z$ . Para cada  $k \geq 1$  elegimos un vector  $\vec{u}_k$  unitario y  $\lambda_k > 0$  tales que  $z_k = p + \lambda_k \vec{u}_k$ . Además, como los vectores  $\vec{u}_k$  son unitarios, podemos suponer que la sucesión  $\{\vec{u}_k\}_k$  converge a un vector unitario  $\vec{u}$ ; como además  $z \in \mathcal{K}_\infty$ , necesariamente  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ . Observamos que

$$z_k \equiv (1 : z_k) = \left( \frac{1}{\lambda_k} : \frac{p}{\lambda_k} + \vec{u}_k \right)$$

que tiende a  $(0 : \vec{u})$  cuando  $k$  tiende a infinito. Por tanto, podemos suponer que  $\vec{u} = \vec{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$  y  $z := (0 : \vec{u})$ . Veamos ahora que la semirrecta  $p\vec{u} \subset \mathcal{K}$ . En efecto, sea  $x \in p\vec{u}$ . Como  $\vec{u}$  es unitario, entonces  $x = p + \|x - p\|\vec{u}$ . Sea  $k_0 \geq 1$  tal que para cada  $k \geq k_0$  se cumple que  $\lambda_k > \|x - p\|$ ; por tanto,

$$y_k = p + \|x - p\|\vec{u}_k \in \overline{pz_k} = \{p + t\vec{u}_k : 0 \leq t \leq \lambda_k\} \subset \mathcal{K}.$$

Como  $\mathcal{K}$  es cerrado y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = p + \|x - p\|\vec{u} = x$$

deducimos que  $x \in \mathcal{K}$ . Por consiguiente

$$\{(p_1 + tv_1, \dots, p_{n-1} + tv_{n-1}, p_n) : t \geq 0\} = p\vec{u} \subset \mathcal{K},$$

lo que contradice el hecho de que  $p_n < x_n$  para todo  $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K} \setminus \{p\}$ .

Hemos probado que  $\phi(\widehat{\mathcal{K}}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R}) = \emptyset$ ; esto significa que  $\phi(\widehat{\mathcal{K}}) \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto (como consecuencia de que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  es compacto) y en particular es acotado.

Vamos a demostrar a continuación que  $\text{Cl}(f(\mathcal{K})) = \phi(\widehat{\mathcal{K}})$ . Sea  $\{H_1, \dots, H_r\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Escribimos  $H_i := \{h_i = 0\}$  donde  $h_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  es un polinomio de grado 1 y  $h_{i,*} = \mathbf{x}_0 h_i(\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n/\mathbf{x}_0)$ ; como siempre,  $\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^r H_i^+ = \bigcap_{i=1}^r \{h_i \geq 0\}$ . Consideramos  $h'_i := (h_{i,*} \circ \phi)(1 : y_1 : \dots : y_{n-1} : y_n)$ . Como  $\mathcal{K} \cap \{x_n = 0\} = \emptyset$  y teniendo en cuenta las relaciones  $y_n := 1/\mathbf{x}_n$  e  $y_i := \mathbf{x}_i/\mathbf{x}_n$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , deducimos que

$$h'_i \left( 1 : \frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_n} : \dots : \frac{\mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{x}_n} : \frac{1}{\mathbf{x}_n} \right) = h_{i,*} \left( \frac{1}{\mathbf{x}_n} : \frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_n} : \dots : \frac{\mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{x}_n} : \frac{\mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_n} \right) = \frac{1}{\mathbf{x}_n} h_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$$

y por tanto, usando que  $\phi$  es una involución,

$$\phi(\mathcal{K}) = \bigcap_{i=1}^r \{h'_i \geq 0\} \cap \{y_n > 0\} \implies \text{Cl}(f(\mathcal{K})) = \phi(\widehat{\mathcal{K}}) = \bigcap_{i=1}^r \{h'_i \geq 0\} \cap \{y_n \geq 0\}.$$

Por último, como  $\mathcal{K}$  no es acotado, entonces  $\mathcal{K}_\infty = \widehat{\mathcal{K}} \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R}) \neq \emptyset$  y por tanto  $\mathcal{E}' := \phi(\mathcal{K}_\infty) = \phi(\widehat{\mathcal{K}}) \cap \{y_n = 0\}$  es una cara de  $\phi(\widehat{\mathcal{K}})$ .

(iii) Como

$$\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}' = \mathcal{K}' \setminus \{y_n = 0\} = \text{Cl}(f(\mathcal{K})) \setminus \{y_n = 0\} = f(\mathcal{K}),$$

entonces  $\mathcal{K} = f(f(\mathcal{K})) = f(\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}')$ , lo que prueba la primera parte. Observamos a continuación que  $f|_{\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'} : \mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{K}$  es un homeomorfismo birregular cuya inversa es la restricción  $f|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'$ . Por último, como  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_n=0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{x_n = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{y_n = 0\}$  es una involución regular,

$$\text{Int}(\mathcal{K}') = \text{Int}(f(\mathcal{K})) = f(\text{Int}(\mathcal{K})) \implies f(\text{Int}(\mathcal{K}')) = f(f(\text{Int}(\mathcal{K}))) = \text{Int}(\mathcal{K}),$$

como queríamos. □

#### 1.4.f. Estructura del cono director de un poliedro convexo no degenerado.

Veamos a continuación más detalles acerca de la estructura del cono director de un poliedro convexo no acotado y no degenerado (véase el Lema 1.4.13).

**Proposición 1.4.19** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  un poliedro convexo no degenerado y no acotado en posición FU con respecto al hiperplano  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$  y que no corta al hiperplano  $\Pi_0 := \{x_n = 0\}$ . Denotamos  $\widehat{\mathcal{K}} := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{K}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ . Consideramos la homografía involutiva*

$$\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n, (x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n) \mapsto (x_n : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_0).$$

Fijamos  $p \in \mathcal{K}$ . Entonces,

(i)  $\phi(\text{Con}_p(\mathcal{K})) \cup \phi(\mathcal{K}_\infty)$  es el cono cerrado  $\mathcal{C}_{\phi(p)}$  de base  $\phi(\mathcal{K}_\infty)$  y vértice  $\phi(p)$ ; por tanto,  $\phi(\text{Con}_p(\mathcal{K})) = \mathcal{C}_{\phi(p)} \setminus \phi(\mathcal{K}_\infty)$ . En particular,  $\text{Con}_p(\mathcal{K})$  es un poliedro convexo no acotado para cada  $p \in \mathcal{K}$ .

(ii) La proyección  $\pi_p : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$  de centro  $\{p\}$  y base  $\mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ , definida por  $\pi_p(x_0 : x) = (0 : x - px_0)$ , donde  $x := (x_1, \dots, x_n)$  cumple que

- $\pi_p(\text{Con}_p(\mathcal{K})) \setminus \{p\} = \mathcal{K}_\infty$ ,
- $\text{Con}_p(\mathcal{K}) = (\pi_p^{-1}(\mathcal{K}_\infty) \cap \{x_n - p_n > 0\}) \cup \{p\}$ ; y
- $\pi_p(\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K})) = \text{Int}_v \mathcal{K}_\infty$  y  $\pi_p((\partial \text{Con}_p(\mathcal{K})) \setminus \{p\}) = \partial \mathcal{K}_\infty$ .

*Demostración.* En primer lugar, veamos que  $\pi_p(p + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}_\infty$  para cada  $p \in \mathcal{K}$ . Sea  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  y para cada  $k \geq 1$  definimos  $z_k := p + k\vec{v} \in p\vec{v} \subset \mathcal{K}$ . El punto  $q := (0 : \vec{v}) \in \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$  es el límite en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  de la sucesión  $\{z_k\}_k$ , luego

$$\pi_p(p + \vec{v}) = (0 : \vec{v}) = q \in \widehat{\mathcal{K}} \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{K}_\infty$$

Esto prueba que  $\pi_p(\text{Con}(\mathcal{K}) \setminus \{p\}) \subset \mathcal{K}_\infty$ . Recíprocamente si  $q := (0 : \vec{v}) \in \mathcal{K}_\infty$ , el segmento  $\overline{pq} \subset \widehat{\mathcal{K}}$ , luego  $p\vec{v} \subset \mathcal{K}$  y por tanto  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  y  $q = \pi_p(p + \vec{v}) \in \pi_p(\text{Con}(\mathcal{K}) \setminus \{p\})$ .

(i) Como  $\text{Con}_p(\mathcal{K}) = p + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})} p\vec{v}$  tenemos

$$\phi(\text{Con}_p(\mathcal{K})) = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})} \phi(p\vec{v}) = \bigcup_{\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})} \overline{\phi(p)\phi(0 : \vec{v})} \setminus \{\phi(0 : \vec{v})\} = \mathcal{C}_{\phi(p)} \setminus \phi(\mathcal{K}_\infty).$$

Como  $\mathcal{C}_{\phi(p)}$  es un poliedro convexo, por ser el cono de vértice  $\phi(p)$  y base  $\phi(\mathcal{K}_\infty)$ , deducimos que  $\text{Con}_p(\mathcal{K}) = \phi(\mathcal{C}_{\phi(p)}) \setminus \mathcal{K}_\infty$  es un poliedro convexo no acotado para cada  $p \in \mathcal{K}$ .

(ii) Ya hemos probado que  $\pi_p(\text{Con}_p(\mathcal{K})) = \mathcal{K}_\infty$ . Como consecuencia de esto y de que  $\mathcal{K}$  está en posición FU con respecto a  $\{x_n = 0\}$ , deducimos que

$$\text{Con}_p(\mathcal{K}) \subset (\pi_p^{-1}(\mathcal{K}_\infty) \cap \{x_n - p_n > 0\}) \cup \{p\}$$

Para probar la otra inclusión, sea  $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\pi_p(p + \vec{v}) \in \mathcal{K}_\infty$  y  $v_n > 0$ . Por tanto, existe  $\vec{w} := (w_1, \dots, w_n) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  tal que  $\pi_p(p + \vec{w}) = \pi_p(p + \vec{v})$ , es decir, existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ . Como  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \subset \{x_n > 0\}$ , tenemos que  $w_n > 0$  y  $\lambda > 0$ . Esto implica que  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ .

Sólo nos falta por probar que  $\pi_p(\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K})) = \text{Int}_v \mathcal{K}_\infty$  y  $\pi_p((\partial \text{Con}_p(\mathcal{K})) \setminus \{p\}) = \partial \mathcal{K}_\infty$ . Como  $\pi_p(\text{Con}_p(\mathcal{K}) \setminus \{p\}) = \mathcal{K}_\infty$ , basta comprobar que  $\pi_p(\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K})) \subset \text{Int}_v \mathcal{K}_\infty$  y  $\pi_p((\partial \text{Con}_p(\mathcal{K})) \setminus \{p\}) \subset \partial \mathcal{K}_\infty$ .

En efecto, sea  $W$  el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\text{Con}_p(\mathcal{K})$ ; se cumple que

$$\pi_p(\text{Con}_p(\mathcal{K})) \subset W_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(W) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R}).$$

Como  $\pi_p$  es una aplicación abierta por ser una proyección, e  $\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K})$  coincide con el interior en  $W$  de  $\text{Con}_p(\mathcal{K})$ , deducimos que  $\pi_p(\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K}))$  es un subconjunto abierto de  $W_\infty$  contenido en  $\mathcal{K}_\infty$ ; por tanto,  $\pi_p(\text{Int}_v \text{Con}_p(\mathcal{K})) \subset \text{Int}_v \mathcal{K}_\infty$ .

Por último, sea  $z = p + \vec{v} \in \partial \text{Con}_p(\mathcal{K}) \setminus \{p\}$ ; entonces  $p\vec{v} \subset \partial \text{Con}_p(\mathcal{K})$ . Esto implica que  $\phi(p\vec{v}) = \overline{\phi(p)\phi(\pi_p(z))} \setminus \{\phi(\pi_p(z))\} \subset \partial \mathcal{C}_{\phi(p)}$ ; como  $\mathcal{C}_{\phi(p)}$  es el cono de base  $\phi(\mathcal{K}_\infty)$  y vértice  $\phi(p)$ , deducimos que  $\phi(\pi_p(z)) \in \partial \phi(\mathcal{K}_\infty) = \phi(\partial \mathcal{K}_\infty)$ , es decir,  $\pi_p(z) \in \partial \mathcal{K}_\infty$ . De este modo,  $\pi_p((\partial \text{Con}_p(\mathcal{K}) \setminus \{p\})) \subset \partial \mathcal{K}_\infty$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario I.4.20** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro no acotado y no degenerado,  $\mathfrak{V} := \{p_1, \dots, p_r\}$  la colección de sus vértices,  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  sus aristas no acotadas y  $\vec{v}_j \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{0\}$  tales que  $\mathcal{A}_j$  es paralela a  $\vec{v}_j$  para  $j = 1, \dots, s$  (véase el Lema I.4.13). Entonces,

- (i)  $\mathcal{K} = \{\sum_{i=1}^r \mu_i p_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j, \mu_i \geq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^r \mu_i = 1\}$
- (ii)  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_1, \dots, \lambda_s \geq 0\}$ .
- (iii)  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  donde  $\mathcal{K}_0 := \{\sum_{i=1}^r \mu_i p_i : \sum_{i=1}^r \mu_i = 1, \mu_i \geq 0\}$  es un poliedro acotado.

*Demostración.* En virtud del Lema I.4.17 podemos suponer que  $\mathcal{K}$  está en posición FU óptima con respecto a  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$  y que no corta al hiperplano  $\Pi_0 := \{x_n = 0\}$ . Consideramos la homografía involutiva

$$\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n, (x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n) \mapsto (x_n : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_0)$$

Denotamos  $\widehat{\mathcal{K}} := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K})$  y  $\mathcal{K}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(\mathcal{K}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ . Como consecuencia del Lema I.4.18, se cumple que  $\mathcal{K}' := \phi(\widehat{\mathcal{K}})$  es un poliedro convexo acotado no degenerado y una de sus caras es  $\mathcal{E}' := \phi(\mathcal{K}_\infty)$ . Observamos que los vértices de  $\mathcal{E}'$  son las imágenes por  $\phi$  de las intersecciones de las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  con  $\mathcal{K}_\infty$ , es decir, los puntos  $\phi(0 : \vec{v}_j)$  con  $j = 1, \dots, s$ . Por tanto los vértices de  $\mathcal{K}'$  son

$$\{\phi(1 : p_i), \phi(0 : \vec{v}_j) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\},$$

y como  $\mathcal{K}'$  es un poliedro convexo y acotado, coincide con la clausura convexa del conjunto de sus vértices. De este modo, usando que  $\phi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}' &= \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \phi(1 : p_i) + \sum_{j=1}^s \beta_j \phi(0 : \vec{v}_j) : \alpha_i, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1 \right\}, \\ \mathcal{E}' &= \left\{ \sum_{j=1}^s \beta_j \phi(0 : \vec{v}_j) : \beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^s \beta_j = 1 \right\}, \\ \phi(\mathcal{K}) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \phi(1 : p_i) + \sum_{j=1}^s \beta_j \phi(0 : \vec{v}_j) : \alpha_i, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1, \sum_{i=1}^r \alpha_i > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que, para los puntos de  $\phi(\mathcal{K})$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \alpha_i \phi(1 : p_i) + \sum_{j=1}^s \beta_j \phi(0 : \vec{v}_j) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i : 1) + \sum_{j=1}^s \beta_j (\vec{v}_j : 0) \\ &= \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^s \beta_j \vec{v}_j : \sum_{i=1}^r \alpha_i \right) \end{aligned}$$

y por tanto, si escribimos  $\mu_i := \alpha_i / (\sum_{i=1}^r \alpha_i)$  y  $\lambda_j := \beta_j / (\sum_{j=1}^s \beta_j)$  deducimos que

$$\phi(\mathcal{K}) = \left\{ \left( \sum_{i=1}^r \mu_i p_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : 1 \right) : \lambda_j, \mu_i \geq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \right\}$$

con lo que se satisface (i).

Por otra parte, como

$$\phi(\mathcal{K}_\infty) = \mathcal{E}' = \phi \left( \left\{ \left( 0 : \sum_{j=1}^s \beta_j \vec{v}_j \right) : \beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^s \beta_j = 1 \right\} \right),$$

deducimos de la Proposición I.4.19(ii) que  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{ \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_1, \dots, \lambda_s \geq 0 \}$ , lo que prueba (ii).

Finalmente, el apartado (iii) es consecuencia de los apartados (i) y (ii).  $\square$

A continuación, veamos que si el cono director de un poliedro convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  tiene dimensión  $n$ , entonces cualquier recta paralela a un vector del interior de dicho cono corta a  $\text{Int}(\mathcal{K})$  en una semirrecta.

**Lema I.4.21** Sean  $\mathcal{K} \subsetneq \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional no acotado que cumple  $\dim(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = n$  y  $\vec{v} \in \text{Int}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}))$ . Se cumple que:

- (i) Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  la intersección  $p\vec{v} \cap \mathcal{K}$  es una semirrecta  $p_1\vec{v} \subset \mathcal{K}$  y además  $p_1\vec{v} \setminus \{p_1\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .
- (ii) Si  $\mathcal{K}$  es no degenerado y está en posición FU con respecto a un hiperplano  $\vec{\Pi}$  y  $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto finito, entonces existe un hiperplano  $\Pi'$  paralelo a  $\vec{\Pi}$  tal que  $p\vec{v} \cap (\mathcal{K} \cap \Pi')$  es un punto para cada  $p \in \mathfrak{F}$ .

*Demostración.* (i) Probaremos en primer lugar que para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  la intersección  $p\vec{v} \cap \mathcal{K}$  es una semirrecta. Si  $p \in \mathcal{K}$  la intersección  $p\vec{v} \cap \mathcal{K} = p\vec{v}$  es una semirrecta y no hay nada que probar. Supongamos pues que  $p \notin \mathcal{K}$ . Si  $n = 1$  el poliedro  $\mathcal{K}$  es una semirrecta y el enunciado se cumple trivialmente. Suponemos por tanto que  $n \geq 2$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ , y argumentamos por reducción al absurdo. Como  $n \geq 2$  existe un punto  $y \in \mathcal{K}$  que no



pertenece a la recta  $\ell$  que pasa por  $p$  y  $p + \vec{v}$ . Como  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  se tiene  $y\vec{v} \subset \mathcal{K}$  y, como  $y \notin \ell$ , existe un único plano  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a los puntos  $y, p$  y  $p + \vec{v}$ .

Como  $\vec{v} \in \text{Int}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}))$  existe  $\varepsilon > 0$  de modo que el vector  $\vec{w} := \vec{v} + \varepsilon(p - y) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , y por tanto,  $y\vec{w} \subset \mathcal{K}$ . Observamos que las semirrectas  $y\vec{w}$  y  $p\vec{v}$  se cortan en el punto

$$z := p + \frac{1}{\varepsilon}\vec{v} = y + \frac{1}{\varepsilon}(\vec{v} + \varepsilon(p - y)) = y + \frac{1}{\varepsilon}\vec{w} \in \mathcal{K}.$$

Puesto que  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , la semirrecta  $z\vec{v} \subset \mathcal{K}$  y así el conjunto convexo  $p\vec{v} \cap \mathcal{K}$  contiene a la semirrecta  $z\vec{v}$ , con lo que es también una semirrecta.

Escribimos  $p\vec{v} \cap \mathcal{K} = p_1\vec{v}$  y veamos ahora que  $p_1\vec{v} \setminus \{p_1\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación minimal de  $\mathcal{K}$ . Como  $p_1\vec{v} \subset \mathcal{K}$ , para cada  $i = 1, \dots, m$  se da una de las tres situaciones siguientes: (1)  $p_1\vec{v} \subset H_i$ , (2)  $p_1\vec{v} \cap H_i = \emptyset$  o (3)  $p_1\vec{v} \cap H_i = \{p_1\}$ . Si la situación (1) no se da para ningún  $i$  tendremos que

$$p_1\vec{v} \setminus \{p_1\} \subset \mathcal{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i = \text{Int}(\mathcal{K}),$$

luego  $p_1\vec{v} \setminus \{p_1\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Por contra, si  $p_1\vec{v} \subset H_i$  para algún  $i$ , se cumple que  $p_1\vec{v} \subset \mathcal{F}_i := H_i \cap \mathcal{K}$ , y usando el Lema I.4.19 deducimos que  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_i) \subset \partial\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , contra nuestra hipótesis. Por tanto,  $p_1\vec{v} \setminus \{p_1\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .

(ii) Escribimos  $\vec{\Pi} := \{\vec{h} = 0\}$  y sea  $\Pi := \{h = 0\}$  un hiperplano paralelo a  $\vec{\Pi}$  que corta a todas las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  no acotadas de  $\mathcal{K}$  y tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están todos contenidos en  $\text{Int}(\Pi^-)$ . Escribimos  $\mathcal{A}_i := q_i\vec{v}_i$  donde  $q_i$  es un vértice de  $\mathcal{K}$ , el vector  $\vec{v}_i \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  y  $b_i := q_i + \vec{v}_i \in \Pi$  para  $i = 1, \dots, s$ . Como  $0 = h(b_i) = h(q_i) + \vec{h}(\vec{v}_i)$  y  $h(q_i) < 0$ , deducimos que  $\vec{h}(\vec{v}_i) = -h(q_i) > 0$ . Por el Lema I.4.20 existen  $\lambda_i \geq 0$  y no todos nulos tales que  $\vec{v} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \vec{v}_i$ ; por tanto,

$$\vec{h}(\vec{v}) = \vec{h}\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \vec{h}(\vec{v}_i) > 0.$$

Por el apartado anterior, para cada  $p \in \mathfrak{F}$  existe un punto  $p' \in \mathcal{K}$  tal que  $p\vec{v} \cap \mathcal{K} = p'\vec{v}$ . Elegimos  $\Pi' = \{h' = 0\}$  paralelo a  $\vec{\Pi}$  tal que  $p' \in \text{Int}(\Pi'^-)$  para cada  $p \in \mathfrak{F}$ . Veamos que  $p\vec{v} \cap (\mathcal{K} \cap \Pi') \neq \emptyset$  para cada  $p \in \mathfrak{F}$ . En efecto, como  $\vec{h}' = \vec{h}$  se cumple que  $\vec{h}'(\vec{v}) > 0$ . Fijamos  $p \in \mathfrak{F}$ ; como  $h'(p') < 0$ , deducimos que existe  $t > 0$  tal que  $h'(p' + t\vec{v}) = 0$  y por tanto  $p' + t\vec{v} \in p'\vec{v} \cap \Pi' = p\vec{v} \cap (\mathcal{K} \cap \Pi')$ ; además, como  $p'\vec{v}$  es una semirrecta y  $p' \notin \Pi'$ , la intersección  $p'\vec{v} \cap \Pi' = p\vec{v} \cap (\mathcal{K} \cap \Pi') \neq \emptyset$  se reduce a un punto.  $\square$

**I.4.g. Sobre secciones y proyecciones de un poliedro convexo.** A continuación, estudiamos algunas propiedades fundamentales de las secciones de un poliedro convexo no acotado y no degenerado.

**Lema I.4.22** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional, no degenerado y no acotado y sea  $\vec{\Pi} := \{\vec{h} = 0\}$  un hiperplano vectorial orientado. Sean  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$ , ordenadas de modo que las  $k$  primeras (donde  $0 \leq k \leq s$ ) no son paralelas a  $\vec{\Pi}$  y las  $s - k$  restantes son paralelas a  $\vec{\Pi}$ ; para cada  $i = 1, \dots, s$  escribimos  $\mathcal{A}_i := q_i \vec{v}_i$  donde  $q_i$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  y  $\vec{v}_i \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  para  $i = 1, \dots, s$ . Sea  $\Pi$  un hiperplano paralelo a  $\vec{\Pi}$  que corta a  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  y tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  y las aristas no acotadas  $\mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_s$  están contenidas en  $\text{Int}(\Pi^-)$ . Sean además  $\Pi' \subset \Pi^+$  un hiperplano paralelo a  $\vec{\Pi}$ ,  $\mathfrak{H} := \{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  y  $\mathfrak{H}_1 := \{H_{i_1}, \dots, H_{i_t}\}$  la colección de los hiperplanos de la familia  $\mathfrak{H}$  que contienen a alguna de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ . Se cumple que:

- (i) La intersección  $\mathcal{A}_i \cap \Pi'^+$  es una semirrecta cuyo borde es  $\mathcal{A}_i \cap \Pi'$  para  $i = 1, \dots, k$ .
- (ii)  $\mathcal{P}' := \mathcal{K} \cap \Pi' \neq \emptyset$  si y sólo si  $k \geq 1$ .
- (iii) Si  $\mathcal{P}' \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{P}'$  es un poliedro convexo cuyos vértices son las intersecciones de  $\Pi'$  con las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  y cuyo cono director es  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \{\sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$ .
- (iv) El cono director  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^-) = \mathcal{C} := \{\sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$  y todas las caras acotadas de  $\mathcal{K}$  y las aristas  $\mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_s$  están contenidas en  $\mathcal{K} \cap \text{Int}(\Pi'^-)$ .
- (v)  $\Pi'$  corta a todas las caras no acotadas de  $\mathcal{K}$  que contienen a alguna de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  y sólo a esas caras.
- (vi) Si  $\mathcal{P}' \neq \emptyset$ , la presentación mínima de  $\mathcal{P}'$  dentro de  $\Pi'$  es  $\{H_{i_1} \cap \Pi', \dots, H_{i_t} \cap \Pi'\}$ . En particular, las facetas de  $\mathcal{P}'$  son  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}'$  para  $\ell = 1, \dots, t$ .
- (vii) Si  $\mathcal{P}' \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{K} \cap \Pi'^+ = \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \mathcal{P}' + \{\sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$ .

*Demostración.* (i) Por hipótesis el vértice  $q_j \in \text{Int}(\Pi^-)$ , es decir,  $h(q_j) < 0$  y como  $\Pi \cap \mathcal{A}_j \neq \emptyset$ , deducimos que  $\vec{h}(\vec{v}_i) > 0$ , y por tanto  $\mathcal{A}_j \cap \Pi'^+$  es una semirrecta, cuyo borde es  $\Pi' \cap \mathcal{A}_j$ .

(ii) Si  $k \geq 1$  entonces  $\mathcal{P}' := \mathcal{K} \cap \Pi' \supset \mathcal{A}_1 \cap \Pi' \neq \emptyset$ . Recíprocamente, si  $k = 0$ , denotamos  $p_1, \dots, p_r$  los vértices de  $\mathcal{K}$ . Por el Lema I.4.20, tenemos que

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i p_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \mu_i, \lambda_j \geq 0, \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \right\}$$

y este último conjunto está contenido en  $\text{Int}(\Pi'^-)$  porque  $p_1, \dots, p_r \in \text{Int}(\Pi'^-)$  y las aristas  $\mathcal{A}_j := q_j \vec{v}_j \subset \text{Int}(\Pi^-)$  para  $j = 1, \dots, s$ . Por tanto  $\mathcal{P}' = \mathcal{K} \cap \Pi' = \emptyset$ .

(iii) y (iv) Asumimos que  $\mathcal{P}'$  es no vacío con lo que es claro que es un poliedro convexo. Sea  $p$  un vértice de  $\mathcal{P}'$ ; veamos que  $p \in \partial \mathcal{K}$ . En caso contrario,  $p \in \text{Int}(\mathcal{K})$  y existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon) \subset \mathcal{K}$  y por tanto,  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon) \cap \Pi' \subset \mathcal{P}'$ , lo que significa que  $p \in \text{Int}_v \mathcal{P}'$ , contradicción. Por consiguiente  $p \in \partial \mathcal{K}$  y elegimos la cara  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{K}$  de menor dimensión de entre las que contienen a  $p$ ; entonces,  $p \in \text{Int}_v \mathcal{E}$ . Como todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en  $\text{Int}(\Pi^-)$  y  $\Pi' \subset \Pi^+$ , deducimos que la dimensión de  $\mathcal{E}$  es  $\geq 1$ . Sean  $W$

el subespacio afín generado por  $\mathcal{E}$  y  $\varepsilon' > 0$  tal que  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon') \cap W \subset \mathcal{E}$ . Como  $\Pi'$  es un hiperplano deducimos que  $\dim W - 1 \leq \dim(W \cap \Pi') \leq \dim W$ . Como  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon') \cap W \subset \mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{B}_n(p, \varepsilon') \cap W \cap \Pi' \subset \mathcal{E} \cap \Pi' = \mathcal{E} \cap \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}',$$

y por tanto, como  $p$  es un vértice de  $\mathcal{P}'$  necesariamente  $W \cap \Pi' = \{p\}$  (pues si no tendríamos una cara de  $\mathcal{P}'$  que atraviesa el vértice), con lo que  $0 \leq \dim W - 1 \leq \dim(W \cap \Pi') = 0$ . Así,  $\mathcal{E} := \mathcal{A}_j$  es una arista (no acotada) de  $\mathcal{K}$  que corta a  $\Pi'$  en un único punto, lo que significa que  $\mathcal{A}_j$  no es paralela a  $\vec{\Pi}$ .

Recíprocamente, si  $\mathcal{A}_j$  es una arista no acotada de  $\mathcal{K}$  no paralela a  $\vec{\Pi}$  entonces la intersección  $\mathcal{A}_j \cap \Pi' = \{p\}$ . Por otra parte, sea  $H$  un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{A}_j$  (véase el Corolario 1.4.5). La intersección  $\mathcal{P}' \cap H = \mathcal{A}_j \cap \Pi = \{p\}$ , y por el Corolario 1.4.6  $p$  es un vértice de  $\mathcal{P}'$ . Esto completa la parte de la demostración relativa a determinar cuáles son los vértices de  $\mathcal{P}'$ .

Observamos ahora que si  $\mathcal{E}$  es una cara acotada de  $\mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{E}$  coincide con la clausura convexa de sus vértices, que son también vértices de  $\mathcal{K}$  los cuáles están contenidos en el semiespacio abierto  $\text{Int}(\Pi^-) \subset \text{Int}(\Pi'^-)$ ; por tanto,  $\mathcal{E} \subset \Pi'^-$ . Además, por hipótesis  $\mathcal{A}_j \subset \Pi'^-$  para  $j = k + 1, \dots, s$ .

Para terminar la prueba de los apartados (iii) y (iv) sólo nos falta por comprobar las igualdades

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^-) = \mathcal{C} := \left\{ \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

En efecto, sea  $h := \vec{h} + a \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  una ecuación de grado 1 de  $\Pi$ , tal que  $\Pi^+ := \{h \geq 0\}$ ; en particular  $\Pi' := \{h' := \vec{h} + b = 0\}$  para cierto  $b \geq 0$ . Nótese, como consecuencia de (i), que

$$\vec{h}(\vec{v}_i) \begin{cases} > 0 & \text{para } i = 1, \dots, k, \\ = 0 & \text{para } i = k + 1, \dots, s. \end{cases} \quad (\text{I.4.1})$$

Sea  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^-)$ ; entonces  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{0\}$  y existe  $p \in \mathcal{K} \cap \Pi'^-$  tal que  $p\vec{v} \subset \mathcal{K} \cap \Pi'^-$  y por tanto  $\vec{h}(\vec{v}) \leq 0$ . Por el Lema 1.4.20,  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$ . En particular, existen  $\zeta_j \geq 0$  tales que  $\vec{v} = \sum_{j=1}^s \zeta_j \vec{v}_j$  y, como  $\vec{h}(\vec{v}_j) = 0$  para  $j = k + 1, \dots, s$  puesto que  $\vec{v}_j \in \vec{\Pi}$  para dichos  $j$ ,

$$0 \geq \vec{h}(\vec{v}) = \vec{h}\left(\sum_{j=1}^s \zeta_j \vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^s \zeta_j \vec{h}(\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^k \zeta_j \vec{h}(\vec{v}_j).$$

Pero  $\vec{h}(\vec{v}_j) > 0$  para  $j = 1, \dots, k$  y cada  $\zeta_j \geq 0$ ; así que  $\mu_j = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ , lo que significa que  $\vec{v} \in \mathcal{C}$ . Por tanto,

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^-) \subset \mathcal{C} \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{\Pi} = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^-).$$

Observamos que si  $\mathcal{P}' = \emptyset$ , entonces se demuestra análogamente usando que

$$\mathcal{C} \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{\mathcal{C}}(\Pi'^{-}) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^{-}).$$

(v) Sea  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$ . Si  $\mathcal{E}$  está acotada ya hemos visto que  $\mathcal{E} \subset \text{Int}(\Pi'^{-})$  y no corta a  $\Pi'$ . Por tanto supondremos que  $\mathcal{E}$  no es acotada; como  $\mathcal{K}$  es no degenerado,  $\mathcal{E}$  es no degenerado y en particular  $\mathcal{E}$  tiene algunas aristas no acotadas, que son también aristas (no acotadas) de  $\mathcal{K}$ . Si alguna de las aristas anteriores es  $\mathcal{A}_i$  para  $i = 1, \dots, k$  entonces  $\mathcal{E} \cap \Pi' \supset \mathcal{A}_i \cap \Pi' \neq \emptyset$ . Supongamos ahora que todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{E}$  se encuentran entre las aristas  $\mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_s$  y sean  $p_1, \dots, p_r$  los vértices de  $\mathcal{K}$ ; los vértices de  $\mathcal{E}$  se encontrarán entre los anteriores pues son vértices de  $\mathcal{K}$ . Así, por el Lema I.4.20, deducimos que

$$\mathcal{E} \subset \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i p_i + \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \mu_i, \lambda_j \geq 0, \sum_{i=1}^r \mu_i = 1 \right\},$$

y este conjunto está contenido en  $\text{Int}(\Pi'^{-})$  ya que  $p_1, \dots, p_r \in \text{Int}(\Pi'^{-})$  y  $\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_s \in \vec{\Pi}$ . Por tanto  $\mathcal{E} \cap \Pi' = \emptyset$ .

(vi) En primer lugar, afirmamos que el hiperplano  $\Pi'$  corta al interior de  $\mathcal{K}$ . En caso contrario  $\emptyset \neq \mathcal{P}' \subset \partial\mathcal{K}$  y, por el Corolario I.4.4, deducimos que  $\Pi'$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$ . Por consiguiente,  $\mathcal{P}'$  es por el Lema I.4.3 una cara de  $\mathcal{K}$ ; además por el apartado (iii),  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \{ \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \}$ . Pero esto contradice el hecho de que  $\Pi'$  sólo corta a las caras de  $\mathcal{K}$  que contienen a una de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ . Por tanto,  $\Pi'$  corta al interior de  $\mathcal{K}$  y así, la dimensión de  $\mathcal{P}'$  es  $n - 1$ .

Además, por [Be2, 12.1.7] las facetas de  $\mathcal{P}'$  son aquellas intersecciones de las facetas de  $\mathcal{K}$  con  $\Pi'$  que tienen dimensión  $n - 2$ . Recordamos que las facetas  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  que no contienen a una de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  no cortan a  $\Pi'$ ; luego estas facetas no dan lugar a facetas de  $\mathcal{P}'$ . Veamos que, por el contrario, para cada  $\ell = 1, \dots, t$  la intersección de  $\Pi'$  con  $\mathcal{F}_{i_\ell} := H_{i_\ell} \cap \mathcal{K}$  tiene dimensión  $n - 2$ . Para ello, basta demostrar que  $\Pi'$  corta al interior de  $\mathcal{F}_{i_\ell}$ . En caso contrario,  $\mathcal{F}_{i_\ell} \cap \Pi' \subset \partial\mathcal{F}_{i_\ell} \subset \partial\mathcal{K}$  y como  $\Pi'$  corta y sólo corta a las caras de  $\mathcal{K}$  que contienen a una de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ , deducimos del Lema I.4.3 y del Corolario I.4.4, que  $\mathcal{F}_{i_\ell} \cap \Pi'$  es una cara de  $\mathcal{K}$  (y por tanto de  $\mathcal{F}_{i_\ell}$ ) que contiene a una de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ . Pero esto es imposible porque  $\mathcal{F}_{i_\ell} \cap \Pi' \subset \mathcal{K} \cap \Pi' = \mathcal{P}'$  y  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \{ \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \}$ . Se sigue de aquí que  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{F}_{i_\ell} \cap \Pi'$  tiene dimensión  $n - 2$  y es una faceta de  $\mathcal{P}'$  para  $\ell = 1, \dots, t$ .

Veamos que si  $j \neq \ell$  entonces las facetas  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}'$  y  $H_{i_{\ell'}} \cap \mathcal{P}'$  son diferentes. En caso de ser iguales, la intersección  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}' = H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}} \cap \mathcal{P}'$  tiene dimensión  $n - 2$  y está contenida en el subespacio afín  $H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}}$  que también tiene dimensión  $n - 2$ . De este modo,  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}' \subset \Pi'$  genera  $H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}}$  y por consiguiente  $H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}} \subset \Pi'$ . Como  $\Pi'$  sólo corta a las caras de  $\mathcal{K}$  que contienen a una de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ , deducimos que  $H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}} \cap \mathcal{K}$  contiene a una de esas aristas. Pero como

$$H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}} \cap \mathcal{K} = H_{i_\ell} \cap H_{i_{\ell'}} \cap \mathcal{P}'$$

es una faceta del poliedro convexo  $\mathcal{P}'$  y  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \{\sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$ , llegamos a contradicción. Por tanto, las facetas (diferentes) de  $\mathcal{P}'$  son  $H_{i_\ell} \cap \mathcal{P}'$  para  $\ell = 1, \dots, t$ . Además, como  $\mathcal{F}_{i_\ell}$  genera el subespacio afín  $H_{i_\ell} \cap \Pi'$ , deducimos del Lema I.4.2 que  $\{H_{i_1} \cap \Pi', \dots, H_{i_t} \cap \Pi'\}$  es la presentación minimal del poliedro convexo  $\mathcal{P}'$  dentro de  $\Pi'$ .

(vii) Si  $\mathcal{P}' \neq \emptyset$ , los vértices del poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{K} \cap \Pi'^+$  son las intersecciones de  $\Pi'$  con las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  de  $\mathcal{K}$ . Por tanto el cierre convexo del conjunto formado por dichos vértices está contenido en  $\mathcal{P}'$  y como consecuencia del Lema I.4.20 (iii),  $\mathcal{K} \cap \Pi'^+ = \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^+)$ . Además, como consecuencia de la ecuación (I.4.1) y del Lema I.4.20, deducimos que

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \left\{ \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \right\} \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^+) \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}).$$

Como además  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') = \{\sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0\}$  deducimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cap \Pi'^+ &= \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi'^+) = \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \\ &= \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P}') + \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \right\} = \mathcal{P}' + \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración.  $\square$

**Observación I.4.23** Si  $k = s$  en el Lema anterior I.4.22, entonces  $\mathcal{K}$  está en posición FU con respecto a  $\bar{\Pi}$  y se cumple que:

- (i) La intersección  $\mathcal{A}_i \cap \Pi'^+$  en una semirrecta cuyo borde es  $\mathcal{A}_i \cap \Pi'$  para  $i = 1, \dots, s$ .
- (ii) El poliedro convexo  $\mathcal{P}' := \mathcal{K} \cap \Pi' \neq \emptyset$  está acotado y sus vértices son las intersecciones de  $\Pi'$  con las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$ ,
- (iii) El poliedro  $\mathcal{K} \cap \Pi'^-$  está acotado y todas las caras acotadas de  $\mathcal{K}$  están contenidas en  $\mathcal{K} \cap \text{Int}(\Pi'^-)$ .
- (iv)  $\Pi'$  corta a todas las caras no acotadas de  $\mathcal{K}$  y sólo a esas caras.
- (v) La presentación mínima de  $\mathcal{P}'$  es  $\{H_{i_1} \cap \Pi', \dots, H_{i_r} \cap \Pi'\}$ . En particular, las facetas de  $\mathcal{P}'$  son  $H_{i_j} \cap \mathcal{P}'$  para  $j = 1, \dots, r$ ,
- (vi)  $\mathcal{K} \cap \Pi'^+ = \mathcal{P}' + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ .

Veamos a continuación una estrategia para construir hiperplanos de soporte para poliedros en posición FU. Para probarlo necesitaremos utilizar el siguiente resultado elemental recogido en [Be1, 11.2.4].

**Lema I.4.24** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto convexo con interior no vacío y sean  $p \in \text{Int}(S)$  y  $q \in \text{Cl}(S)$ . Entonces,  $\overline{pq} \setminus \{q\} \subset \text{Int}(S)$ .

**Lema I.4.25** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no degenerado y no acotado  $n$ -dimensional en posición FU con respecto al hiperplano  $\vec{\Pi}$  y sea  $\Pi$  un hiperplano paralelo a  $\vec{\Pi}$  que corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  y tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en el semiespacio abierto  $\text{Int}(\Pi^-)$ . Sean  $W$  un hiperplano de soporte en  $\Pi$  del poliedro acotado  $\mathcal{P} := \mathcal{K} \cap \Pi$ ,  $p \in W \cap \mathcal{P}$  un vértice de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{A}$  la arista no acotada de  $\mathcal{K}$  tal que  $\{p\} = \mathcal{A} \cap \Pi$  (véase la Observación I.4.23). Entonces el subespacio afín  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $W$  y  $\mathcal{A}$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$ .

*Demostración.* En primer lugar, como  $\mathcal{A} \cap W = \{p\}$ ,  $\dim \mathcal{A} = 1$  y  $\dim W = n-2$ , deducimos que  $H$  es un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ ; además,  $H \cap \Pi = W$ . Por otra parte, como  $\mathcal{A} \subset H \cap \mathcal{K}$ , para comprobar que  $H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  hay que probar que  $H \cap \mathcal{K} \subset \partial \mathcal{K}$  (véase el Corolario I.4.4). Escribimos  $\mathcal{A} = p_0 \vec{u}$  donde  $p_0$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  y  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Observamos que  $\mathcal{A}$  corta a  $\text{Int}(\Pi^+)$  porque  $p_0, p \in \mathcal{A}$ ,  $p_0 \in \text{Int}(\Pi^-)$  y  $p \in \Pi$ .

Supongamos por reducción al absurdo que existe  $q \in H \cap \text{Int}(\mathcal{K})$ . Veamos en primer lugar que  $q \in \text{Int}(\Pi^+)$ . En caso contrario  $q \in \Pi^-$  y elegimos un punto  $y \in \mathcal{A} \cap \text{Int}(\Pi^+)$  y observamos que el segmento  $\overline{qy}$  corta a  $\Pi$  en un punto  $b$  distinto de  $y$ ; obviamente, como  $q, y \in H$  también  $b \in H$ . Como  $q \in \text{Int}(\mathcal{K})$ , deducimos del Lema I.4.24, que  $b \in \overline{qy} \setminus \{y\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ ; pero entonces  $b \in \Pi \cap \text{Int}(\mathcal{K}) = \text{Int}_v \mathcal{P}$  (útese aquí la Observación I.4.23(v)) y debemos tener  $b \in H \cap \text{Int}_v \mathcal{P} = W \cap \text{Int}_v \mathcal{P}$ , lo que contradice el hecho de que  $W$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P}$  en  $\Pi$ . Por tanto,  $q \in H \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \cap \text{Int}(\Pi^+)$ .

A continuación, como  $\Pi$  no corta a las caras acotadas de  $\mathcal{K}$ , tenemos que  $p\vec{u} \subsetneq \mathcal{A}$  y sólo las caras (no acotadas) de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{A}$  cortan a la semirrecta  $p\vec{u}$ . Sea  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$  no corta a ninguna de las caras de  $\mathcal{K}$  que no contienen a  $\mathcal{A}$ . Consideramos ahora la recta  $\ell \subset H$  que contiene a  $\mathcal{A}$  y la proyección

$$\pi : H \rightarrow H \cap \Pi = W, \quad x \mapsto (x + \vec{\ell}) \cap \Pi.$$

Como  $\pi$  es continua y  $\pi(p) = p$  existe  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  tal que  $\pi(\mathcal{B}_n(p, \varepsilon_2)) \subset \mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$ . Sea  $z \in \mathcal{B}_n(p, \varepsilon_2) \cap (\overline{p\vec{u}} \setminus \{p\})$ ; de nuevo, por el Lema I.4.24,  $z \in \text{Int}(\mathcal{K})$ . Veamos que  $\pi(z) \in \text{Int}(\mathcal{K})$ .

En efecto, sea  $\ell'$  la recta paralela a  $\ell$  que pasa por  $z$ . Como  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  y  $\mathcal{K}$  es no degenerado, deducimos que existe  $a \in \partial \mathcal{K}$  tal que  $a\vec{u} = \mathcal{K} \cap \ell'$ ; de hecho, como  $z \in \text{Int}(\mathcal{K})$ , se sigue del Lema I.4.24, que  $a\vec{u} \setminus \{a\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Nótese además que  $a$  pertenece sólo a caras de  $\mathcal{K}$  que no contienen a  $\mathcal{A}$ , pues si  $a$  perteneciese a una cara  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\mathcal{A}$ , entonces de  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$  tendríamos que  $z \in a\vec{u} \subset \mathcal{C} \subset \partial \mathcal{K}$  lo que entra en contradicción con el hecho de que  $z \in \text{Int}(\mathcal{K})$ . Por tanto,  $a \notin \mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$  pues la bola  $\mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$  sólo corta a aquellas caras de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{A}$ . Ahora, como  $\pi(z) \in \mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$  y  $z \in a\vec{u}$ , deducimos que  $\pi(z) \in a\vec{u} \setminus \{a\}$  ya que en caso contrario  $a \in \pi(z)\vec{u}$ , luego  $a \in \overline{\pi(z)z} \subset \mathcal{B}_n(p, \varepsilon_1)$ , contradicción. Por tanto,  $\pi(z) \in a\vec{u} \setminus \{a\} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Ahora,  $W \cap \mathcal{P} \subset \partial \mathcal{P}$  porque  $W$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P}$  dentro de  $\Pi$  y así,

$$\pi(z) \in \pi(H) \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \subset H \cap \Pi \cap \text{Int}(\mathcal{K}) = W \cap \text{Int}_v \mathcal{P} = \emptyset,$$

y de nuevo entramos en contradicción. Por tanto,  $H$  no corta a  $\text{Int}(\mathcal{K})$  y  $H$  es un plano de soporte de  $\mathcal{K}$ .  $\square$

El siguiente resultado relativo a proyecciones de poliedros convexos será crucial para determinar cuando un poliedro convexo se puede colocar “bien” para ser “recortado” (para más detalles acerca de esto véanse las Secciones IV.1 y IV.3). En lo que sigue, consideramos la proyección sobre la última coordenada

$$\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \quad x := (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x', 0) := (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

y denotamos por  $\vec{\ell}_n$  la recta vectorial generada por el vector  $\vec{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$ .

**Proposición I.4.26 (Proyección de poliedros convexos)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y no degenerado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El conjunto  $\Lambda := \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \mathcal{J}_a := \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset, (a, 0) \notin \mathcal{J}_a\}$  es acotado.*
- (ii) *Se cumplen las siguientes condiciones:*

- $\vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}$ ,
- *Existe un hiperplano orientado  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  paralelo a  $\vec{\ell}_n$  que corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  que no son paralelas a  $\vec{\ell}_n$ , tal que los vértices de  $\mathcal{K}$  y las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  paralelas a  $\vec{\ell}_n$  están contenidos en  $\text{Int}(\Pi^-)$  y  $\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi) = (\mathcal{K} \cap \Pi) \cap \{x_n = 0\}$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $p_1, \dots, p_r$  los vértices de  $\mathcal{K}$  y por  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$ , ordenadas de modo que las  $k$  primeras (donde  $0 \leq k \leq s$ ) no son paralelas a  $\vec{\ell}_n$  y las  $s - k$  restantes son paralelas a  $\vec{\ell}_n$ ; para cada  $i = 1, \dots, s$  escribimos  $\mathcal{A}_i := q_i \vec{v}_i$  donde  $q_i$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  y  $\vec{v}_i \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$  para  $i = 1, \dots, s$ .

Comenzamos probando que (i) implica (ii). Comprobamos primero que  $\vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}$ . Escribimos  $H := \{x_n = 0\}$ ; veamos que si  $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , entonces

$$\vec{\pi}_n(\vec{v}) = \vec{w} := (v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H}.$$

En efecto, si  $\vec{v} \in \vec{\ell}_n$ , entonces  $\vec{\pi}_n(\vec{v}) = \mathbf{0} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H}$ ; supongamos pues que  $\vec{v} \notin \vec{\ell}_n$ . Sea  $p \in \mathcal{K}$ ; como  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ , se satisface la inclusión  $p\vec{v} \subset \mathcal{K}$ . Al ser  $\vec{v} \notin \vec{\ell}_n$ , se sigue que  $\vec{w} \in \vec{H} \setminus \{0\}$ . Como el conjunto  $\Lambda$  es acotado y  $\pi_n(p\vec{v}) = \pi_n(p)\vec{w}$  es una semirrecta, existe un punto  $q \in p\vec{v}$  tal que la semirrecta  $\pi_n(q\vec{v}) = \pi_n(q)\vec{w}$  no corta a  $\Lambda \times \{0\} \subset H$ . Como además para cada  $t > 0$  el punto  $q + t\vec{v} \in \mathcal{K} \cap \pi_n^{-1}(\pi_n(q) + t\vec{w})$  y  $\pi_n(q) + t\vec{w} \notin \Lambda \times \{0\}$ , deducimos que la semirrecta  $\pi_n(q)\vec{w} \subset \mathcal{K}$  y por consiguiente  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H}$ . De este modo,

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H} = \vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H}) \subset \vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H},$$

es decir,  $\vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}$ . Para demostrar la segunda parte de (ii) distinguimos dos casos:

**Caso 1.** Si  $k = 0$ , todas las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$  son paralelas a la recta  $\vec{\ell}_n$ . Entonces  $\mathcal{K}$  está en posición FU con respecto al hiperplano vectorial  $\{x_n = 0\}$  adecuadamente orientado y como consecuencia de la Observación I.4.23 la proyección  $\pi_n(\mathcal{K})$  es un poliedro acotado. De este modo, podemos elegir un hiperplano  $\Pi$  paralelo a la recta  $\vec{\ell}_n$  tal que  $\mathcal{K} \subset \text{Int}(\Pi^-)$ ; una comprobación inmediata muestra que  $\Pi$  satisface todas las condiciones deseadas.

**Caso 2.** Si  $k > 0$ , consideramos el cono  $\mathfrak{C} := \{\mathbf{0}\} + \vec{\mathfrak{C}}(\mathcal{K})$  que por el Lema I.4.19 es un poliedro convexo no degenerado cuyo único vértice es  $\mathbf{0}$ . Afirmamos que  $\pi_n(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap \{x_n = 0\}$  es también un poliedro convexo no degenerado cuyo único vértice es el origen.

En efecto, por el Lema I.4.20,  $\vec{\mathfrak{C}}(\mathcal{K}) = \{\sum_{i=1}^s \lambda_i \vec{v}_i : \lambda_i \geq 0\}$ . Por tanto, si denotamos  $\vec{w}_i = \vec{\pi}_n(\vec{v}_i)$ , tenemos que

$$\pi_n(\mathfrak{C}) = \mathbf{0} + \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i \vec{w}_i : \lambda_i \geq 0 \right\} = \mathbf{0} + \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{w}_i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

que es un poliedro convexo que a lo sumo tiene como vértice al origen. Veamos que efectivamente  $\mathbf{0}$  es un vértice de  $\pi_n(\mathfrak{C})$ . Sea  $E$  un hiperplano de soporte de  $\mathfrak{C}$  tal que  $E \cap \mathfrak{C} = \{\mathbf{0}\}$  (véase el Lema I.4.6). Como  $\pi_n(\mathfrak{C}) \neq \{\mathbf{0}\}$ , deducimos que  $E \neq \{x_n = 0\}$  aunque  $E \cap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$ . Por tanto,  $W := E \cap \{x_n = 0\}$  es un hiperplano de  $\{x_n = 0\}$  que corta a  $\pi_n(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap \{x_n = 0\}$  únicamente en el punto  $\mathbf{0}$  con lo que  $\mathbf{0}$  es un vértice de  $\mathfrak{C} \cap \{x_n = 0\} = \pi_n(\mathfrak{C})$ .

Sea ahora  $\Pi_0 := \mathbf{0} + (\vec{W} + \vec{\ell}_n)$  y sea  $h_0 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio de grado 1 tal que  $\Pi_0 = \{h_0 = 0\}$ ; observamos que  $\Pi_0$  es un hiperplano de soporte para  $\pi_n(\mathfrak{C})$  tal que  $\Pi_0 \cap \pi_n(\mathfrak{C}) = \{\mathbf{0}\}$ . Además,  $\vec{w}_i \neq \mathbf{0}$  para cada  $i = 1, \dots, k$ , porque las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  de  $\mathcal{K}$  no son paralelas a la recta  $\vec{\ell}_n$ . Como  $\Pi_0$  es un hiperplano de soporte para  $\pi_n(\mathfrak{C})$  y  $\Pi_0 \cap \pi_n(\mathfrak{C}) = \{\mathbf{0}\}$ , podemos suponer que  $\vec{h}_0(\vec{w}_i) > 0$  para  $i = 1, \dots, k$ . Escribimos  $\vec{v}_i = \vec{w}_i + t_i \vec{e}_n$  para cierto  $t_i \in \mathbb{R}$ ; como  $\vec{h}_0(\vec{e}_n) = 0$ , deducimos que

$$\vec{h}_0(\vec{v}_i) = \vec{h}_0(\vec{w}_i + t_i \vec{e}_n) = \vec{h}_0(\vec{w}_i) + t_i \vec{h}_0(\vec{e}_n) = \vec{h}_0(\vec{w}_i) > 0$$

Sea  $M > 0$  tal que la bola  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, M)$  contiene a todas las caras acotadas de  $\mathcal{K}$  y al conjunto  $\Lambda \times \{0\}$  y sea  $\Pi$  un hiperplano paralelo a  $\Pi_0$  de ecuación  $h = \vec{h}_0 + \rho$  tal que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, M) \subset \{h < 0\}$ ; en particular, los vértices  $p_i$  que son extremos de las aristas no acotadas, cumplen  $h(p_i) < 0$ . Sin embargo  $\vec{h}(\vec{v}_i) = \vec{h}_0(\vec{v}_i) > 0$ , por lo que  $\Pi$  corta a las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ . Nótese que como  $\vec{\ell}_n \subset \vec{\Pi}$ , entonces

$$\pi_n^{-1}(\Lambda \times \{0\}) \subset \pi_n^{-1}(\pi_n(\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, M))) \subset \pi_n^{-1}(\pi_n(\{h < 0\})) = \{h < 0\}$$

y por tanto,  $\pi_n(x) \in \mathcal{K} \cap \Pi \cap \{x_n = 0\}$ , para cada  $x \in \mathcal{K} \cap \{h = 0\} = \mathcal{K} \cap \Pi$  ya que  $\mathcal{K} \cap \Pi \cap \pi_n^{-1}(\Lambda \times \{0\}) = \emptyset$ . Concluimos pues que  $\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi) = (\mathcal{K} \cap \Pi) \cap \{x_n = 0\}$ .

Veamos ahora que (ii) implica (i). Distinguiamos dos casos:

**Caso 1.** Si  $\mathcal{K} \cap \Pi = \emptyset$ , o equivalentemente, todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  son paralelas a la recta  $\vec{\ell}_n$ . Entonces  $\mathcal{K}$  está en posición FU con respecto al hiperplano vectorial  $\{x_n = 0\}$



adecuadamente orientado y como consecuencia de la Observación I.4.23 la proyección  $\pi_n(\mathcal{K})$  es un poliedro acotado. Por tanto,  $\Lambda \times \{0\} \subset \pi_n(\mathcal{K})$  es un conjunto acotado.

**Caso 2.** Si  $\mathcal{K} \cap \Pi \neq \emptyset$ , por el Lema I.4.22, tenemos que  $\mathcal{K} \cap \Pi^+ = (\mathcal{K} \cap \Pi) + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ ,

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi^-) = \left\{ \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \vec{v}_j : \lambda_j \geq 0 \right\}$$

y todos los vértices de  $\mathcal{K}$  y las aristas no acotadas  $\mathcal{A}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}_s$  están contenidas en  $\mathcal{K} \cap \text{Int}(\Pi^-)$ . Observamos que los vértices de  $\mathcal{K} \cap \Pi^-$  son los vértices de  $\mathcal{K}$  y las intersecciones de las aristas  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  con el hiperplano  $\Pi$ . Denotamos  $\{y_j\} = \mathcal{A}_j \cap \Pi$  para  $j = 1, \dots, k$ . Como consecuencia del Lema I.4.20, se cumple que  $\mathcal{K} \cap \Pi^- = \mathcal{K}_0 + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi^-)$  donde  $\mathcal{K}_0$  es la clausura convexa del conjunto  $\{p_1, \dots, p_r, y_1, \dots, y_k\}$  que es en particular un poliedro acotado. Como  $\vec{\pi}_n(\vec{v}_j) = \mathbf{0}$  para  $j = k+1, \dots, s$  se cumple que

$$\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi^-) = \pi_n(\mathcal{K}_0 + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi^-)) = \pi_n(\mathcal{K}_0) + \vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap \Pi^-)) = \pi_n(\mathcal{K}_0),$$

que es un poliedro acotado. De este modo, si comprobamos que  $\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi^+) = \mathcal{K} \cap \Pi^+ \cap \{x_n = 0\}$ , tendremos que  $\Lambda \times \{0\} \subset \pi_n(\mathcal{K}_0)$ , que es un conjunto acotado. En efecto, usando nuestras hipótesis se cumple que

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi^+) &= \pi_n((\mathcal{K} \cap \Pi) + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi) + \vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \\ &= (\mathcal{K} \cap \Pi \cap \{x_n = 0\}) + (\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}) \\ &= ((\mathcal{K} \cap \Pi) + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \cap \{x_n = 0\} = \mathcal{K} \cap \Pi^+ \cap \{x_n = 0\}, \end{aligned}$$

con lo que concluye la prueba. □



## Algunos ejemplos fundamentales

En este capítulo mostramos algunos ejemplos básicos de subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$  que son imagen de algún  $\mathbb{R}^n$  por una aplicación polinómica. Estos ejemplos, que emplearemos más adelante para construir otros más sofisticados, permiten además familiarizarse con los problemas que abordamos en esta Memoria. Es interesante apreciar aquí la diferencia entre los casos real y complejo. A modo de ejemplo, observamos que el Teorema Fundamental del Álgebra afirma que toda función polinómica no constante  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es sobreyectiva; esto no es cierto para funciones polinómicas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y veremos que la situación para aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ofrece muchas más posibilidades. Estos ejemplos básicos aportan, además, ideas esenciales para afrontar el estudio de imágenes polinómicas más complicadas, tarea ésta que abordaremos en capítulos posteriores. A menudo exigiremos a estas imágenes polinómicas propiedades topológicas añadidas (ser conjuntos abiertos, cerrados, etc), lo que permite comprender mejor la relación que existe entre la topología de Zariski y la topología euclídea involucradas en el estudio de este tipo de conjuntos y aplicaciones.

### II.1. El semiplano abierto

La imagen de la aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$  es un semiplano cerrado. Lleva algo más de trabajo construir una aplicación polinómica cuya imagen sea un semiplano abierto del plano (véase [FG1]). Por supuesto, basta comprobarlo para el semiplano abierto  $\{y > 0\}$ .

**Lema II.1.1** *La imagen de la aplicación polinómica*

$$f := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y(xy - 1), (xy - 1)^2 + x^2)$$

es el semiplano abierto  $\mathcal{H} := \{y > 0\}$ .

*Demostración.* En efecto, como el polinomio  $f_2(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2$  es estrictamente positivo en  $\mathbb{R}^2$ , se sigue que  $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{H}$ . Así, basta comprobar que cada  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  con  $b > 0$  pertenece a la imagen de  $f$  o, lo que es lo mismo, que para cada  $a \in \mathbb{R}$  y  $b > 0$  las curvas

$$\Delta_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(xy - 1) - a = 0\} \text{ y } \Gamma_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy - 1)^2 + x^2 - b = 0\}$$

tienen intersección no vacía. Observamos que  $(x, y) \in (\Delta_a \cap \Gamma_b) \setminus \{y = 0\}$  si y sólo si  $y$  es una raíz no nula del polinomio

$$p(y) := y^4(b - f_2((a + y)/y^2, y)) = by^4 - (1 + a^2)y^2 - 2ay - a^2 \in \mathbb{R}[y].$$

Además  $p(0) < 0$  para  $a \neq 0$ , mientras que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} p(y) = +\infty$ . Así, el polinomio  $p(y)$  tiene una raíz real positiva  $y_{(a,b)}$  y por tanto  $f((a + y_{(a,b)})/y_{(a,b)}^2, y_{(a,b)}) = (a, b)$ .

Por otra parte, si  $a = 0$  y  $b > 0$ , es inmediato que  $f(\sqrt{b}, 1/\sqrt{b}) = (0, b)$ , y la demostración está completa.  $\square$

## II.2. Complementario de un conjunto semialgebraico básico

Dados polinomios  $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  consideremos el conjunto semialgebraico básico  $\mathcal{S} := \{g_1 * 0, \dots, g_m * 0\} \subset \mathbb{R}^n$ , donde cada  $*$  representa uno de los símbolos  $>$  o  $\geq$ . En esta sección demostramos el siguiente resultado.

**Teorema II.2.1** *Sea  $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}^n$  un conjunto semialgebraico básico propio. Entonces, el conjunto  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathcal{S} \times \{0\})$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Este resultado generaliza la Proposición I.3.10 del Capítulo I; antes de probarlo presentamos el siguiente lema previo. Como es habitual  $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$  denota al anillo de polinomios  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Lema II.2.2** *Sean  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  y  $g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ . Entonces, existen aplicaciones polinómicas  $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  y  $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tales que*

$$\begin{aligned} f_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \{g \geq 0\}) \times \{0\}) \quad y \\ f_2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \{g > 0\}) \times \{0\}). \end{aligned}$$

*Demostración.* Denotamos  $x := (x_1, \dots, x_n)$  y consideremos las aplicaciones polinómicas:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x, x_{n+1}) \mapsto (x, x_{n+1}(1 + x_{n+1}^2 g(x))) \\ f_2 : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (x, x_{n+1}) \mapsto (x, x_{n+1}(1 + x_{n+1}^2 g(x))(g^2(x) + (x_{n+1} - 1)^2)). \end{aligned}$$

Veamos que dichas aplicaciones cumplen las condiciones del enunciado. En efecto, denotamos  $\ell_a := \{x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  para cada  $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , y observamos que  $f_1(\ell_a) = f_2(\ell_a) = \ell_a$ . Par cada  $a \in \mathbb{R}^n$ , consideramos los polinomios en una variable

$$\begin{cases} \alpha_a(\mathbf{t}) := \mathbf{t}(1 + \mathbf{t}^2 g(a)) & y \\ \beta_a(\mathbf{t}) := \mathbf{t}(1 + \mathbf{t}^2 g(a))(g^2(a) + (\mathbf{t} - 1)^2) \end{cases}$$

que resultan de hacer  $x = a$  y  $x_{n+1} = t$  en la última coordenada de  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente. En primer lugar,  $\alpha_a$  tiene grado impar y

$$f_1(\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) = \{a\} \times \alpha_a(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \ell_a \setminus \{0\} & \text{si } g(a) \geq 0, \\ \ell_a & \text{si } g(a) < 0. \end{cases}$$

Esto es debido a que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \alpha_a(t) = \pm\infty \ \& \ \alpha_a^{-1}(0) = \{0\} & \text{si } g(a) \geq 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \alpha_a(t) = \mp\infty \ \& \ \alpha_a^{-1}(0) = \{0, \pm\sqrt{-1/g(a)}\} & \text{si } g(a) < 0. \end{cases}$$

Como  $\mathbb{R}^{n+1} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n} \ell_a$  se tiene

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\Lambda \times \{0\}\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \ell_a \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g \geq 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g < 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\})$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) &= \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \ell_a \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g \geq 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g < 0\}} \ell_a \\ &= ((\mathbb{R}^n \setminus (\Lambda \cap \{g \geq 0\})) \times \mathbb{R}) \cup ((\Lambda \cap \{g \geq 0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \\ &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \{g \geq 0\}) \times \{0\}). \end{aligned}$$

El argumento para la aplicación  $f_2$  es similar. El polinomio  $\beta_a$  tiene grado impar y

$$f_2(\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) = (a, \beta_a(\mathbb{R} \setminus \{0\})) = \begin{cases} \ell_a \setminus \{0\} & \text{si } g(a) > 0, \\ \ell_a & \text{si } g(a) = 0, \\ \ell_a & \text{si } g(a) < 0. \end{cases}$$

Esto es debido a que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_a(t) = \pm\infty \ \& \ \beta_a^{-1}(0) = \{0\} & \text{si } g(a) > 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_a(t) = \pm\infty \ \& \ \beta_a^{-1}(0) = \{0, 1\} & \text{si } g(a) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \beta_a(t) = \mp\infty \ \& \ \beta_a^{-1}(0) = \{0, \pm\sqrt{-1/g(a)}\} & \text{si } g(a) < 0. \end{cases}$$

Ahora, como

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\Lambda \times \{0\}\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \ell_a \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g \leq 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g > 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\})$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f_2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) &= \bigcup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda} \ell_a \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g \leq 0\}} \ell_a \cup \bigcup_{a \in \Lambda \cap \{g > 0\}} (\ell_a \setminus \{(a, 0)\}) \\ &= ((\mathbb{R}^n \setminus (\Lambda \cap \{g \leq 0\})) \times \mathbb{R}) \cup ((\Lambda \cap \{g > 0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \\ &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \{g > 0\}) \times \{0\}). \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración.  $\square$

*Demostración del Teorema II.2.1.* Sea  $\mathcal{S} := \{g_1 * 0, \dots, g_m * 0\}$  un subconjunto semialgebraico básico de  $\mathbb{R}^n$ , donde cada  $*$   $\in \{>, \geq\}$ . Hacemos la demostración por inducción sobre el número  $m$  de desigualdades empleadas en la descripción del conjunto semialgebraico básico  $\mathcal{S}$ . Como  $\mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}^n$  podemos suponer que  $\mathbf{0} \notin \mathcal{S}$ . Para el caso  $m = 1$  se tiene  $\mathcal{S} := \{g_1 * 0\}$  y consideramos la aplicación

$$f_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1 x_{n+1}, \dots, x_n x_{n+1}, x_{n+1}),$$

cuya imagen es  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})$ , donde  $\Lambda = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Aplicamos el Lema II.2.2 con  $g := g_1$  y eligiendo

$$f := \begin{cases} f_1 & \text{si } \{g * 0\} = \{g \geq 0\}, \\ f_2 & \text{si } \{g * 0\} = \{g > 0\}. \end{cases}$$

Como  $\mathbf{0} \notin \mathcal{S}$  se tiene  $\Lambda \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}$ , y por tanto la composición  $f \circ h$  satisface la igualdad

$$(f \circ f_0)(\mathbb{R}^{n+1}) = f(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \mathcal{S}) \times \{0\}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathcal{S} \times \{0\}),$$

como queríamos demostrar.

Suponemos ahora que el teorema es válido para todo semialgebraico básico de  $\mathbb{R}^n$  descrito con  $m - 1 \geq 1$  desigualdades y distinto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\mathcal{S} := \{g_1 * 0, \dots, g_m * 0\}$  un subconjunto semialgebraico básico propio de  $\mathbb{R}^n$ . Elegimos  $\Lambda := \{g_1 * 0, \dots, g_{m-1} * 0\}$  y existe, por hipótesis de inducción, una aplicación polinómica  $f_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $f_0(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})$ . Aplicando el Lema II.2.2 con  $g := g_m$ , y eligiendo

$$f := \begin{cases} f_1 & \text{si } \{g * 0\} = \{g \geq 0\}, \\ f_2 & \text{si } \{g * 0\} = \{g > 0\}, \end{cases}$$

existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que cumple

$$f(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus ((\Lambda \cap \{g_m * 0\}) \times \{0\}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathcal{S} \times \{0\}).$$

Finalmente, al componer obtenemos

$$(f \circ f_0)(\mathbb{R}^{n+1}) = f(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Lambda \times \{0\})) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathcal{S} \times \{0\}),$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

En [FG1] se demuestra que si  $n \geq 2$  el complementario de un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . Presentamos a continuación una prueba alternativa de este resultado que obtenemos como corolario del Teorema II.2.1.

**Corolario II.2.3** *Sea  $n \geq 2$ . Para cada conjunto finito  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto semialgebraico  $\mathbb{R}^n \setminus X$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $X = \{p_1, \dots, p_m\}$  de modo que cada punto  $p_k := (a_{1k}, \dots, a_{nk})$  y  $a_{1j} \neq a_{1\ell}$  si  $j \neq \ell$ . Existe por tanto un polinomio  $g \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  tal que  $g(a_{1j}) = a_{nj}$  para todo  $1 \leq j \leq m$ . En consecuencia, denotando  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , la aplicación polinómica

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x', x_n) \mapsto (x', x_n + g(x_1))$$

es biyectiva y  $h(p'_j) = p_j$ , donde  $p'_j = (a_{1j}, \dots, a_{(n-1)j}, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

Denotamos  $q_j := (a_{1j}, \dots, a_{(n-1)j}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  para todo  $1 \leq j \leq m$ , e  $Y = \{q_1, \dots, q_m\}$ . El conjunto finito  $Y$  es algebraico, luego es un semialgebraico básico cerrado. Se deduce del Teorema II.2.1 que existe una aplicación polinómica  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus Z$ , donde  $Z = Y \times \{0\}$  cumple que  $h(Z) = X$ . Como  $h$  es biyectiva, la aplicación polinómica  $f := h \circ g$  cumple la igualdad

$$f(\mathbb{R}^n) = h(g(\mathbb{R}^n)) = h(\mathbb{R}^n \setminus Z) = h(\mathbb{R}^n) \setminus h(Z) = \mathbb{R}^n \setminus X.$$

y con esto concluye la prueba. □

Como consecuencia del Teorema II.2.1 demostramos que para cada entero  $r \geq 1$  existe una imagen polinómica  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera exterior tiene  $r$  componentes conexas acotadas y de dimensión 1. Este resultado fue publicado originalmente en [FG2].

**Corolario II.2.4** *Sea  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  una unión finita de intervalos cerrados disjuntos propios (acotados o no acotados) de  $\mathbb{R}$ . Entonces  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{J} \times \{0\})$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* En virtud del Teorema II.2.1 es suficiente probar que  $\mathcal{J} \subsetneq \mathbb{R}$  es un subconjunto semialgebraico básico cerrado. Escribimos  $\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^r [a_i, b_i]$ , donde cada  $a_i < b_i < a_{i+1}$ , y tal vez  $a_1 = -\infty$  o  $b_r = \infty$ . Consideramos para cada  $1 \leq i \leq r$  el polinomio

$$h_i(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{t} - b_i, & \text{si } i = 1 \text{ y } a_i = -\infty \\ a_i - \mathbf{t}, & \text{si } i = r \text{ y } b_i = \infty \\ (\mathbf{t} - a_i)(\mathbf{t} - b_i), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que  $h_i^{-1}(]-\infty, 0]) = ]a_i, b_i[$ . En consecuencia, como los intervalos  $[a_i, b_i]$  son disjuntos, el polinomio

$$g(\mathbf{t}) = - \prod_{i=1}^r h_i(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$$

cumple la igualdad  $\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}$ , luego  $\mathcal{J} \subsetneq \mathbb{R}$  es un subconjunto semialgebraico básico cerrado de  $\mathbb{R}$ . □

**Observaciones II.2.5** (i) El resultado anterior II.2.4 no contradice el Corolario I.3.5, (como no podía ser de otra forma), puesto que todas las componentes conexas acotadas de  $\delta\mathcal{S}$  están contenidas en la recta  $\{y = 0\}$ , que interseca a  $\mathcal{S}$  en un conjunto no acotado.

(ii) Si analizamos cuidadosamente la aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se obtiene en la prueba del Teorema II.2.1 para  $\mathcal{A} = \mathcal{J}$  se comprueba que sus fibras sobre los puntos de la recta  $\mathcal{S} \cap \{y = 0\}$  son finitas. Esto permite, empleando el Corolario II.2.3, degenerar algunos de los intervalos  $[a_i, b_i] \subset \mathcal{J}$  en puntos.

### II.3. El cuadrante abierto en $\mathbb{R}^2$

Esta sección está dedicada a estudiar uno de los ejemplos fundamentales para construir imágenes polinómicas más generales. Es por esto que dedicamos especial atención al mismo, presentando dos nuevas demostraciones que se añaden a la demostración original obtenida por Fernando–Gamboa en [FG1].

**Teorema II.3.1** *Existe una aplicación polinómica  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen es el cuadrante abierto  $\mathcal{Q} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ .*

**II.3.a. Primera prueba.** Recordamos en primer lugar la demostración original de Fernando–Gamboa. Consideramos la aplicación polinómica  $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuyas coordenadas vienen dadas por los polinomios

$$f_1 = (1 - x^3y + y - xy^2)^2 + (x^2y)^2 \quad y \quad f_2 = (1 - xy + x - x^4y)^2 + (x^2y)^2$$

El paso clave en la prueba del Teorema II.3.1 se recoge en la siguiente proposición.

**Proposición II.3.2** *La aplicación polinómica  $f$  definida previamente cumple la igualdad*

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q} \cup \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

*Además,  $f^{-1}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \{(0, -1), (-1, 0)\}$ .*

De este resultado, junto con el Corolario II.2.3, se deduce que el conjunto  $\mathcal{Q}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .

*Demostración de la Proposición II.3.2.* Primero demostramos la inclusión

$$f(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{Q} \cup \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Como  $f_1$  y  $f_2$  son sumas de cuadrados tenemos que  $f(\mathbb{R}^2) \subset \{x \geq 0, y \geq 0\}$ . Es más, si  $f(x_0, y_0) \in \{x = 0\}$  se satisfacen las igualdades

$$1 - x_0^3y_0 + y_0 - x_0y_0^2 = 0 \quad y \quad x_0^2y_0 = 0,$$



y esto implica que  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1$ . Pero entonces  $f(x_0, y_0) = f(0, -1) = (1, 0)$ .

Por otro lado, si  $f(x_0, y_0) \in \{y = 0\}$  debe cumplirse que

$$1 - x_0 y_0 + x_0 - x_0^4 y_0 = 0 \quad \text{y} \quad x_0^2 y_0 = 0,$$

lo que implica  $y_0 = 0$ ,  $x_0 = -1$ . Por tanto  $f(x_0, y_0) = f(0, -1) = (0, 1)$ , y concluimos que  $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{Q} \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Obsérvese que también hemos comprobado la igualdad

$$f^{-1}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \{(0, -1), (-1, 0)\}.$$

Ahora demostramos la otra inclusión,  $\mathcal{Q} \cup \{(0, 1), (1, 0)\} \subset f(\mathbb{R}^2)$ . Acabamos de ver que  $\{(0, 1), (1, 0)\} \subset f(\mathbb{R}^2)$ , luego es suficiente probar que  $\mathcal{Q} \subset f(\mathbb{R}^2)$ . Comprobamos en primer lugar que los semiejes positivos, que limitan  $\mathcal{Q}$ , pertenecen a la clausura de  $\text{Im}(f)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

En efecto, dados  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , consideramos las parametrizaciones

$$\alpha_\lambda : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \left(s, \frac{1+\lambda s}{s}\right) \quad \text{y} \quad \beta_\mu : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \left(\frac{1+\mu s}{s}, s^3\right).$$

Una comprobación directa nos proporciona

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha_\lambda)(s) = ((1 - \lambda)^2, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} (f \circ \beta_\mu)(s) = (0, (1 - 3\mu)^2),$$

de donde se deduce que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\} \subset \text{Cl}(\text{Im}(f)).$$

Esta inclusión hace plausible que además se satisfaga  $\mathcal{Q} \subset \text{Im}(f)$ . Procedemos a comprobarlo a continuación. Fijamos en lo que sigue un número real  $v > 0$  y observamos que es suficiente demostrar que la imagen de la restricción  $f_1|_{\{f_2=v\}} : \{f_2=v\} \rightarrow \mathbb{R}$  contiene al intervalo abierto  $]0, +\infty[$ . Resolviendo la ecuación  $f_2 - v = 0$  de grado 2 en  $y$ , obtenemos las raíces

$$y^+(x, v) := \frac{1 + x + x^3 + x^4 + \sqrt{\Delta(x, v)}}{x(x^2 + (x^3 + 1)^2)} \quad \text{e} \quad y^-(x, v) := \frac{1 + x + x^3 + x^4 - \sqrt{\Delta(x, v)}}{x(x^2 + (x^3 + 1)^2)},$$

donde  $\Delta(x, v) := v(x^2 + (x^3 + 1)^2) - x^2(x + 1)^2$ . Consideramos el conjunto

$$D_v := \{x \in \mathbb{R} : \Delta(x, v) \geq 0, x \neq 0\}$$

y las funciones

$$\gamma_v^+ : D_v \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x, y^+(x, v)) \quad \text{y} \quad \gamma_v^- : D_v \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x, y^-(x, v)).$$

Ahora todo se reduce a comprobar que la unión de las imágenes de  $\gamma_v^+$  y  $\gamma_v^-$  contiene al intervalo  $]0, +\infty[$ . Realizando algunos cálculos con MAPLE se prueba que existen polinomios  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}[x, v]$  y  $C(x) = x^2(x^2 + (x^3 + 1)^2)^4 \in \mathbb{R}[x]$  tales que:

$$\gamma_v^+(x) = \frac{A_1(x, v) + B_1(x, v)\sqrt{\Delta(x, v)}}{C(x)}; \quad \gamma_v^-(x) = \frac{A_2(x, v) + B_2(x, v)\sqrt{\Delta(x, v)}}{C(x)}.$$

$$\deg_x(A_1) = \deg_x(A_2) = 24; \quad \deg_x(B_1) = \deg_x(B_2) = 21 \quad \text{y} \quad \deg_x(C) = 26.$$

Ahora vamos a estudiar las gráficas de las funciones  $\gamma_v^+$  y  $\gamma_v^-$ . En primer lugar, como el polinomio

$$\Delta_v(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}, v) = v((\mathbf{x}^3 + 1)^2 + \mathbf{x}^2) - \mathbf{x}^2(\mathbf{x} + 1)^2$$

tiene grado par y su coeficiente director como polinomio en la variable  $\mathbf{x}$  es positivo, se deduce que  $\Delta_v(x) > 0$  para  $|x|$  suficientemente grande. Así, a partir de las igualdades anteriores podemos calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma_v^+(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \gamma_v^-(x) = 0. \quad (\text{II.3.1})$$

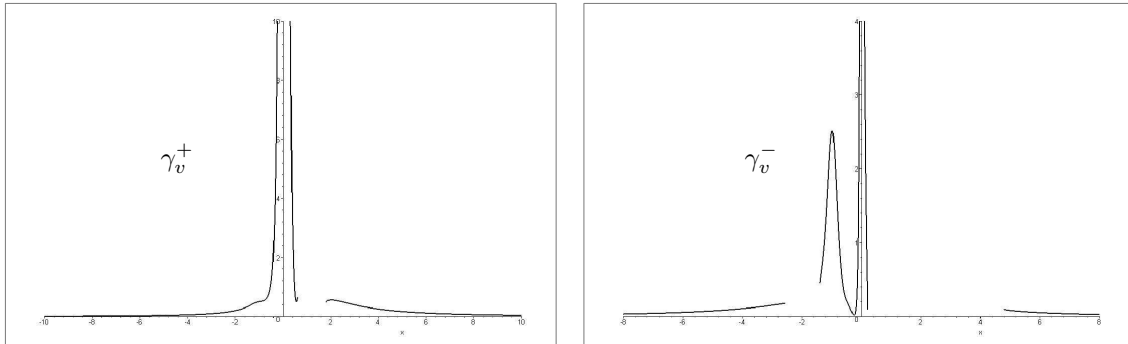
En segundo lugar vamos a analizar el comportamiento de las funciones  $\gamma_v^+$  y  $\gamma_v^-$  cerca del origen. Como  $\Delta(0, v) = v > 0$ , tenemos que  $0 \in \text{Cl}(D_v)$ . Además, del cálculo explícito de cada  $A_i, B_i$  se sigue que

- $A_1(0, v) + B_1(0, v)\sqrt{\Delta(0, v)} = v(1 + \sqrt{v})^2 > 0$ ,
- $A_2(0, v) + B_2(0, v)\sqrt{\Delta(0, v)} = v(1 - \sqrt{v})^2 \geq 0$ , y es 0 si y sólo si  $v = 1$ .

Por tanto concluimos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \gamma_v^+(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \gamma_v^-(x) = \begin{cases} +\infty & \text{para } v \neq 1 \\ 4 & \text{para } v = 1 \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

El cálculo del último límite, cuyo valor preciso es irrelevante, requiere las fórmulas explícitas de los polinomios  $A_i$ 's,  $B_i$ 's.



Observamos que de las igualdades (II.3.1) y (II.3.2) se sigue que si  $D_v$  contiene uno de los intervalos  $]-\infty, 0[$  o  $]0, +\infty[$ , entonces  $]0, +\infty[ \subset \text{Im}(\gamma_v^+)$ , y hemos terminado. Esto nos induce a estimar los valores de  $v$  que poseen esta propiedad. Despejando  $v$  en la ecuación  $\Delta(x, v) = 0$  obtenemos

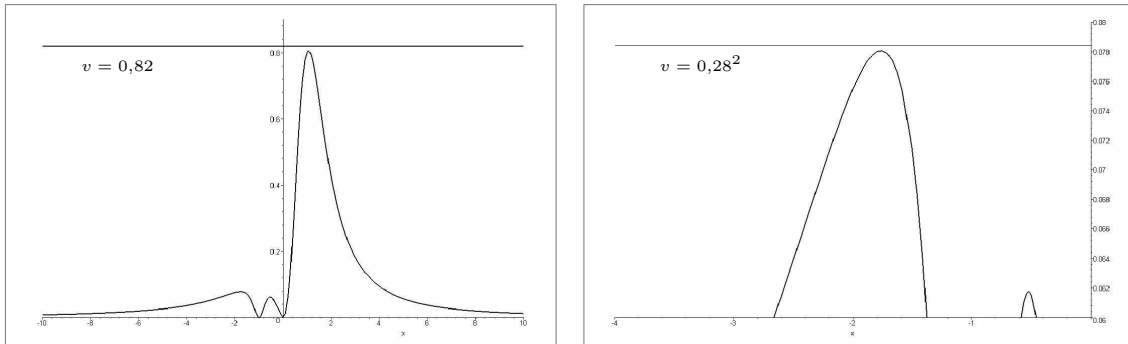
$$v(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{x^2 + (x^3 + 1)^2},$$

cuya gráfica aparece dibujada a continuación. Observamos que  $0 \leq v(x) < 0.82$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y denotando  $\varepsilon = 0.28$ , se tiene  $0 \leq v(x) \leq \varepsilon^2$  para todo  $x \in ]-\infty, 0[$ . La

comprobación algebraica de estos hechos puede hacerse aplicando el Teorema de Sturm respectivamente a los polinomios  $\Delta(0.82, x)$  y  $\Delta(0.28^2, x)$ . Por consiguiente, si  $v \geq \varepsilon^2$  se tiene  $]-\infty, 0[ \subset D_v$ , como queremos. De aquí que, a partir de ahora, suponemos  $0 < v < \varepsilon^2$ . En este caso probamos que existen números reales negativos  $N_v < \delta_v$  tales que

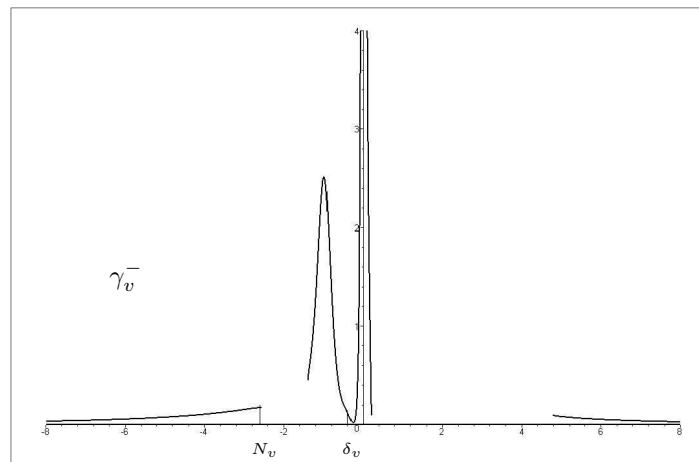
$$]-\infty, N_v] \cup [\delta_v, +\infty[ \subset D_v \quad \text{y} \quad \gamma_v^-(N_v) > \gamma_v^-(\delta_v). \tag{II.3.3}$$

Esto basta, puesto que entonces  $]0, +\infty[ \subset \gamma_v^-(D_v)$  y el resultado queda probado.



Detalle de la gráfica en el intervalo  $]-4, 0[$

La siguiente imagen representa una *prueba experimental* de la existencia de  $N_v$  y  $\delta_v$ :



Para ser rigurosos, la existencia de  $N_v, \delta_v$  se deduce a partir de una estimación del conjunto  $D_v$ . Comenzamos calculando las raíces de  $\Delta_v(\mathbf{x})$  en el cuerpo de las series de Puiseux  $\mathbb{C}(\{\mathbf{v}^*\})$ : estas raíces son series de potencias en  $\mathbb{C}(\{\mathbf{w}\})$  donde  $\mathbf{w} = \mathbf{v}^{1/2}$ , y entre ellas elegimos

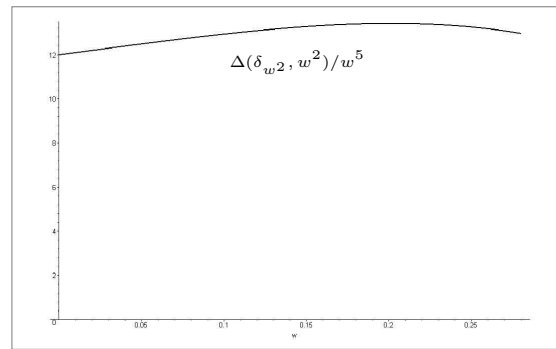
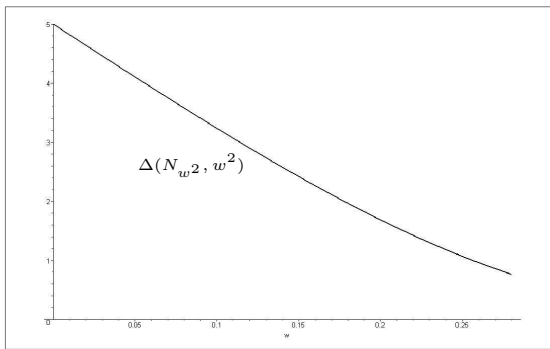
$$\eta_v = -\frac{1}{\mathbf{w}} + 1 + \mathbf{w} + \mathbf{w}^2 + \frac{5}{2}\mathbf{w}^3 + \dots \quad \text{y} \quad \xi_v = -\mathbf{w} - \mathbf{w}^2 - \frac{5}{2}\mathbf{w}^3 - 6\mathbf{w}^4 + \dots$$

que son, respectivamente, la raíz más negativa y la menos negativa de  $\Delta_v$  en  $\mathbb{R}(\{v^*\})$  con respecto al único orden de  $\mathbb{R}(\{v^*\})$  en el que  $v$  es positivo. A la vista de esto tomamos

$$N_v = -\frac{1}{w} + 1 + w + w^2 = \eta_v - (5w^3/2 + \dots) < \eta_v$$

$$\delta_v = -w - w^2 - \frac{5}{2}w^3 = \xi_v - (-6w^4 + \dots) > \xi_v.$$

No es difícil comprobar que  $-\infty < N_v < \delta_v < 0$  para todo  $0 < v < \varepsilon^2$ . Para demostrar (II.3.3) procedemos en varios pasos. Primero comprobamos que  $N_v, \delta_v \in D_v$ ; para ver esto, verificamos que los polinomios  $\Delta(N_{w^2}, w^2)$  y  $\Delta(\delta_{w^2}, w^2)$  son positivos en el intervalo  $]0, \varepsilon[$ , empleando, por ejemplo, el Teorema de Sturm (véase [BCR, 1.2.10]).



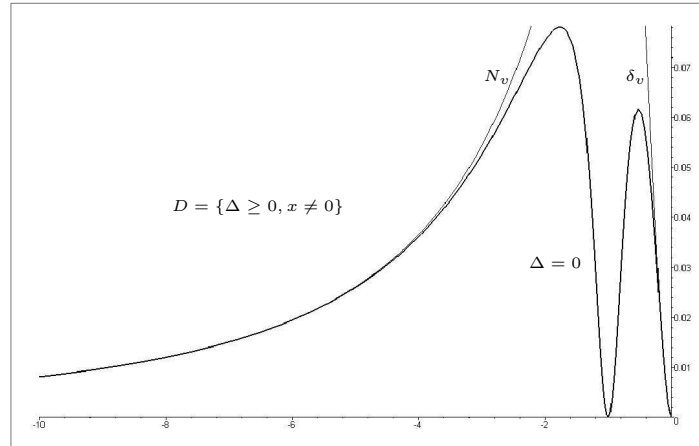
A continuación probamos que  $] -\infty, N_v] \cup [\delta_v, +\infty[ \subset D_v$ . Con este objetivo, consideramos el conjunto semialgebraico  $D = \bigcup_{v>0} D_v = \{\Delta(x, v) \geq 0, x \neq 0\}$ , cuya frontera es la unión del eje  $x = 0$  y la curva de ecuación

$$v = \frac{x^2(x+1)^2}{x^2 + (x^3+1)^2},$$

que es una gráfica sobre el eje  $v = 0$ . Por tanto, como las curvas

$$\{(\delta_v, v) : 0 < v < \varepsilon^2\} \subset D \quad \text{y} \quad \{(N_v, v) : 0 < v < \varepsilon^2\} \subset D$$

son gráficas sobre el eje  $x = 0$ , y para  $v$  suficientemente pequeño  $\xi_v < \delta_v$  y  $N_v < \eta_v$ , concluimos que el interior de  $D_v$  contiene los intervalos  $[\delta_v, 0[$  y  $] -\infty, N_v]$  para  $0 < v < \varepsilon^2$ .



Finalmente, sólo debemos comprobar que  $\gamma_v^-(N_v) > \gamma_v^-(\delta_v)$ . Recordamos que

$$\gamma_v^- = \frac{A_2 + B_2\sqrt{\Delta}}{C}, \quad \text{donde } A_2, B_2, \Delta \in \mathbb{R}[x, v] \text{ y } C \in \mathbb{R}[x].$$

Consideramos los polinomios

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{w}) &= A_2(N_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2)\mathbf{w}^{24} & f_2(\mathbf{w}) &= A_2(\delta_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2) \\ g_1(\mathbf{w}) &= B_2(N_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2)\mathbf{w}^{21} & g_2(\mathbf{w}) &= B_2(\delta_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2) \\ q_1(\mathbf{w}) &= \Delta(N_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2) & q_2(\mathbf{w}) &= \Delta(\delta_{\mathbf{w}^2}, \mathbf{w}^2) \\ h_1(\mathbf{w}) &= C(N_{\mathbf{w}^2})\mathbf{w}^{26} & h_2(\mathbf{w}) &= C(\delta_{\mathbf{w}^2}). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que probar que para todo  $w \in ]0, \varepsilon[$  la función

$$\frac{\frac{f_1}{w^{24}} + \frac{g_1}{w^{21}}\sqrt{q_1}}{\frac{h_1}{w^{26}}} - \frac{f_2 + g_2\sqrt{q_2}}{h_2} > 0,$$

o, de forma equivalente, que

$$\frac{w^2 h_2 f_1 - f_2 h_1}{h_1 h_2} + \frac{w^5 g_1 \sqrt{q_1}}{h_1} - \frac{g_2 \sqrt{q_2}}{h_2} > 0.$$

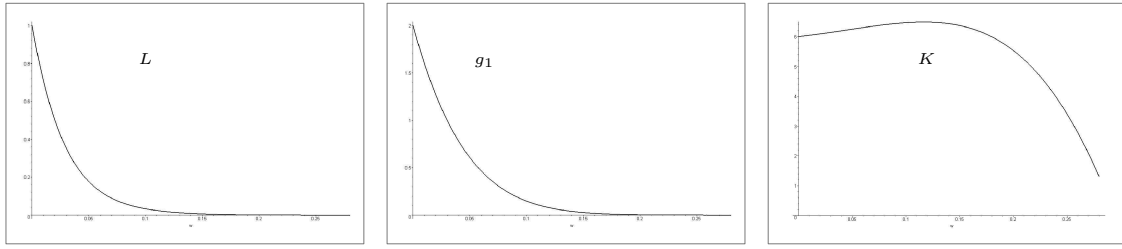
Para esto, es suficiente comprobar que las funciones

$$\frac{w^2 h_2 f_1 - f_2 h_1}{h_1 h_2}, \quad \frac{w^5 g_1 \sqrt{q_1}}{h_1} \text{ y } \frac{-g_2 \sqrt{q_2}}{h_2}$$

son positivas en el intervalo  $]0, \varepsilon[$ , para lo que basta verificar que los polinomios

$$L = \frac{w^2 h_2 f_1 - f_2 h_1}{w^4}, \quad g_1 \text{ y } K = \frac{-g_2}{w^3}$$

son positivos sobre dicho intervalo.



Empleando MAPLE podemos asegurar este hecho usando el Teorema de Sturm. Sólo la prueba de la positividad de  $L$  en el intervalo abierto  $]0, \varepsilon[$  necesita más cuidado.

Para simplificarla expresamos  $L$  en la forma  $L = L_1 + L_2 w^{55} + L_3 w^{101}$ , donde  $L_1, L_2, L_3$  son polinomios en  $\mathbb{R}[w]$  de grados respectivos 54, 45, 49; ahora, aplicando el Teorema de Sturm a  $L_1, L_2, L_3$  observamos que estos tres polinomios son positivos en el intervalo  $]0, \varepsilon[$ , con lo que concluye la demostración.  $\square$

**Observación II.3.3** Antes de presentar dos demostraciones más del Teorema II.3.2, debemos mencionar un ejemplo llamativo, por su sencillez: la unión del cuadrante abierto con el origen de coordenadas es la imagen de la aplicación

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^4 y^2, x^2 y^4).$$

**II.3.b. Segunda prueba.** Mostramos a continuación una demostración más reciente del Teorema II.3.2, esto es, que el cuadrante abierto  $\mathcal{Q} := \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ . Esta prueba no requiere comprobaciones de cálculo apoyadas en software matemático, por lo que consideramos que tiene carácter más elemental y los cálculos involucrados pueden realizarse “a mano”. Como contrapartida debemos mencionar que el grado de los polinomios empleados para presentar  $\mathcal{Q}$  como imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$  es mayor que el de los utilizados en la demostración previa.

**Lema II.3.4** La imagen  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  del conjunto semialgebraico  $\mathcal{Q}' := \{x \geq 0, y > 0\}$  bajo la aplicación polinómica

$$f^{(1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (x + y(xy - 1)^2, y)$$

satisface las siguientes propiedades:

$$\mathcal{A} := \{x > 0, xy - 1 \geq 0\} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{Q} := \{x > 0, y > 0\} \quad y \quad \mathcal{B} := \{0 < y \leq x\} \subset \mathcal{S}.$$

*Demostración.* La inclusión  $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}$  es clara porque la restricción  $f_1^{(1)}|_{\mathcal{Q}'}$  es estrictamente positiva. Probemos que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ . Para cada  $y > 0$  consideramos el conjunto

$$\mathcal{A}_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{A}\} = [1/y, +\infty[$$

y observamos que  $\mathcal{A} = \bigcup_{y>0} \mathcal{A}_y^*$ , donde  $\mathcal{A}_y^* = \mathcal{A}_y \times \{y\}$ . El conjunto  $f_1^{(1)}(\mathcal{A}_y^*)$  es un intervalo que contiene  $\mathcal{A}_y$ . Esto se debe a que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + y(xy - 1)^2) = +\infty \quad \text{y} \quad f_1^{(1)}(1/y, y) = 1/y \quad \text{para todo } y > 0.$$

Por consiguiente  $\mathcal{A}_y^* \subset f^{(1)}(\mathcal{A}_y^*)$ , y como  $\mathcal{A} \subset \mathcal{Q}'$ ,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{y>0} \mathcal{A}_y^* \subset \bigcup_{y>0} f^{(1)}(\mathcal{A}_y^*) = f^{(1)}\left(\bigcup_{y>0} \mathcal{A}_y^*\right) = f^{(1)}(\mathcal{A}) \subset f^{(1)}(\mathcal{Q}') = \mathcal{S},$$

y se cumple (ii). Para demostrar que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$  escribimos, para cada  $y > 0$ ,

$$\mathcal{B}_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{B}\} = [y, +\infty[$$

y observamos que  $\mathcal{B} = \bigcup_{y>0} \mathcal{B}_y^*$ , donde  $\mathcal{B}_y^* := \mathcal{B}_y \times \{y\}$ . Más aún, como  $f_1^{(1)}(0, y) = y$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + y(xy - 1)^2) = +\infty$ , deducimos que  $f_1^{(1)}([0, +\infty[ \times \{y\})$  es un intervalo que contiene al intervalo  $\mathcal{B}_y$  para todo  $y > 0$ . Por tanto, a partir de las igualdades

$$\mathcal{Q}' = \bigcup_{y>0} [0, +\infty[ \times \{y\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_y^* \subset f^{(1)}([0, +\infty[ \times \{y\})$$

se sigue que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{y>0} \mathcal{B}_y^* \subset \bigcup_{y>0} f^{(1)}([0, +\infty[ \times \{y\}) = f^{(1)}\left(\bigcup_{y>0} [0, +\infty[ \times \{y\}\right) = f^{(1)}(\mathcal{Q}') = \mathcal{S},$$

como queríamos probar. □

**Lema II.3.5** *Consideremos los subconjuntos semialgebraicos de  $\mathbb{R}^2$  definidos como*

$$\mathcal{A} := \{x > 0, xy - 1 \geq 0\}, \quad \mathcal{B} := \{0 < y \leq x\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{B},$$

y la aplicación lineal

$$f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y - x).$$

Entonces  $\mathcal{A} \subset f^{(2)}(\mathcal{C})$  y  $f^{(2)}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}' := \{-x < y \leq 0\}$ .

*Demostración.* Fijado  $x \in \mathbb{R}$  la segunda coordenada  $y \mapsto y - x$  de la aplicación  $f^{(2)}$  es una función creciente. Si definimos

$$\mathcal{B}_x := \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq x\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}'_x := \{y \in \mathbb{R} : -x < y \leq 0\},$$

podemos escribir

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{B}_x \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{B}'_x,$$

y como  $f^{(2)}(\{x\} \times \mathcal{B}_x) = \{x\} \times \mathcal{B}'_x$  para cualquier  $x > 0$ , concluimos que  $f^{(2)}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ .

Ahora probamos que  $\mathcal{A} \subset f^{(2)}(\mathcal{C})$ . Para cada  $x > 0$  consideramos el conjunto

$$\mathcal{A}_x := \{y \in \mathbb{R} : xy - 1 \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1/x\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_x := \mathcal{A}_x \setminus \mathcal{B}_x.$$

Entonces,  $\mathcal{C} = \bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{C}_x$  y

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\{x\} \times \mathcal{C}_x) &= \{f^{(2)}(x, y) : y > x, y \geq 1/x\} = \{(x, y - x) : y > x, y \geq 1/x\} \\ &= \{(x, z) : z > 0, z \geq (1 - x^2)/x\} \supset \{(x, z) : z \geq 1/x\} = \{x\} \times \mathcal{A}_x. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\{x\} \times \mathcal{A}_x \subset f^{(2)}(\{x\} \times \mathcal{C}_x)$  para todo  $x > 0$ , por lo que  $\mathcal{A} \subset f^{(2)}(\mathcal{C})$ .  $\square$

**Lema II.3.6** Sean  $\mathcal{D} := \{-x < y \leq 0\}$  y  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$  tales que

$$\mathcal{A} := \{xy - 1 \geq 0, x > 0\} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{Q}'' := \{x > 0, y \geq 0\}.$$

Consideramos la aplicación polinómica

$$f^{(3)} = (f_1^{(3)}, f_2^{(3)}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y(2 - xy)^2).$$

Entonces,  $f^{(3)}(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}''$  y  $f^{(3)}(\mathcal{D} \cup \mathcal{E}) = \{x > 0, y > -x(2 + x^2)^2\}$ .

*Demostración.* Veamos primero la igualdad  $f^{(3)}(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}''$ . Para esto observamos que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{A}_x, \quad \text{donde} \quad \mathcal{A}_x := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{A}\} = [1/x, +\infty[.$$

Observamos también que la restricción  $f_2^{(3)}|_{\mathcal{A}_x}$  es semidefinida positiva, que  $f_2^{(3)}(x, 2/x) = 0$  y que, fijado  $x > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f_2^{(3)}(x, y) = +\infty$ . Así, como la imagen de  $f_2^{(3)}|_{\{x\} \times \mathcal{A}_x}$  es un intervalo, concluimos que  $f_2^{(3)}(\{x\} \times \mathcal{A}_x) = [0, +\infty[$ . Por consiguiente,

$$f^{(3)}(\{x\} \times \mathcal{A}_x) = \{x\} \times [0, +\infty[ \quad \text{y} \quad f^{(3)}(\mathcal{A}) = \bigcup_{x>0} f^{(3)}(\{x\} \times \mathcal{A}_x) = \bigcup_{x>0} \{x\} \times [0, \infty[ = \mathcal{Q}''.$$

Nótese también que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{Q}''$  y  $f^{(3)}(\mathcal{Q}'') \subset \mathcal{Q}''$ , de donde

$$\mathcal{Q}'' = f^{(3)}(\mathcal{A}) \subset f^{(3)}(\mathcal{E}) \subset f^{(3)}(\mathcal{Q}'') \subset \mathcal{Q}'',$$

y por tanto  $f^{(3)}(\mathcal{E}) = \mathcal{Q}''$ . Para terminar probaremos que

$$f^{(3)}(\mathcal{D}) = \{x > 0, -x(2 + x^2)^2 < y \leq 0\}. \quad (\text{II.3.4})$$



Una vez veamos esto, tenemos la igualdad del enunciado:

$$\begin{aligned} f^{(3)}(\mathcal{D} \cup \mathcal{E}) &= f^{(3)}(\mathcal{E}) \cup f^{(3)}(\mathcal{D}) = \mathcal{Q}'' \cup \{x > 0, -x(2+x^2)^2 < y \leq 0\} \\ &= \{x > 0, y > -x(2+x^2)^2\}. \end{aligned}$$

Procedemos ahora a demostrar la igualdad (II.3.4). Observamos que la derivada parcial

$$\frac{\partial f_2^{(3)}}{\partial y} = (2 - xy)^2 + 2(2 - xy)(-xy) = 4 - 8xy + 3x^2y^2$$

es estrictamente positiva en el conjunto  $W := \{-xy \geq 0\}$  y que  $\mathcal{D}' := \{-x \leq y \leq 0\} \subset W$ . Esto implica que la restricción  $f_2^{(3)}|_{\{x\} \times [-x, 0]}$  es estrictamente creciente para cada  $x > 0$ . Tenemos por tanto

$$f_2^{(3)}(\{x\} \times ]-x, 0]) = ]f_2^{(3)}(x, -x), f_2^{(3)}(x, 0)] = ]-x(2+x^2)^2, 0].$$

Deducimos finalmente la igualdad (II.3.4), puesto que

$$\begin{aligned} f^{(3)}(\mathcal{D}) &= f^{(3)}\left(\bigcup_{x>0} \{x\} \times ]-x, 0]\right) = \bigcup_{x>0} \{x\} \times f_2^{(3)}(\{x\} \times ]-x, 0]) \\ &= \bigcup_{x>0} \{x\} \times ]-x(2+x^2)^2, 0] = \{x > 0, -x(2+x^2)^2 < y \leq 0\}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior se deduce el enunciado.  $\square$

**Lema II.3.7** Sean  $p \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio,  $\mathcal{C} = \{x > 0, y > p(x)\}$ , y la aplicación polinómica

$$f^{(4)} = (f_1^{(4)}, f_2^{(4)}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y - p(x)).$$

Entonces,  $f^{(4)}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q} := \{x > 0, y > 0\}$ .

*Demostración.* Para cada  $x \in \mathbb{R}$  denotamos  $\mathcal{C}_x := ]p(x), +\infty[$  y  $\mathcal{Q}_x := ]0, +\infty[$ . Es obvio que  $f_2^{(4)}(\{x\} \times \mathcal{C}_x) = \mathcal{Q}_x$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , y por tanto,

$$f^{(4)}(\mathcal{C}) = f^{(4)}\left(\bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{C}_x\right) = \bigcup_{x>0} \{x\} \times f_2^{(4)}(\{x\} \times \mathcal{C}_x) = \bigcup_{x>0} \{x\} \times \mathcal{Q}_x = \mathcal{Q},$$

con lo que concluye la demostración.  $\square$

A partir de los Lemas anteriores II.1.1, II.3.4, II.3.5, II.3.6 y II.3.7 obtenemos una nueva prueba del Teorema II.3.1.

*Segunda prueba del Teorema II.3.1.* En primer lugar, se desprende del Lema II.1.1 que la imagen de la aplicación polinómica

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x_1, y_1) = (y(xy - 1), (xy - 1)^2 + x^2)$$

es el semiplano superior  $\mathcal{H} := \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0\}$ . Ahora consideramos la aplicación

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2) = (x_1^2, y_1),$$

y observamos que  $g(\mathcal{H}) = \mathcal{Q}' := \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0, y_2 > 0\}$ . Ahora, para “quitar” a  $\mathcal{Q}'$  la semirrecta  $\{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, y_2 > 0\}$ , empleamos la aplicación polinómica

$$f^{(1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_2, y_2) \mapsto (x_3, y_3) = (x_2 + y_2(x_2 y_2 - 1)^2, y_2).$$

Se deduce del Lema II.3.4 que

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{S} = f^{(1)}(\mathcal{Q}') \subset \mathcal{Q} = \{(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 : x_3 > 0, y_3 > 0\},$$

donde

$$\mathcal{A} := \{(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 : x_3 > 0, x_3 y_3 - 1 \geq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} := \{(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y_3 \leq x_3\}.$$

A continuación consideramos la aplicación lineal

$$f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_3, y_3) \mapsto (x_4, y_4) = (x_3, y_3 - x_3),$$

y observamos que si

$$\mathcal{C} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}, \quad \mathcal{D} := \{(x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2 : -x_4 < y_4 \leq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} := f^{(2)}(\mathcal{S}),$$

entonces, por el Lema II.3.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cup \mathcal{D} &\subset f^{(2)}(\mathcal{C}) \cup f^{(2)}(\mathcal{B}) = f^{(2)}(\mathcal{C} \cup \mathcal{B}) = f^{(2)}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \\ &\subset \mathcal{T} \subset f^{(2)}(\mathcal{Q}) = \{(x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2 : x_4 > 0, x_4 + y_4 > 0\} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Los conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{D}$  son disjuntos y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{E} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{D} \subset \mathcal{Q}$ . Tomamos ahora la aplicación

$$f^{(3)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_4, y_4) \mapsto (x_5, y_5) = (x_4, y_4(2 - x_4 y_4)^2).$$

Del Lema II.3.6 se desprende la igualdad

$$\mathcal{Z} := f^{(3)}(\mathcal{T}) = f^{(3)}(\mathcal{E} \cup \mathcal{D}) = \{(x_5, y_5) \in \mathbb{R}^2 : x_5 > 0, y_5 > -x_5(2 + x_5^2)^2\}.$$

Por último consideramos la aplicación polinómica

$$f^{(4)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_5, y_5) \mapsto (x_6, y_6) = (x_5, y_5 + x_5(2 + x_5^2)^2),$$

que satisface, por el Lema II.3.7, la igualdad  $f^{(4)}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Q}$ . Se comprueba directamente que la imagen de la composición

$$f = (f_1, f_2) = f^{(4)} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)} \circ f^{(1)} \circ g \circ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

es el cuadrante abierto  $\mathcal{Q}$ , como queríamos probar.  $\square$

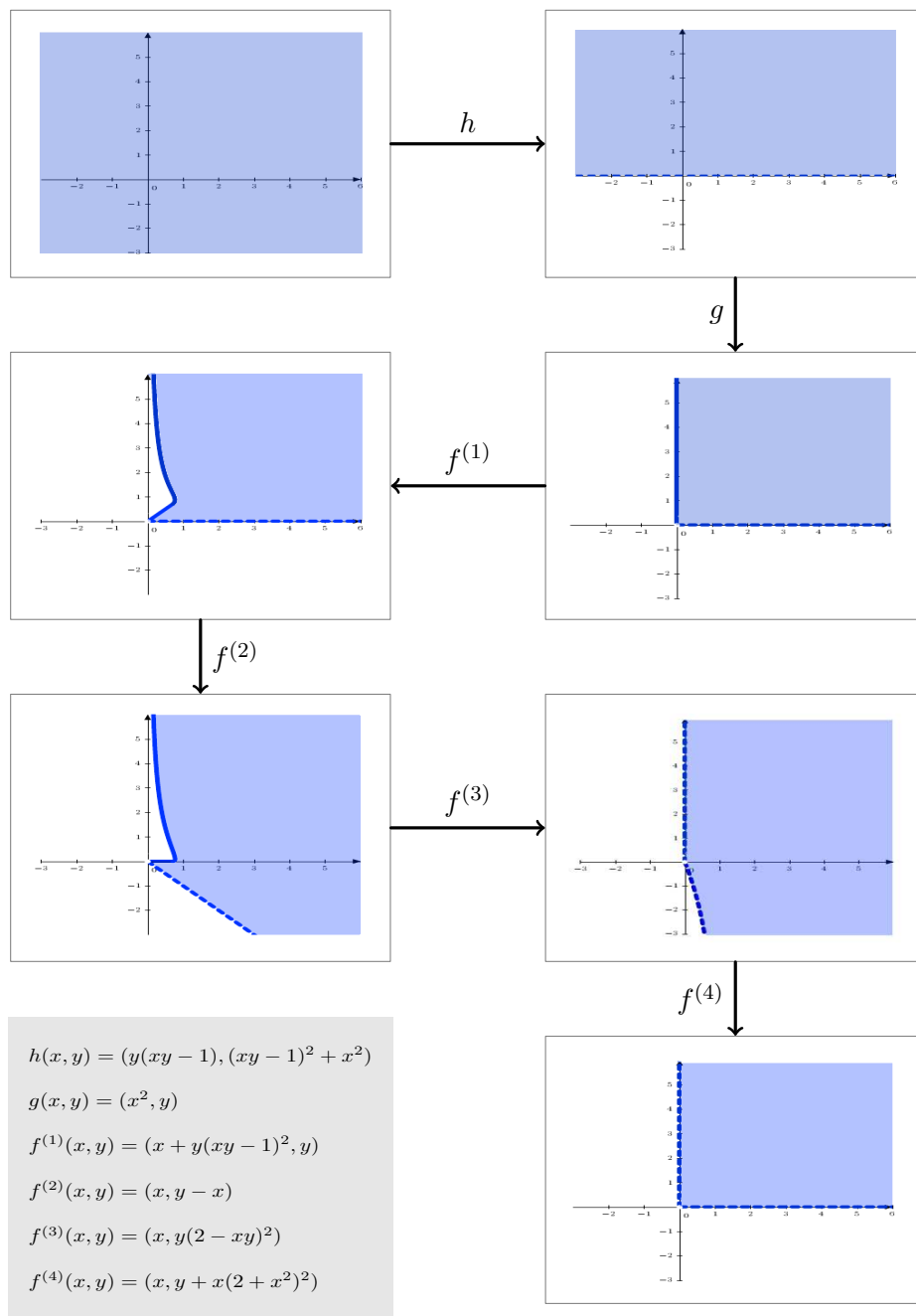


Figura II.3.1: La composición de aplicaciones  $f^{(4)} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)} \circ f^{(1)} \circ g \circ h$  tiene como imagen el cuadrante abierto  $\{x > 0, y > 0\}$ .

**II.3.c. Tercera prueba.** Esta nueva prueba del Teorema II.3.1 sigue los pasos de la propuesta en [FG1], pero reelaborando dicha demostración desde una nueva perspectiva, de naturaleza topológica.

*Demostración alternativa de la Proposición II.3.2.* Ya vimos que la inclusión  $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{Q}$  es evidente, por lo que nos centramos en el contenido recíproco  $\mathcal{Q} \subset f(\mathbb{R}^2)$ .

(II.3.c.1) Consideramos los polinomios  $g_1^*, g_2^*, g_3^* \in \mathbb{R}[x, y]$  definidos por

$$g_1^* = 1 - x^3y + y - xy^2, \quad g_2^* = x^2y \quad y \quad g_3^* = 1 - xy + x - x^4y,$$

y la aplicación polinómica  $g^* = (g_1^*, g_2^*, g_3^*) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con imagen  $\mathcal{Z} := g^*(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces  $f = h^* \circ g^*$ , donde

$$h^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v, w) \mapsto (u^2 + v^2, u^2 + w^2).$$

Para probar que  $f(\mathbb{R}^2)$  contiene a  $\mathcal{Q}$  es suficiente demostrar que  $h^{*-1}(\{(A^2, B^2)\}) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$  para cada par de números reales positivos  $A$  y  $B$ . Esto es, basta comprobar que:

(II.3.c.2)  $h^{*-1}(\{(A^2, B^2)\}) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$  y  $h^{*-1}(\{(B^2, A^2)\}) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$  siempre que  $B \geq A > 0$ .

Dedicaremos el resto de este apartado a a probar este hecho.

(II.3.c.3) En primer lugar introducimos las siguientes aplicaciones, que pueden considerarse parametrizaciones parciales de la superficie  $\mathcal{Z} = g^*(\mathbb{R}^2)$ :

- La aplicación  $\phi : \mathcal{S}_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(t, c) \mapsto (\phi_1, \phi_2, c)$ , donde  $\mathcal{S}_1 := \{c \leq 0 \leq t\}$ ,

$$\phi_1(t, c) = -\frac{c^2t^7 + t(1-t^2)^2 - ct(t^6 + 2t^5 + 1)}{(1+t^3)^2} \quad y \quad \phi_2(t, c) = \frac{t(t+1-ct)}{t^3+1}.$$

- La aplicación  $\psi : \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(a, t) \mapsto (a, \psi_2, \psi_3)$  dada por  $\psi(a, t) = (a, \psi_2, \psi_3)$ , donde  $\mathcal{S}_2 := \{a \leq 0 \leq t\}$ ,

$$\psi_2(a, t) = \frac{t(1-t^3 + \sqrt{(t^3-1)^2 - 4t(a-1)})}{2} \quad y$$

$$\psi_3(a, t) = \frac{1 + 2t + t^6 - (1+t^3)\sqrt{(t^3-1)^2 - 4t(a-1)}}{2}$$

Denotando  $(u, v, w)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  se tiene  $\phi(t, c) \in \{w = c\}$  y  $\psi(a, t) \in \{u = a\}$  para  $t \geq 0$ . Además,  $\phi(0, c) = (0, 0, c)$  para  $c \leq 0$  y  $\psi(a, 0) = (a, 0, 0)$  para  $a \leq 0$ .

Conviene estudiar con más de detalle la función  $\psi_3$ , o con más precisión el comportamiento en el infinito del cociente  $\psi_3(a, t)/t$ , lo que nos conduce al lema siguiente.  $\square$

**Lema II.3.8** *La función  $\psi_3$  satisface  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi_3(a, t)}{t} = a$ .*

*Demostración.* Si para cualquier función  $f(t)$  que satisface  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)/t^n = 0$  escribimos  $o(t^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi_3(a, t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2t + t^6)^2 - (1 + t^3)^2[(t^3 - 1)^2 - 4t(a - 1)]}{2t(1 + 2t + t^6 + (1 + t^3)\sqrt{(t^3 - 1)^2 - 4t(a - 1)})} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[t^{12} + 4t^7 + o(t^7)] - [t^{12} - 4at^7 + 4t^7 + o(t^7)]}{2t(1 + 2t + t^6 + (1 + t^3)\sqrt{(t^3 - 1)^2 - 4t(a - 1)})} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4at^7 + o(t^7)}{2t(2t^6 + o(t^6))} = a, \end{aligned}$$

como queríamos ver.  $\square$

La elección de las aplicaciones  $\phi$  y  $\psi$  introducidas en [II.3.c.3](#) cobra sentido a partir del resultado siguiente.

**Proposición II.3.9** *Los conjuntos  $\phi(\text{Int}(\mathcal{S}_1))$  y  $\psi(\text{Int}(\mathcal{S}_2))$  están contenidos en  $\mathcal{Z}$ .*

*Demostración.* Consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Int}(\mathcal{S}_1) = \{c < 0 < t\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, (t, c) \mapsto \left(\frac{1}{t}, \frac{t^3(t + 1 - ct)}{t^3 + 1}\right) \quad y \\ \Psi : \text{Int}(\mathcal{S}_2) = \{a < 0 < t\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, (a, t) \mapsto \left(t, \frac{1 - t^3 + \sqrt{(t^3 - 1)^2 - 4t(a - 1)}}{2t}\right). \end{aligned}$$

Las aplicaciones  $\Phi$  y  $\Psi$  surgen de modo natural al resolver los sistemas de ecuaciones

$$(\Phi) : \begin{cases} xt = 1 \\ 1 - xy + x - x^4y = c \end{cases} \quad (\Psi) : \begin{cases} 1 - x^3y + y - xy^2 = a \\ x = t \end{cases}$$

con respecto a las variables  $\{x, y\}$ . Ahora, un cálculo directo muestra que  $\phi|_{\text{Int}(\mathcal{S}_1)} = g^* \circ \Phi$  y  $\psi|_{\text{Int}(\mathcal{S}_2)} = g^* \circ \Psi$ , y esto completa la demostración.  $\square$

A continuación recordamos la noción de camino en un espacio topológico  $X$ .

**Definiciones II.3.10** Dado un espacio topológico  $X$ , un *camino* en  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [r, s] \rightarrow X$ , donde  $[r, s]$  es un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ . Cuando  $\alpha(r) = \alpha(s) = x_0$  decimos que  $\alpha$  es un *lazo* con punto base  $x_0$ . En este caso podemos considerar  $\alpha$  como una aplicación cuyo dominio es el espacio cociente  $[r, s]/\sim$ , obtenido mediante la identificación de los extremos del intervalo  $[r, s]$  y homeomorfo a una circunferencia. Consideremos ahora una aplicación continua  $f : D \rightarrow X$ , donde  $D$  es un disco topológico cerrado. Un *lazo frontera de  $f$*  es un lazo  $\alpha : [r, s] \rightarrow X$  tal que existe un homeomorfismo  $\gamma : [r, s]/\sim \rightarrow \partial D$  con  $\alpha = f \circ \gamma$ .

Se define la *concatenación* de caminos en un espacio topológico  $X$  como sigue: dados dos caminos  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  y  $\beta : [c, d] \rightarrow X$  tales que  $\alpha(b) = \beta(c)$ , su concatenación es el camino

$$\alpha * \beta : [a, b - c + d] \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } t \in [a, b], \\ \beta(t + c - b), & \text{si } t \in [b, b - c + d]. \end{cases}$$

El cociente, respecto de la relación de *homotopía* del conjunto de lazos en un espacio topológico  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  se denota  $\pi_1(X, x_0)$  y se denomina *grupo fundamental* de  $X$ . La concatenación de caminos induce una operación en este grupo, que denotaremos multiplicativamente. Cada lazo  $\alpha$  es representante de un elemento  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ , y denotaremos el producto de dos elementos  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$  por  $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ .

En lo que sigue damos por conocidas las propiedades básicas de los grupos fundamentales y los homomorfismos entre grupos fundamentales inducidos por aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Nuestra referencia será Massey [Ma]. Siempre trabajaremos con espacios arco-conexos, en los que el grupo fundamental no depende, salvo isomorfía, del punto base elegido, por lo que a veces abreviaremos  $\pi_1(X) \equiv \pi_1(X, x_0)$ , sea quien sea  $x_0 \in X$ . Escribiremos  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , si necesitamos hacer explícitos los puntos base, para referirnos a una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  que además satisface  $f(x_0) = y_0$ .

**Observación II.3.11** El modo habitual de definir caminos en un espacio topológico hace uso del intervalo estándar  $I = [0, 1]$  como dominio, pero aquí trabajaremos con intervalos arbitrarios  $[r, s]$  para facilitar la construcción de las parametrizaciones que necesitaremos posteriormente. En cualquier caso, todo camino  $\alpha : [r, s] \rightarrow X$  se “normaliza” mediante la biyección afín  $\delta : I \rightarrow [r, s]$ ,  $t \mapsto r + (s - r)t$  por lo que identificamos  $\alpha$  con el camino  $\alpha_\delta := \alpha \circ \delta : I \rightarrow X$ .

**Definición II.3.12** Sean  $A > \varepsilon > 0$  números reales y denotemos

$$D_A(\varepsilon) := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 < (A + \varepsilon)^2, |w| < \varepsilon\}$$

$$D_A := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0, u^2 + v^2 \leq A^2\}.$$

Sean  $D \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto homeomorfo a un disco cerrado con su topología euclídea, y  $r < 0 < s$  dos números reales. Diremos que el lazo  $\alpha : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}^3$  *corta transversalmente una vez al disco*  $D$  si existen un homeomorfismo  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un subconjunto abierto  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $D$  tales que:

- (i)  $\rho(\mathcal{G}) = D_A(\varepsilon)$  y  $\rho(D) = D_A$ ;
- (ii)  $J = \alpha^{-1}(\mathcal{G}) = ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset [r, s]$  y  $(\rho \circ \alpha|_J)(t) = (0, 0, t)$ .

**Observaciones II.3.13** (i) Es sencillo verificar que para cualquier punto  $p \in D_A(\varepsilon)$  se satisface la desigualdad  $d(p, D_A) < \sqrt{2}\varepsilon < 2\varepsilon$ .

(ii) La definición de corte transversal impone ciertas restricciones sobre el modo en que el disco  $D$  puede estar inmerso en  $\mathbb{R}^3$ . De hecho, para inmersiones exóticas de  $D$  pueden no existir lazos que corten una vez transversalmente a  $D$ .

**Notaciones II.3.14** Consideremos la aplicación

$$h^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v, w) \mapsto (u^2 + v^2, u^2 + w^2)$$

introducida en el epígrafe II.3.c.1. Para nuestros propósitos conviene observar que, dados números reales  $B \geq A > 0$ , los discos

$$C_1 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq A^2, w = -\sqrt{B^2 - v^2}\} \text{ y}$$

$$C_2 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v^2 + w^2 \leq A^2, u = -\sqrt{B^2 - v^2}\}$$

satisfacen las igualdades

$$\partial C_1 \subset h^{*-1}(\{(A^2, B^2)\}) \text{ y } \partial C_2 \subset h^{*-1}(\{(B^2, A^2)\}).$$

Consideremos los siguientes homeomorfismos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de  $\mathbb{R}^3$ , que transforman, respectivamente,  $C_1$  y  $C_2$  en el disco  $D_A$  (ver II.3.12):

$$\rho_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto \begin{cases} (u, v, w), & \text{si } |v| > B, \\ (u, v, w + \sqrt{B^2 - v^2}), & \text{si } |v| \leq B, \end{cases}$$

$$\rho_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto \begin{cases} (w, v, u), & \text{si } |v| > B, \\ (w, v, u + \sqrt{B^2 - v^2}), & \text{si } |v| \leq B. \end{cases}$$

Utilizaremos estos homeomorfismos a lo largo de este apartado.

**Lema II.3.15** Sean  $D$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a un disco,  $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ , y  $\alpha : ([r, s], r) \rightarrow (Y, y_0)$  un lazo en  $Y$  de modo que  $\alpha$  corta una vez transversalmente a  $D$ . Entonces  $[\alpha]$  es un generador del grupo fundamental  $\pi_1(Y, y_0)$ .

*Demostración.* Empleemos las notaciones introducidas en la definición II.3.12. En particular, sean  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha$  un lazo y  $A > \varepsilon > 0$  números reales como los allí descritos. Basta probar el lema para el lazo  $\alpha' = \rho \circ \alpha$ , el complementario  $Y' = \mathbb{R}^3 \setminus \partial D_A$  del disco  $D_A$  y el punto  $y'_0 = \alpha'(-\varepsilon)$ . Consideramos el camino  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$\beta(t) = \begin{cases} (3(A + \varepsilon)t, 0, \varepsilon), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (A + \varepsilon, 0, \varepsilon - (t - \frac{1}{3})6\varepsilon), & \text{si } \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ (A + \varepsilon - 3(A + \varepsilon)(t - \frac{2}{3}), 0, -\varepsilon), & \text{si } \frac{2}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$

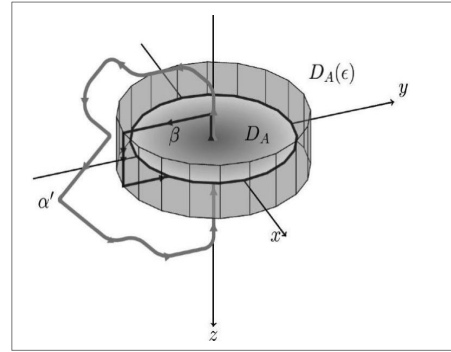
Escribimos  $\alpha'_0 = \alpha'|_J$ ,  $\alpha'_1 = \alpha'|_{[\varepsilon, s]} * \alpha'|_{[r, -\varepsilon]}$  y tenemos

$$[\alpha'] = [\alpha'_0 * \alpha'_1] = [\alpha'_0 * \beta] \cdot [\beta^{-1} * \alpha'_1] = g \cdot 1 = g,$$

donde 1 y  $g$  representan, respectivamente, el elemento neutro y un generador del grupo fundamental  $\pi_1(Y', y'_0)$ .

En efecto, por una parte el espacio  $\mathbb{R}^3 \setminus D_A$  es simplemente conexo, luego  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus D_A, y'_0) \cong \{1\}$ , y el lazo  $\beta^{-1} * \alpha'_1$  está contenido en  $\mathbb{R}^3 \setminus D_A$ .

Por otra parte, el camino  $[\alpha'_0 * \beta]$  genera  $\pi_1(Y', y'_0) \cong \mathbb{Z}$ . En efecto, esto es debido a que  $Y'$  tiene como retracto de deformación el conjunto  $M := \partial D_A(\varepsilon) \cup K_\varepsilon$ , donde  $\partial D_A(\varepsilon)$  representa la frontera de  $D_A(\varepsilon)$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $K_\varepsilon := \{(0, 0, w) : -\varepsilon \leq w \leq \varepsilon\}$ , y se desprende del siguiente Lema II.3.16 que el lazo  $[\alpha'_0 * \beta]$  es un generador de  $\pi_1(M, y'_0)$ , y por tanto de  $\pi_1(Y', y'_0)$ .  $\square$



**Lema II.3.16** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una esfera,  $D$  uno de sus diámetros y  $M := S \cup D$ . Entonces,  $\pi_1(M, x_0) \cong \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sean  $p \in S \setminus D$  y denotemos  $U := M \setminus \{p\}$ . Elegimos un entorno suficientemente pequeño  $V$  de  $p$  en  $S$  homeomorfo a un disco y que no corte a  $D$ . Claramente  $M$  es homeomorfo a  $U \cup V$ . Consideremos el homomorfismo de grupos

$$\varphi : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi(U)$$

inducido por la aplicación inclusión  $j : U \cap V \hookrightarrow U$ . Puesto que  $V$  es simplemente conexo se deduce del Teorema de Van Kampen, [Ma] (página 95, segunda aplicación del teorema 2.1) que  $\pi(M, p) = \pi(U)/\text{Im}(\varphi)$ .

Observamos que  $U$  es homeomorfo a la unión de un disco con un arco que une dos de sus puntos y no corta al disco. Por tanto,  $U$  tiene como retracto de deformación una curva homomorfa a una circunferencia, luego  $\pi(U) = \mathbb{Z}$ . Por otra parte  $U \cap V$  es homeomorfo a un disco menos un punto y su grupo fundamental es también  $\mathbb{Z}$ , pero lo importante es que un generador suyo está contenido en  $S \setminus \{p\} \subset U$ . Como  $S \setminus \{p\}$  es contractible se tiene  $\varphi(\pi(U \cap V)) = 0$  luego  $\pi(M) = \pi(U)$  está generado por un camino que recorre medio meridiano cuyos extremos son los puntos de corte de  $D$  con  $S$  y el diámetro  $D$ , y eso es justamente lo que hace el lazo  $\alpha'_0 * \beta$  del Lema II.3.15.  $\square$

**Lema II.3.17** Sean  $X \subset \mathbb{R}^3$  homeomorfo a una circunferencia,  $D \subset \mathbb{R}^3$  homeomorfo a un disco, y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus X$  una aplicación continua. Entonces cualquier lazo frontera de  $f$  pertenece al elemento neutro de  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$ .



*Demostración.* Basta observar, empleando coordenadas polares, que  $f$  es una homotopía entre el lazo frontera y un camino constante.  $\square$

**Proposición II.3.18** Sean  $B \geq A > 0$  números reales. Entonces, existen números reales  $c_1 < c_0 < 0$  y  $t_1 > 0$  tales que, denotando  $\mathcal{R} := [0, t_1] \times [c_1, c_0]$  y si  $(A, B) \neq (1, 1)$ , existe un lazo frontera de  $\phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que corta una vez transversalmente al disco  $C_1 \subset \mathbb{R}^3$  definido en II.3.14.

*Demostración.* Separamos la prueba en dos casos, según  $A$  y  $B$  sean distintos o iguales.

CASO 1:  $B > A$ . Elegimos  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  de modo que

$$c_1 + \varepsilon < -B < -(B - A) < c_0 - 2\varepsilon < c_0 < 0. \quad (\text{II.3.5})$$

Para cada número real  $c$  tal que  $c_1 \leq c \leq c_0$ , y para todo  $t \geq 0$  se tiene, en virtud de la expresión algebraica de la aplicación  $\phi_1$  en el epígrafe II.3.c.3,

$$\|\phi(t, c)\| \geq |\phi_1(t, c)| \geq (c_0^2 - c_0) \frac{t^7}{(1 + t^3)^2},$$

por lo que existe  $t_1 \geq 0$  que cumple

$$A + \varepsilon \leq |\phi_1(t, c)| \quad \text{para cada } t \geq t_1 \text{ y cada } c_0 \geq c \geq c_1. \quad (\text{II.3.6})$$

(II.3.18.1) Afirmamos ahora que el lazo frontera de la restricción  $\phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$\alpha(s) = \begin{cases} \alpha_1(s) = \phi(0, s - B), & \text{si } c_1 + B \leq s \leq c_0 + B \\ \alpha_2(s) = \phi(s - c_0 - B, c_0), & \text{si } c_0 + B < s \leq t_1 + c_0 + B \\ \alpha_3(s) = \phi(t_1, t_1 + 2c_0 - s + B), & \text{si } t_1 + c_0 + B < s \leq t_1 + 2c_0 - c_1 + B \\ \alpha_4(s) = \phi(-s + 2t_1 + 2c_0 - c_1 + B, c_1), & \text{si } t_1 + 2c_0 - c_1 + B < s \leq 2t_1 + 2c_0 - c_1 + B \end{cases}$$

corta una vez transversalmente a  $C_1$ .

Para demostrar esta afirmación procedemos de la manera siguiente. Consideramos los números reales positivos  $A$  y  $\varepsilon$ , y hacemos jugar al homeomorfismo  $\rho_1$  introducido en II.3.14 y al conjunto abierto  $\mathcal{G}_1 = \rho_1^{-1}(D_A(\varepsilon))$  los papeles de  $\rho$  y  $\mathcal{G}$ , respectivamente, en la definición de corte transversal (ver II.3.12). Comprobemos que  $\alpha^{-1}(\mathcal{G}_1) = ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ . Elegimos primero  $p_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \text{Im}(\alpha)$  y distinguimos los casos siguientes, según  $p_0$  recorre los distintos tramos del camino  $\alpha$ :

(i) Si  $p_0 \in \text{Im}(\alpha_1)$  existe  $c_1 + B \leq s_0 \leq c_0 + B$  tal que  $p_0 = \alpha_1(s_0)$  y, en virtud de las desigualdades (II.3.5),

$$\begin{aligned}\rho_1(p_0) &= \rho_1(\phi(0, s_0 - B)) = (0, 0, s_0) \text{ y} \\ \rho_1(p_0) &\in D_A(\varepsilon) \text{ cuando } c_1 + B < -\varepsilon < s_0 < \varepsilon < c_0 + B.\end{aligned}$$

Por consiguiente  $\alpha_1^{-1}(\mathcal{G}_1) = ]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

(ii) Si  $p_0 \in \text{Im}(\alpha_2)$ , entonces

$$\rho_1(p_0) = \rho_1(u_0, v_0, c_0) = \begin{cases} (u_0, v_0, c_0 + \sqrt{B^2 - v_0^2}), & \text{si } |v_0| < B, \\ (u_0, v_0, c_0), & \text{si } |v_0| \geq B. \end{cases}$$

En el segundo caso tenemos, empleando de nuevo las desigualdades (II.3.5),

$$u_0^2 + v_0^2 \geq B^2 > (c_0 + B)^2 > (A + \varepsilon)^2,$$

y esto implica  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$ . Si se da la primera opción, cuando  $u_0^2 + v_0^2 > (A + \varepsilon)^2$  estamos en la misma situación de antes, y por eso podemos asumir que  $u_0^2 + v_0^2 \leq (A + \varepsilon)^2$ . Como tanto  $B - (A + \varepsilon)$  como  $A + \varepsilon$  son positivos,

$$(B + (A + \varepsilon)) \cdot (B - (A + \varepsilon)) > (B - (A + \varepsilon))^2,$$

y usando las desigualdades (II.3.5) una vez más llegamos a

$$c_0 + \sqrt{B^2 - v_0^2} \geq c_0 + \sqrt{B^2 - (A + \varepsilon)^2} \geq c_0 + B - (A + \varepsilon) > \varepsilon.$$

Como la tercera coordenada de  $\rho_1(p_0)$  es mayor que  $\varepsilon$  concluimos que  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$ .

(iii) Si  $p_0 \in \text{Im}(\alpha_3)$ , entonces  $\rho_1(p_0) = (u_0, v_0, w_0)$ , con  $u_0 \geq A + \varepsilon$ ; así,  $u_0^2 + v_0^2 \geq (A + \varepsilon)^2$  y de nuevo  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$ .

En efecto, como  $p_0 = \alpha_3(s)$  con  $t_1 + c_0 + B < s \leq t_1 + 2c_0 - c_1 + B$ , tenemos

$$c_0 \geq c = t_1 + 2c_0 - s + B \geq c_1 \text{ y } s > t_1 + c_0 + B > t_1.$$

Por tanto, a la vista de la desigualdad (II.3.6),  $u_0 = \phi(s, c) \geq A + \varepsilon$ .

(iv) Sólo nos queda considerar el caso en que  $p_0 \in \text{Im}(\alpha_4)$ . Ahora

$$\rho_1(p_0) = \rho_1(u_0, v_0, c_1) = \begin{cases} (u_0, v_0, c_1 + \sqrt{B^2 - v_0^2}), & \text{si } |v_0| < B, \\ (u_0, v_0, c_1), & \text{si } |v_0| \geq B. \end{cases}$$

Argumentando de modo similar a como lo hicimos al recorrer el segundo tramo de  $\alpha$ , cuando  $u_0^2 + v_0^2 \geq (A + \varepsilon)^2$  es claro que  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$ . Por otra parte, si  $u_0^2 + v_0^2 < (A + \varepsilon)^2$  la tercera coordenada de  $\rho_1(p_0)$  satisface, de nuevo por las desigualdades (II.3.5),

$$c_1 + \sqrt{B^2 - v_0^2} \leq c_1 + B < -\varepsilon,$$

y por tanto  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$ .

CASO 2:  $B = A \neq 1$ . Suponemos primero que  $-1 \leq c \leq 0$ . Bajo esta condición tenemos

$$0 \leq \phi_2(t, c) = \frac{t(t+1-ct)}{1+t^3} \leq \frac{t(2t+1)}{1+t^3}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

y existe  $t_0$  de modo que para cada  $(t, c) \in [t_0, +\infty[ \times [-1, 0]$  se cumple la desigualdad  $\phi_2(t, c) < A/2$ . Consideramos el conjunto compacto  $K = [0, t_0] \times [-1, 0]$ , cuya imagen  $\phi(K)$  es también un compacto y no contiene el punto  $p_A = (0, A, 0)$ , pues en caso contrario, al ser  $A > 0$ , se tendría  $\phi^{-1}\{(0, A, 0)\} = (1, 0)$  y, sin embargo,  $\phi(1, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, A, 0)$ .

En consecuencia, existe un número real  $0 < \delta < A/2$  tal que la bola abierta  $\mathcal{B}_3(p_A, \delta)$  de centro  $p_A$  y radio  $\delta$  no interseca a  $\phi(K)$ . Tomamos  $c_0 \in ]-1, 0[$  de modo que la intersección  $C_1 \cap \{w = c_0, v \geq 0\} \subset \mathcal{B}_3(p_A, \delta)$ . Para ver que esto siempre es posible, observamos que

$$C_1 \cap \{w = c_0, v \geq 0\} = \left\{ w = c_0, v = \sqrt{A^2 - c_0^2}, u^2 \leq A^2 - A^2 + c_0^2 = c_0^2 \right\},$$

de modo que si  $(u, v, w) \in C_1 \cap \{w = c_0, v \geq 0\}$  entonces  $|u| \leq |c_0|$ ,  $v = \sqrt{A^2 - c_0^2}$ ,  $w = c_0$ , y como

$$u^2 + \left( \sqrt{A^2 - c_0^2} - A \right)^2 + c_0^2 \leq 2c_0^2 + \left| \sqrt{A^2 - c_0^2} - A \right| \cdot \left| \sqrt{A^2 - c_0^2} + A \right| = 2c_0^2 + c_0^2 = 3c_0^2$$

deducimos que

$$C_1 \cap \{w = c_0, v \geq 0\} \subset \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + (v - A)^2 + w^2 \leq 3c_0^2\} = \overline{\mathcal{B}_3(p_A, |\sqrt{3}c_0|)}.$$

En consecuencia, es suficiente elegir  $c_0$  con  $0 < |\sqrt{3}c_0| < \delta$ . De esta forma aseguramos que:

(II.3.18.2) *El conjunto cerrado  $E' := \phi([0, +\infty[ \times \{c_0\})$  no interseca a  $C_1$ ; por tanto,  $d(C_1, E') > 0$ .*

En efecto,  $E'$  es cerrado porque la restricción de  $\phi$  a  $[0, +\infty[ \times \{c_0\}$  es una aplicación cerrada. Más aún, se tiene

$$C_1 \cap E' \subset C_1 \cap \{w = c_0, v \geq 0\} \subset \mathcal{B}_3(p_A, \delta).$$

Ahora bien, si  $t > t_0$  entonces  $d(\phi(t, c_0), p_A) > A/2 > \delta$ , mientras que si  $t \leq t_0$  entonces  $\phi([0, t_0] \times \{c_0\}) \subset \phi(K)$ , que no interseca a la bola  $\mathcal{B}_3(p_A, \delta)$ .

A continuación elegimos  $\varepsilon > 0$  tal que  $2\varepsilon < d(\rho_1(C_1), \rho_1(E'))$  (ver II.3.14 para la definición de  $\rho_1$ ) y  $c_1 < -A - \varepsilon$ . Como en el Caso 1, para  $c \in \mathbb{R}$  con  $c_0 \geq c \geq c_1$  tenemos

$$\|\phi(t, c)\| \geq |\phi_1(t, c)| \geq (c_0^2 - c_0) \frac{t^7}{(1+t^3)^2},$$

y de nuevo existe  $t_1$  con  $|\phi_1(t, c)| \geq A + \varepsilon$  para  $t \geq t_1$ ,  $c_1 \leq c \leq c_0$ . Consideramos ahora el rectángulo  $\mathcal{R} := [0, t_1] \times [c_0, c_1]$  y la restricción  $\phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces el lazo frontera  $\alpha$  de

$\phi|_{\mathcal{R}}$  corta una vez transversalmente al disco  $C_1$ , con respecto a las constantes positivas  $A, \varepsilon$  dadas anteriormente, y usando  $\rho_1$  y  $\mathcal{G}_1 := \rho_1^{-1}(D_A(\varepsilon))$  en el lugar de  $\rho$  y  $\mathcal{G}$  de la Definición II.3.12. En este sentido, comprobamos ahora que el conjunto abierto  $\mathcal{G}_1$  es precisamente el intervalo  $J := ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ .

Parametrizamos  $\alpha$  como en II.3.18.1. Para los tramos primero, tercero y cuarto de  $\alpha$  la demostración sigue el mismo desarrollo que en el Caso 1, y concluimos que estos tramos de  $\alpha$  intersecan  $D_A(\varepsilon)$  tan sólo para  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Con respecto a un punto  $p_0$  elegido en el segundo tramo de  $\alpha$ , se tiene  $p_0 \in E'$  y por tanto  $d(\rho_1(p_0), D_A) \geq d(\rho_1(E'), D_A) > 2\varepsilon$ . Así,  $\rho_1(p_0) \notin D_A(\varepsilon)$  pues en caso contrario, por el Comentario II.3.13, (ii), obtendríamos la desigualdad  $d(\rho_1(p_0), D_A) < 2\varepsilon$ , que es una contradicción.  $\square$

**Proposición II.3.19** Sean  $A$  y  $B$  números reales tales que  $0 < A < B$ , y  $C_2 \subset \mathbb{R}^3$  el disco introducido en II.3.14. Entonces, existen números reales  $a_1 < a_0 < 0$  y  $t_1 > 0$  de modo que, denotando  $\mathcal{R} := [a_1, a_0] \times [0, t_1]$ , existe un lazo frontera de  $\psi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que corta una vez transversalmente al disco  $C_2$ .

*Demostración.* Procedemos de manera análoga a la demostración del Caso 1 de la Proposición II.3.18. Elegimos números reales  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  y  $0 < \varepsilon < 1$  de modo que

$$a_1 + \varepsilon < -B < -(B - A) < a_0 - 2\varepsilon < a_0 < 0.$$

En virtud del Lema II.3.8, y asumiendo que  $a_0 \geq a \geq a_1$ , tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_3(a, t)}{a_0 t} = \frac{a}{a_0} \geq 1,$$

luego existe  $t_0 > 0$  tal que  $\psi_3(a, t) \leq a_0 t / 2$  para todo  $t \geq t_0$ , porque  $a_0 < 0$ . En particular, existe  $t_1 > t_0$  tal que  $\psi_3(a, t) < -(A + \varepsilon)$  siempre que  $t \geq t_1$  y  $a_0 \geq a \geq a_1$ . Consideramos el rectángulo  $\mathcal{R} := [a_1, a_0] \times [0, t_1]$  y comprobamos que existe un lazo frontera  $\beta$  de la restricción  $\psi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que corta una vez transversalmente el disco  $C_2$ , definido por

$$\beta(s) = \begin{cases} \beta_1(s) = \psi(s - B, 0), \\ \quad \text{si } a_1 + B \leq s \leq a_0 + B \\ \beta_2(s) = \psi(a_0, s - a_0 - B), \\ \quad \text{si } a_0 + B < s \leq t_1 + a_0 + B \\ \beta_3(s) = \psi(t_1 + 2a_0 - s + B, t_1), \\ \quad \text{si } t_1 + a_0 + B < s \leq t_1 + 2a_0 - a_1 + B \\ \beta_4(s) = \psi(a_1, -s + 2t_1 + 2a_0 - a_1 + B), \\ \quad \text{si } t_1 + 2a_0 - a_1 + B < s \leq 2t_1 + 2a_0 - a_1 + B. \end{cases}$$

Ahora, empleando un argumento similar al utilizado en la prueba de la Proposición II.3.18, y analizando tramo a tramo el lazo  $\beta$ , obtenemos que  $\beta^{-1}(\rho_2^{-1}(D_A(\varepsilon))) = ]-\varepsilon, \varepsilon[$  (ver II.3.14

para la definición de  $\rho_2$ ).  $\square$

Finalmente demostramos II.3.c.2, con lo que concluye la prueba alternativa de II.3.2.

*Demostración de II.3.c.2.* Suponemos primero que  $B \geq A > 0$  y  $(A, B) \neq (1, 1)$ . Probaremos que  $\mathcal{Z} := g^*(\mathbb{R}^2)$  interseca tanto a  $h^{*-1}(A^2, B^2)$  como a  $h^{*-1}(B^2, A^2)$ . Ya sabemos que  $h^{*-1}(A^2, B^2)$  contiene la frontera del disco  $C_1 := \{u^2 + v^2 \leq A^2, w = -\sqrt{B^2 - v^2}\}$ . Demostramos ahora que  $\partial C_1$  interseca a  $\mathcal{Z}_1 := \text{Im}(\phi) \subset \mathcal{Z}$ . En efecto, por la Proposición II.3.18, existen un rectángulo  $\mathcal{R} := [0, t_1] \times [c_1, c_0]$  y un lazo frontera  $\alpha$  de  $\phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que corta una vez transversalmente al disco  $C_1$ , y por lo tanto representa un generador del grupo  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial C_1) \cong \mathbb{Z}$ . Por el Lema II.3.17, si  $\phi(\mathcal{R})$  no interseca a  $\partial C_1$  entonces  $[\alpha]$  es el elemento neutro de  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial C_1)$ , que es una contradicción.

Un argumento similar demuestra que  $\mathcal{Z}$  también interseca a  $h^{*-1}(B^2, A^2)$ ; basta para ello sustituir el disco  $C_1$  por  $C_2$ , la aplicación  $\phi$  por  $\psi$  y la Proposición II.3.18 por la Proposición II.3.19.

Sólo falta probar el aserto II.3.c.2 para el caso especial  $A = B = 1$ . Un cálculo directo nos permite comprobar que  $(0, 1, 0) = g^*(1, 1) \in h^{*-1}\{(1, 1)\} \cap \mathcal{Z}$ , y esto completa la demostración.  $\square$

**II.3.d. Consecuencias.** A partir del resultado sobre el cuadrante abierto del plano es posible ahora demostrar un resultado algo más general.

**Proposición II.3.20** *El interior y el complementario de un ángulo son imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Como el interior de cualquier ángulo en  $\mathbb{R}^2$  es afinmente equivalente al primer cuadrante  $\mathcal{Q}$ , del Teorema II.2.3 se deduce que la afirmación es válida para este tipo de conjuntos. En cuanto al complementario de un ángulo, es afinmente equivalente al conjunto  $\mathcal{Q}' := \mathbb{R}^2 \setminus \{x \geq 0, y \leq 0\}$ , luego basta escribir  $\mathcal{Q}'$  como imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ . Ahora bien,  $\mathcal{Q}' = g(\mathcal{Q})$ , donde  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto z^3$  en coordenadas complejas es una aplicación polinómica. Por el Teorema II.2.3,  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q}$  para cierta aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , así que  $(g \circ f)(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q}'$ .  $\square$

**Proposición II.3.21** *El conjunto  $\mathcal{Q}_n := \{x_1 > 0, \dots, x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  para cada número entero  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Este resultado es el Teorema II.2.3 para  $n = 2$ , y elegimos una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q}_2$ . Probamos ahora que también se cumple para  $n = 3$ . Por el Lema II.1.1 existe una aplicación polinómica  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H} := \{y > 0\}$ . Entonces, la aplicación polinómica

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (f_1(x_1, g_1(x_2, x_3)), f_2(x_1, g_1(x_2, x_3)), g_2(x_2, x_3))$$

cumple la igualdad  $h(\mathbb{R}^3) = \mathcal{Q}_3$ , ya que  $h$  es la composición de las aplicaciones

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(\text{Id}, g)} \mathbb{R} \times \mathcal{H} = \mathbb{R}^2 \times ]0, +\infty[ \xrightarrow{(f, \text{Id})} \mathcal{Q}_2 \times ]0, +\infty[ = \mathcal{Q}_3$$

Ahora que ya sabemos que existen aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Q}_2$  y  $h(\mathbb{R}^3) = \mathcal{Q}_3$ , para expresar  $\mathcal{Q}_n$  con  $n > 3$  como imagen polinó-

mica de  $\mathbb{R}^n$  basta considerar, si  $n = 2k$  es par, la aplicación  $\overbrace{f \times \cdots \times f}^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y si  $n = 2k + 1$  es impar la aplicación  $h \times \overbrace{f \times \cdots \times f}^{k-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$

# Propiedades de imágenes polinómicas y regulares de $\mathbb{R}^n$

## III.1. Preliminares y herramientas

Comenzamos introduciendo los objetos y notaciones que emplearemos en el resto de este capítulo. Denotamos por  $H_\infty(\mathbb{K}) := \{x_0 = 0\}$  el hiperplano de infinito del espacio proyectivo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^m$ , que contiene a  $\mathbb{K}^m$  identificado al subconjunto  $\mathbb{K}\mathbb{P}^m \setminus H_\infty(\mathbb{K}) = \{x_0 = 1\}$  vía el homeomorfismo

$$j : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m \setminus H_\infty(\mathbb{K}), (x_1, \dots, x_m) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_m).$$

En el caso  $m = 1$ , llamamos  $\{p_\infty\} := \{x_0 = 0\} = \{(0 : 1)\}$  al punto del infinito de la recta proyectiva  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ , y si  $m = 2$  denotamos  $\ell_\infty(\mathbb{K}) := \{x_0 = 0\}$  la recta de infinito del plano proyectivo  $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ . Conviene recordar que el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  puede sumergirse en  $\mathbb{R}^k$  para  $k$  suficientemente grande como una variedad algebraica real afín no singular (véase [BCR, 3.4.4]). En particular, la clausura en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  de un conjunto semialgebraico de  $\mathbb{R}^m$  es de nuevo un conjunto semialgebraico. Con frecuencia interpretaremos los objetos algebraicos reales como conjuntos de puntos fijos, con respecto a la conjugación, de objetos algebraicos complejos; obviamente, estos objetos algebraicos reales son invariantes por conjugación.

**III.1.a. Objetos proyectivos invariantes.** Para cada  $n \geq 1$  consideramos la conjugación compleja

$$\sigma := \sigma_n : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n, z = (z_0 : z_1 : \dots : z_n) \mapsto \bar{z} := (\bar{z}_0 : \bar{z}_1 : \dots : \bar{z}_n),$$

cuyo conjunto de puntos fijos es  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Decimos que el conjunto  $A \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es  $\sigma$ -invariante si  $\sigma(A) = A$ . Del criterio Jacobiano se deduce que si  $Z \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad algebraica proyectiva compleja  $\sigma$ -invariante no singular de dimensión compleja  $d$ , entonces  $Z \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  es una variedad algebraica proyectiva real no singular de dimensión real  $d$ . Decimos que la aplicación racional  $h : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  es  $\sigma$ -invariante si  $h \circ \sigma_n = \sigma_m \circ h$ . En particular, si las componentes de  $h$  son polinomios homogéneos con coeficientes reales, entonces  $h$  es  $\sigma$ -invariante, y la restricción  $h|_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  es una aplicación racional real.

Durante todo este capítulo usaremos con frecuencia conceptos básicos de la geometría algebraica compleja como *aplicación racional*, *aplicación regular*, *divisor*, *explosión*, etc, tal

como se exponen en [Ha, Mu, Sh1, Sh2]. Recordamos en particular el siguiente resultado relativo a la regularidad de una aplicación racional definida sobre una curva no singular (véase [Mu, 7.1]).

**Lema III.1.1** *Sean  $Z \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  una curva algebraica proyectiva no singular y  $F : Z \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  una aplicación racional. Entonces  $F$  se extiende a una aplicación regular  $\widehat{F} : Z \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ , y si  $Z, F$  son  $\sigma$ -invariantes también lo es  $\widehat{F}$ .*

En este Capítulo será esencial la resolución de indeterminaciones de una aplicación racional proyectiva  $\sigma$ -invariante, definida sobre una superficie proyectiva  $\sigma$ -invariante no singular. La resolución del lugar de indeterminación de una aplicación racional es una técnica muy bien conocida; como necesitamos preservar la  $\sigma$ -invarianza de los datos exponemos a continuación con cuidado este proceso.

**III.1.b. Resolución de indeterminaciones.** Sean  $Z_0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  una variedad algebraica proyectiva no singular,  $\sigma$ -invariante de dimensión  $d$  y sea  $F_{\mathbb{C}} : Z_0 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  una aplicación racional  $\sigma$ -invariante. Para calcular el conjunto de indeterminación de  $F_{\mathbb{C}} := (F_1 : \dots : F_m)$  procederemos del siguiente modo (véase [Sh1, III.1.4]). Consideramos para cada  $0 \leq i \leq m$  el divisor  $D_i$  en  $Z_0$  determinado por el polinomio  $F_i$  y tomamos el máximo común divisor  $|D| := \text{mcd}\{D_0, D_1, \dots, D_m\}$  de dichos divisores. Es claro que los divisores  $D'_i := D_i - |D|$  no tienen ninguna componente en común. Aplicando [Sh1, III.1.4.Thm.2], la aplicación  $F_{\mathbb{C}}$  no es regular, exactamente, en los puntos del conjunto  $\sigma$ -invariante  $Y_{\mathbb{C}} := \bigcap_{i=0}^m \text{supp}(D'_i)$ , cuya dimensión es  $\leq d - 2$ . Como además  $F_{\mathbb{C}}$  es  $\sigma$ -invariante, esta aplicación se restringe a una aplicación racional real  $F_{\mathbb{R}} : Z_0 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , cuyo conjunto de indeterminación es  $Y_{\mathbb{R}} := Y_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .

Usaremos  $\dim$  para referirnos a los dos operadores  $\dim_{\mathbb{R}}$  y  $\dim_{\mathbb{C}}$ ; siempre se deducirá del contexto cuál de los dos está siendo utilizado en cada momento. En lo que sigue suponemos que  $Z_0$  tiene dimensión 2, y afirmamos que en estas condiciones:

(III.1.b.1) *Existen:*

- (i) *Un entero  $k \geq 2$  y una superficie algebraica proyectiva  $\sigma$ -invariante no singular  $Z_1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ .*
- (ii) *Una composición  $\sigma$ -invariante  $\pi_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow Z_0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  de explosiones, cuyo conjunto fundamental  $Y_{\mathbb{C}} := \{p \in Z_0 : \#\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(p) > 1\}$  satisface que  $\pi_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} : Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}}) \rightarrow Z_0 \setminus Y_{\mathbb{C}}$  es un isomorfismo birregular, y*
- (iii) *Una aplicación regular proyectiva y  $\sigma$ -invariante  $\widehat{F}_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  tal que*

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} = F_{\mathbb{C}} \circ \pi_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})}.$$

Una terna  $\sigma$ -invariante  $(Z_1, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$  que satisface las propiedades anteriores será llamada una *resolución  $\sigma$ -invariante de la aplicación  $F_{\mathbb{C}}$* .



Además, para cada  $y \in Y_{\mathbb{C}}$  las componentes irreducibles de  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  son curvas algebraicas proyectivas no singulares  $K_{i,y}$  birregularmente equivalentes a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  (vía una aplicación regular  $\Phi_{i,y} : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow K_{i,y}$ , que es  $\sigma$ -invariante si  $K_{i,y}$  es  $\sigma$ -invariante) tales que

- (iv) Si  $y \in Y_{\mathbb{C}} \setminus Y_{\mathbb{R}}$ , entonces  $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,\sigma(y)}$  y  $K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \emptyset$ .
- (v) Si  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  entonces, o  $K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \emptyset$  y existe  $j \neq i$  con  $\sigma(K_{i,y}) = K_{j,y}$  (y  $K_{j,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \emptyset$ ) o  $\sigma(K_{i,y}) = K_{i,y}$  y la intersección  $C_{i,y} := K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  es una curva algebraica proyectiva no singular birregularmente equivalente a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  (vía la restricción  $\phi_{i,y} := \Phi_{i,y}|_{\mathbb{R}\mathbb{P}^1} : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow C_{i,y}$ ).

Antes de presentar un esquema de la demostración de III.1.b.1 es conveniente recordar algo de terminología junto con resultados básicos sobre la explosión con centro no singular de una variedad algebraica proyectiva no singular.

**III.1.c. Explosión con centro no singular de una variedad no singular.** Sean  $Z_0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  una variedad algebraica proyectiva no singular e  $Y \subset Z_0$  una subvariedad no singular. Denotemos  $(\mathbf{z})$  el ideal del anillo de polinomios  $\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$  generado por  $z_0, \dots, z_n$ . Sean  $P_1, \dots, P_m$  polinomios homogéneos del mismo grado que generan un ideal  $\mathfrak{a}$  del anillo  $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ , cuya saturación

$$\bar{\mathfrak{a}} := \{P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : (\mathbf{z})^k P \subset \mathfrak{a} \text{ para algún } k \geq 0\}$$

coincide con el ideal  $\mathcal{J}_{Z_0}(Y) = \{P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : P(z) = 0 \ \forall z \in Y\}$ . Entonces:

(III.1.c.1) La explosión  $\text{Bl}_Y(Z_0)$  de  $Z_0$  con centro  $Y$  es la clausura de Zariski en  $Z_0 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  del conjunto

$$\{(z; (P_1(z) : \dots : P_m(z))) \in (Z_0 \setminus Y) \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}\},$$

junto con la proyección asociada  $\pi : \text{Bl}_Y(Z_0) \subset Z_0 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1} \rightarrow Z_0$ ,  $(z; y) \mapsto z$  (véase [Ha, 7.18] y [Sh2, VI.2.2]). Recordamos aquí que:

- $\text{Bl}_Y(Z_0)$  es una variedad algebraica proyectiva irreducible no singular de la misma dimensión que  $Z_0$ , que “no depende” (en el sentido de que es única salvo isomorfismo birregular) de la elección del ideal  $\mathfrak{a}$  ni de sus generadores (ver [Sh2, VI.2.2 (a,b)]),
- $\pi|_{\text{Bl}_Y(Z_0) \setminus \pi^{-1}(Y)} : \text{Bl}_Y(Z_0) \setminus \pi^{-1}(Y) \rightarrow Z_0 \setminus Y$  es un isomorfismo birregular, e
- $Y$  puede recubrirse mediante una familia finita de subconjuntos afines abiertos  $\{U_\alpha\}$  que satisfacen  $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ , donde  $r = \dim(Z_0) - \dim(Y)$ .

(III.1.c.2) Consideremos ahora las componentes irreducibles  $Y_1, \dots, Y_r$  de  $Y$ . Como  $Y$  es no singular, también lo es cada  $Y_i$  y, además,  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Se puede comprobar que  $\text{Bl}_Y(Z_0) \cong \text{Bl}_{Y_r}(\dots \text{Bl}_{Y_2}(\text{Bl}_{Y_1}(Z_0)) \dots)$ , usando la caracterización en términos de su estructura local en torno a  $Y$  y la unicidad de una explosión salvo isomorfismo birregular.

(III.1.c.3) La construcción anterior III.1.c.1 muestra que si tanto  $Z_0$  como  $Y$  son conjuntos  $\sigma$ -invariantes, podemos suponer que también  $\text{Bl}_Y(Z_0)$  lo es; para esto basta elegir el ideal  $\mathfrak{a}$  cuyo saturado es  $\mathcal{J}_{Z_0}(Y)$  de modo que todos sus generadores sean  $\sigma$ -invariantes.

Para obtener dichos generadores es suficiente elegir un sistema de generadores arbitrario y reemplazarlo por el formado por las partes reales y las partes imaginarias de los mismos. Es interesante observar que si consideramos la inmersión de  $\text{Bl}_Y(Z_0)$  en cierto espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  mediante la aplicación de Segre (véase [Ha, 2.11]), entonces la proyección  $\pi : \text{Bl}_Y(Z_0) \rightarrow Z_0$  es  $\sigma$ -invariante. De este modo,  $\pi^{-1}(Y \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \pi^{-1}(Y) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^N$  y siguiendo la demostración de [Sh2, VI.2.2] concluimos que, en esta situación de  $\sigma$ -invariancia,  $Y$  puede recubrirse mediante una familia finita  $\{U_\alpha\}$  de subconjuntos abiertos afines  $\sigma$ -invariantes tales que  $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$  y cuyas intersecciones con  $\mathbb{R}\mathbb{P}^N$  satisfacen

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^N \cong (U_\alpha \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n) \times \mathbb{R}\mathbb{P}^{r-1},$$

donde  $r := \dim(Z_0) - \dim(Y) = \dim(Z_0 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n) - \dim(Y \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  (véase [BCR, 3.5.8-11]).

(III.1.c.4) Suponemos ahora que  $Z_0$  es una superficie algebraica proyectiva no singular  $\sigma$ -invariante y que  $Y$  es un subconjunto finito  $\sigma$ -invariante. Consideramos la explosión  $(\text{Bl}_Y(Z_0), \pi)$  de  $Z_0$  con centro  $Y$ :

(i) Para cada  $y \in Y$  la fibra  $\pi^{-1}(y)$  es, por III.1.c.1, una curva racional no singular. De hecho, si  $y \in Y \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  la fibra  $\pi^{-1}(y)$  es, por III.1.c.3, una curva racional no singular  $\sigma$ -invariante, vía una equivalencia birregular  $\sigma$ -invariante con  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Además, si  $y \in Y \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  entonces  $\pi^{-1}(y) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^N = \emptyset$ , puesto que  $\pi$  es  $\sigma$ -invariante.

(ii) Si  $C \subset Z_0$  es una curva algebraica no singular, su *transformada estricta* con respecto a la proyección  $\pi$

$$\tilde{C} := \text{Cl}_{\text{Bl}_Y(Z_0)}^{\text{zar}}(\pi^{-1}(C \setminus Y)) \subset \pi^{-1}(C)$$

es, por [Sh2, VI.2.2.d], una curva no singular. Si además existe una equivalencia birregular  $\sigma$ -invariante  $\Phi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow C$ , entonces la transformada estricta  $\tilde{C}$  de  $C$  es  $\sigma$ -invariante y, aplicando el Lema III.1.1 a la aplicación racional  $\pi^{-1} \circ \Phi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \tilde{C}$ , obtenemos una equivalencia birregular  $\sigma$ -invariante  $\Psi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \tilde{C}$ .

*Esquema de la demostración de III.1.b.1.* Como se muestra en la demostración de [Sh1, IV.3.3.Thm.3], el proceso (finito) empleado para resolver las indeterminaciones de una aplicación racional  $F_{\mathbb{C}} : Z_0 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  consiste en explotar los puntos de indeterminación de  $F$  y de las consecutivas aplicaciones racionales que resultan de la composición de  $F$  con la sucesión de aplicaciones que se obtienen tras cada explosión a lo largo del proceso. Siguiendo (III.1.c.2), podemos explotar de una sola vez todos los puntos de indeterminación de estas aplicaciones racionales. De este modo, aplicando inductivamente (III.1.c.3), podemos suponer que cada aplicación racional involucrada en el proceso, junto con su dominio de definición y su conjunto de indeterminación, son  $\sigma$ -invariantes. Como ya sabemos, la terna  $(F_{\mathbb{C}}, Z_0, Y_{\mathbb{C}})$  empleada inicialmente es  $\sigma$ -invariante.

Al final de este proceso obtenemos:

- Una superficie algebraica proyectiva  $\sigma$ -invariante  $Z_1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$  para cierto  $k \geq 2$ ,
- Una composición de explosiones  $\sigma$ -invariantes  $\pi_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow Z_0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , y

- Una aplicación proyectiva regular y  $\sigma$ -invariante  $\widehat{F}_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  tal que

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} = F_{\mathbb{C}} \circ \pi_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})}.$$

Así, la terna  $(Z_1, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$  satisface las condiciones (i) y (iii) de nuestra afirmación previa. Observamos también que la preimagen de cada punto de  $Y_{\mathbb{C}}$  es, como consecuencia de (III.1.c.4), una curva algebraica proyectiva compleja cuyas componentes irreducibles son curvas racionales no singulares. Por otra parte, por la construcción realizada, la preimagen de cada punto de  $Z_0 \setminus Y_{\mathbb{C}}$  mediante  $\pi$  es un único punto. Por tanto  $Y_{\mathbb{C}}$  es el conjunto fundamental de  $\pi_{\mathbb{C}}$  y también se cumple (ii). Por último, las afirmaciones (iv) y (v) son consecuencia de (III.1.c.4).  $\square$

**III.1.d. Curvas proyectivas que se intersecan en un único punto.** Más adelante emplearemos el Lema III.1.3 acerca de la intersección de dos curvas algebraicas proyectivas conexas de una superficie algebraica proyectiva compleja bajo ciertas condiciones. La demostración de dicho resultado (véase [J5, 3.1]) está inspirada en la de [J3, 4.6]. Antes de probarlo presentamos el siguiente resultado preliminar, debido a Jelonek [J3, 4.7]. Recordamos, II.3.10, que si  $I := [0, 1]$ ,  $X$  es un espacio topológico y  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son dos caminos tales que  $\alpha(1) = \beta(0)$ , entonces  $\alpha * \beta : I \rightarrow X$  denota la concatenación de  $\alpha$  y  $\beta$ , mientras que  $\alpha^{-1}$  representa el camino que se obtiene al recorrer  $\alpha(I)$  desde el punto  $\alpha(1)$  hasta el punto  $\alpha(0)$ . Se dice que los caminos  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son *homótopos*, y lo escribiremos  $\alpha \simeq \beta$ , si existe una aplicación continua  $\varphi : I \times I \rightarrow X$  tal que  $\varphi(\cdot, 0) = \alpha$  y  $\varphi(\cdot, 1) = \beta$ . Obviamente, sin más que reparametrizar podemos identificar cada camino con otro cuyo dominio es un intervalo cerrado prefijado.

**Lema III.1.2** *Sea  $X$  una variedad algebraica compleja cuasi-proyectiva y normal y sea  $Y \subset X$  un abierto Zariski y conexo. Si  $j : Y \hookrightarrow X$  es la aplicación inclusión, entonces el homomorfismo inducido  $j_* : H_1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$  es un epimorfismo. En particular, si  $H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$  también  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ .*

*Demostración.* En primer lugar, como los grupos  $H_1(X, \mathbb{Z})$  y  $H_1(Y, \mathbb{Z})$  son los abelianizados de  $\pi_1(X)$  y  $\pi_1(Y)$  respectivamente, es suficiente demostrar que para algún punto  $a \in Y$  el homomorfismo inducido  $j_* : \pi_1(Y, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  es un epimorfismo.

Sea  $\gamma : I \rightarrow X$  un camino cerrado tal que  $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ . Para nuestros propósitos es suficiente encontrar un camino  $\alpha : I \rightarrow Y$  homotópo a  $\gamma : I \rightarrow X$  en  $X$ . Recordamos que, como consecuencia de la estructura cónica local de los conjuntos algebraicos,  $X$  es localmente contractible. Sea  $\{V^x\}_{x \in X}$  un recubrimiento de  $X$  formado por subconjuntos contráctiles que son abiertos en  $X$ , tales que  $x \in V^x$ . Como  $X$  es una variedad algebraica cuasi-proyectiva compleja normal,  $X$  es localmente irreducible en sentido analítico, por lo que cada punto  $x \in X$  admite un entorno abierto irreducible  $U^x \subset V^x$ . Nótese que la

intersección de  $D = X \setminus Y$  con  $U^x$  define un subconjunto analítico de  $U^x$  y, como éste es irreducible,  $U^x \setminus D$  es conexo (véase [N, IV.1.Cor.2, pag. 68]).

Sea  $\varepsilon > 0$  un número de Lebesgue para el recubrimiento abierto  $\{\gamma^{-1}(U^x)\}_{x \in X}$  del intervalo  $I$ , y elegimos un entero  $n \geq 1$  tal que  $\varepsilon > 1/n$ . Si  $I_k := [k/n, (k+1)/n]$ , entonces  $\gamma(I_k)$  está contenido en algún  $U^x$ , que renombramos como  $U_k$  y también renombramos  $V^x$  como  $V_k$ . Sean  $a_k := \gamma(k/n)$  y, por supuesto  $a_0 = a_n = a$ . Escribimos ahora  $b_0 := b_n := a$  y elegimos, para cada  $0 < k < n$ , un punto  $b_k \in (U_{k-1} \cap U_k) \setminus D$  que se encuentra en la misma componente conexa  $C_k$  de  $U_{k-1} \cap U_k$  que el punto  $a_k$ .

Sea  $\gamma_k := \gamma|_{I_k} : I_k \rightarrow X$  y definimos  $\beta_0 := \beta_n : I \rightarrow X$ ,  $\beta_n(t) = a$  (el camino cerrado trivial) y para cada  $0 < k < n$  consideramos un camino cerrado  $\beta_k$  que conecta  $a_k$  con  $b_k$  y cuya imagen está contenida en  $C_k$ . Sea  $\alpha_k$  un camino que conecta  $b_k$  con  $b_{k+1}$  cuya imagen está contenida en el conjunto conexo  $U_k \setminus D$ . Como  $V_k$  es contráctil se cumple que  $\gamma_k \simeq \beta_k * \alpha_k * \beta_{k+1}^{-1}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \gamma &\simeq \gamma_0 \cdots \gamma_{n-1} \simeq \beta_0 * \alpha_0 * \beta_1^{-1} * \cdots * \beta_{n-1} * \alpha_{n-1} * \beta_n^{-1} \\ &\simeq \beta_0 * \alpha_0 * \cdots * \alpha_{n-1} * \beta_n^{-1} \simeq \alpha_0 * \cdots * \alpha_{n-1} =: \alpha. \end{aligned}$$

Como  $\text{Im}(\alpha) \subset Y$ , concluimos que el homomorfismo inducido  $j_* : \pi_1(Y, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  es un epimorfismo.  $\square$

**Lema III.1.3** *Sea  $X$  una superficie algebraica proyectiva compleja. Supongamos que  $X$  contiene un subconjunto abierto y denso  $U$  tal que  $H_1(U; \mathbb{Z}) = H_2(U; \mathbb{Z}) = 0$  y cuyo complementario  $A := X \setminus U$  es una curva algebraica compleja. Sean  $C_1, C_2 \subset A$  dos curvas analíticas complejas, conexas y compactas, sin componentes irreducibles comunes. Entonces, la intersección  $C_1 \cap C_2$  es vacía o contiene un único punto.*

*Demostración.* La demostración transcurre en varios pasos:

(III.1.3.1) Para empezar, podemos suponer que  $X$  es un poliedro compacto de dimensión 4,  $A$  es un subpoliedro cerrado de  $X$  y  $U$  es una variedad orientable de dimensión 4. Usando la dualidad de Lefschetz (véase [Sp, 6.1.11 & 6.2.19]),  $H^i(X, A; \mathbb{Z}) \cong H_{4-i}(U; \mathbb{Z})$  para  $0 \leq i \leq 4$ , luego por la sucesión exacta de cohomología (véase [Sp, 5.4.13]), tenemos

$$H^1(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, A; \mathbb{Z}) \cong H_2(U; \mathbb{Z}) = 0.$$

Por tanto, el homomorfismo  $H^1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A; \mathbb{Z})$  es un epimorfismo.

Como  $U$  es un subconjunto abierto y denso de  $X$  cuyo complementario es una curva algebraica compleja existe, por el Lema III.1.2, un epimorfismo  $0 = H_1(U; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$  y de aquí  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ . Ahora, usando el teorema de coeficientes universales para cohomología ([Sp, 5.5.1] y [Sp, 5.5.3]), deducimos que  $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ , y concluimos que  $H^1(A; \mathbb{Z}) = 0$ .

(III.1.3.2) A continuación, consideramos una curva analítica compacta  $C \subset A$  y la unión  $C'$  de las componentes irreducibles de  $A$  no contenidas en  $C$ ; es claro que  $\mathcal{F} := C \cap C'$  es un conjunto finito. Como  $C$  y  $C'$  son conjuntos analíticos ambos son localmente contráctiles; por tanto, para cada  $x \in \mathcal{F}$  existe un entorno  $V^x$  de  $x$  en  $A$  tal que

- $V^x \cap C$  y  $V^x \cap C'$  tienen a  $\{x\}$  como retracto de deformación,
- $V^x \cap C \cap C' = \{x\}$ , y
- $V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset$  si  $x_1, x_2 \in \mathcal{F}$  y  $x_1 \neq x_2$ .

Un cálculo sencillo muestra que

$$V := C \cup \bigcup_{x \in \mathcal{F}} (V^x \cap C') \quad \text{y} \quad W := C' \cup \bigcup_{x \in \mathcal{F}} (V^x \cap C)$$

son subconjuntos abiertos de  $A$  tales que  $V \cup W = A$ ,  $V \cap W = \bigcup_{x \in \mathcal{F}} (V^x \cap (C \cup C'))$  y  $C$  y  $C'$  son, respectivamente, retractos de deformación de  $V$  y  $W$ ; además,  $\mathcal{F}$  es un retracto de deformación de  $V \cap W$ . Usando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris para cohomología (véase [Sp, 5.4.9]) tenemos

$$0 = H^1(A; \mathbb{Z}) = H^1(V \cup W; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(V; \mathbb{Z}) \oplus H^1(W; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(V \cap W; \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathcal{F}; \mathbb{Z}).$$

Puesto que  $\mathcal{F}$  es un conjunto finito,  $H^1(\mathcal{F}; \mathbb{Z}) = 0$ , luego  $H^1(C; \mathbb{Z}) \cong H^1(V; \mathbb{Z}) = 0$ . En particular, eligiendo  $C := C_1 \cup C_2$  se deduce que  $H^1(C_1 \cup C_2; \mathbb{Z}) = 0$ .

(III.1.3.3) Finalmente, comprobamos que si  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  entonces esta intersección es un único punto. Sean  $V_1$  y  $V_2$  dos subconjuntos abiertos de  $C_1 \cup C_2$  tales que

- $C_i \subset V_i$  es un retracto de deformación de  $V_i$  para  $i = 1, 2$ ,
- $V_1 \cup V_2 = C_1 \cup C_2$  y  $C_1 \cap C_2$  es un retracto de deformación de  $V_1 \cap V_2$ .

Para construir  $V_1$  y  $V_2$  procedemos de modo similar a III.1.3.2. Usando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris para cohomología reducida (véase [Sp, 5.4.8 & p.240]) aplicada a los subconjuntos abiertos  $V_1$  y  $V_2$  de  $C_1 \cup C_2$ , cuya intersección no es vacía, deducimos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}^0(C_1; \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}^0(C_2; \mathbb{Z}) &\cong \tilde{H}^0(V_1; \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}^0(V_2; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^0(V_1 \cap V_2; \mathbb{Z}) \\ &= \tilde{H}^0(C_1 \cap C_2; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}^1(V_1 \cup V_2; \mathbb{Z}) = \tilde{H}^1(C_1 \cup C_2; \mathbb{Z}) = H^1(C_1 \cup C_2; \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

Tanto  $C_1$  como  $C_2$  son conexas, esto es,  $\tilde{H}^0(C_i; \mathbb{Z}) = 0$ , luego  $\tilde{H}^0(C_1 \cap C_2; \mathbb{Z}) = 0$ . Por tanto el conjunto finito  $C_1 \cap C_2$  es conexo, luego se reduce a un punto.  $\square$

**Ejemplo III.1.4** Sean  $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^2$  un conjunto finito y  $U := \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{F}$  su complementario. Entonces,  $H_1(U, \mathbb{Z}) = H_2(U, \mathbb{Z}) = 0$ .

En primer lugar, por el Teorema de Hurewicz,  $H_1(U, \mathbb{Z})$  es el abelianizado de  $\pi_1(U) = 0$ ; por tanto,  $H_1(U, \mathbb{Z}) = 0$ . Para calcular  $H_2(U, \mathbb{Z})$ , podemos suponer, usando un homeomorfismo  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , que  $\mathcal{F} = \{p_1, \dots, p_r\}$ , donde  $p_k := (2k - 1, 0) \equiv (2k - 1, 0, 0, 0)$ .

Nótese que  $D_r := \bigcup_{i=1}^r \mathbb{S}_{p_i}^3$ , donde  $\mathbb{S}_{p_i}^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x - p_i\| = 1\}$ , es un retracto de deformación de  $U \equiv \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{F}$ . En particular,  $H_2(D_1; \mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{S}_{p_1}^3; \mathbb{Z}) = 0$ , y observamos que

$$\mathbb{S}_{p_i}^3 \cap \mathbb{S}_{p_j}^3 = \begin{cases} \{p_{ij} := \frac{p_i + p_j}{2}\} & \text{si } |i - j| = 1, \\ \emptyset & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Supongamos, por inducción, que  $H_2(D_{r-1}; \mathbb{Z}) = 0$ . Empleando la sucesión exacta de homología de Mayer-Vietoris (véase [Sp, §4.6]), tenemos

$$\begin{aligned} 0 = H_2(D_{r-1}, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\mathbb{S}_{p_r}^3; \mathbb{Z}) &\rightarrow H_2(D_r; \mathbb{Z}) = H_2(U; \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H_1(D_{r-1} \cap \mathbb{S}_{p_r}^3, \mathbb{Z}) = H_1(\{p_{r-1,r}\}; \mathbb{Z}) = 0, \end{aligned}$$

lo que implica que  $H_2(U; \mathbb{Z}) = 0$ , como queríamos.

**Observación III.1.5** A la vista del Ejemplo III.1.4, el Lema III.1.3 se aplica en el caso en que  $U$  es homeomorfo al complementario en  $\mathbb{C}^2$  de un subconjunto finito  $\mathcal{F}$ .

**III.1.e. Lema de selección de curvas racionales.** A continuación presentamos una versión del clásico Lema de selección de curvas, [M, §3. 3.1], adaptada a nuestras necesidades.

**Lema III.1.6** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación regular y  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ . Sean  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  un subconjunto semialgebraico denso de  $\mathcal{S}$  y  $p \in \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$ . Entonces existen:

- enteros  $r \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_n$  con  $k_1 := \min\{k_1, \dots, k_n\} < 0$ , y
- polinomios  $p_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $p_i(0) \neq 0$  para cada  $2 \leq i \leq n$ ,

tales que, tras reordenar las variables en caso necesario, para cada  $\beta \in (\mathfrak{t}^r)\mathbb{R}[\mathbf{t}]^n$  se tiene:

- (i)  $p = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ (\alpha + \beta))(t)$ , donde  $\alpha(\mathbf{t}) := (\pm \mathfrak{t}^{k_1}, \mathfrak{t}^{k_2} p_2(\mathbf{t}), \dots, \mathfrak{t}^{k_n} p_n(\mathbf{t}))$ , y
- (ii)  $(f \circ (\alpha + \beta))(]0, \varepsilon[) \subset \mathcal{S}'$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

Para demostrar este resultado necesitamos primero el siguiente lema:

**Lema III.1.7** Sean  $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] := \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \setminus \{0\}$  y  $g \in \mathbb{R}((\mathfrak{t}))^n$ . Entonces, para cada  $s \geq 1$  existe  $r \geq 1$  tal que si  $h \in (\mathfrak{t}^r)\mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]^n$  se cumple que  $f(g) - f(g + h) \in (\mathfrak{t}^s)\mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$ .

*Demostración.* Escribimos  $g := \frac{g'}{\mathfrak{t}^k}$ , donde  $k \geq 0$  y  $g' \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]^n$ . Sean  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$  indeterminadas y consideremos el polinomio

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{z}q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

donde  $q \in \mathbb{R}[x, y, z]$  es un polinomio. Denotamos  $d := \deg(q)$  y elegimos  $r := s + kd$  y observamos que si  $h \in (\mathfrak{t}^r)\mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]^n$  podemos escribir  $h = \mathfrak{t}^r h'$ , donde  $h' \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$  y

$$f(g+h) - f(g) = f(g + \mathfrak{t}^r h') - f(g) = \mathfrak{t}^r q(g, h', \mathfrak{t}^r) = \mathfrak{t}^r q\left(\frac{g'}{\mathfrak{t}^k}, h', \mathfrak{t}^r\right).$$

Así, el orden de la serie  $f(g+h) - f(g)$  es mayor o igual que  $r - kd = s$ , como queríamos probar.  $\square$

*Demostración del Lema III.1.6.* Podemos suponer que  $\mathcal{S}'$  es abierto en  $\mathcal{S}$ . En efecto, como  $\mathcal{S}'$  es denso en  $\mathcal{S}$ , que tiene dimensión pura, digamos  $d$ , por ser imagen de  $\mathbb{R}^n$  por una aplicación regular (véase más adelante la Observación III.6.4 (i)), deducimos que  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$  es un conjunto semialgebraico de dimensión  $\leq d - 1$ . Al ser  $\dim(\text{Cl}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}')) = \dim(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}')$ , la diferencia  $\mathcal{S}'' := \mathcal{S} \setminus \text{Cl}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}') \subset \mathcal{S}'$  es densa y abierta en  $\mathcal{S}$ . Por tanto, cambiando en caso necesario  $\mathcal{S}'$  por  $\mathcal{S}''$  podemos suponer que  $\mathcal{S}'$  es abierto en  $\mathcal{S}$ .

Como el conjunto  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}') = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S})$  es semialgebraico y  $p \in \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}') \setminus \mathcal{S}$ , por el Lema de selección de curvas Nash ([BCR, 8.1.13]) existe un camino Nash  $\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  tal que  $\gamma(]0, 1[) \subset \mathcal{S}'$  y  $\gamma(0) = p$ . Sean  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  y  $\{t_k\}_{k \geq 1} \subset ]0, 1[$  dos sucesiones que convergen respectivamente en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  y  $[0, 1]$ , de modo que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{t_k\} = 0$  y  $f(x_k) = \gamma(t_k)$  para todo  $k \geq 1$ . Sea  $q \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  el límite de  $\{x_k\}_{k \geq 1}$ . Teniendo en cuenta que  $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^n)$  y  $p = \gamma(0) \in \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$ , deducimos que  $q \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n = \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ .

Por otro lado,  $\dim(f^{-1}(\gamma(]0, 1[))) \geq \dim(\gamma(]0, 1[)) = 1$ . Además

$$q \in \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}(f^{-1}(\gamma(]0, 1[))) \setminus (f^{-1}(\gamma(]0, 1[))),$$

y por el Lema de selección de curvas Nash existe un camino Nash  $\lambda : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  que satisface  $\lambda(]0, 1[) \subset f^{-1}(\gamma(]0, 1[))$  y  $\lambda(0) = q$ . Así, reparametrizando  $\gamma$  en caso necesario, podemos suponer que  $f \circ \lambda = \gamma$ . Denotamos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$  las componentes de  $\lambda$  y  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$  las de  $\gamma$ . Entonces,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (1 : \lambda(t)) = q$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (1 : \gamma(t)) = p$  y

$$f \circ \lambda = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right) = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}, \dots, \frac{\gamma_m}{\gamma_0}\right) = \gamma.$$

Como  $q \in \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ , tras reordenar las variables  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , y denotando  $\omega(\cdot)$  el operador orden de una serie, podemos suponer que

$$\omega(\lambda_1/\lambda_0) = \min\{\omega(\lambda_i/\lambda_0) : 1 \leq i \leq n\} < 0,$$

Es más, tras un cambio de variable del tipo  $\mathfrak{t} \mapsto \mathfrak{t}u(\mathfrak{t})$ , donde  $u \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$  es una unidad, esto es,  $u(0) \neq 0$ , podemos suponer que  $\lambda_1/\lambda_0 = \pm \mathfrak{t}^{k_1}$  con  $k_1 < 0$  y escribimos  $\lambda_i/\lambda_0 = \mathfrak{t}^{k'_i} \rho_i$ , para cada índice  $2 \leq i \leq n$ , donde  $\rho_i \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$  y  $k'_i \in \mathbb{Z}$ . Por simplicidad tomamos  $k'_i := 0$  y  $\rho_i := 0$  si  $\lambda_i/\lambda_0 = 0$  y  $\rho_i \in \mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]$ ,  $k_i := k'_i \in \mathbb{Z}$  tales que  $\rho_i(0) \neq 0$  si  $\lambda_i/\lambda_0 \neq 0$ .

Sea  $f := (f_1/f_0, \dots, f_m/f_0)$ , donde cada  $f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] := \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  y  $f_0(x) \neq 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por el Lema III.1.7 existe  $r_0 \geq 1$  tal que si  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathfrak{t}^{r_0})\mathbb{R}[[\mathfrak{t}]]^n$  se

cumple

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (1 : \lambda(t) + \mu(t)) = q \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( 1 : \frac{f_1}{f_0}(\lambda(t) + \mu(t)) : \cdots : \frac{f_m}{f_0}(\lambda(t) + \mu(t)) \right) = p.$$

Es más, al ser  $\mathcal{S}'$  abierto en  $\mathcal{S}$ , también  $f^{-1}(\mathcal{S}')$  es un subconjunto semialgebraico abierto de  $\mathbb{R}^n$ , que contiene a  $\lambda(]0, 1[) \subset f^{-1}(\gamma(]0, 1[)) \subset f^{-1}(\mathcal{S}')$ . Existen por tanto polinomios  $g_1, \dots, g_q \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  tales que

$$\lambda(]0, \varepsilon_1[) \subset \{g_1 > 0, \dots, g_q > 0\} \subset f^{-1}(\mathcal{S}')$$

para  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente pequeño. Así, podemos escribir

$$g_i \circ \lambda(\mathbf{t}) = a_i \mathbf{t}^{\ell_i} + \cdots, \quad \text{donde } a_i > 0 \text{ y } \ell_i \in \mathbb{Z}.$$

Empleando una vez más el Lema III.1.7, existe  $r \geq \max\{r_0, k'_2, \dots, k'_n\} + 1$  tal que, para cada  $\eta \in (\mathbf{t}^r)\mathbb{R}[[\mathbf{t}]]$  se cumple

$$(g_i \circ (\lambda + \eta)) - (g_i \circ \lambda) \in (\mathbf{t}^s)\mathbb{R}[[\mathbf{t}]], \quad \text{donde } s := \max\{0, \ell_1, \dots, \ell_q\} + 1.$$

Por tanto, cada  $g_i \circ (\lambda + \eta)(t) > 0$  para  $t > 0$  suficientemente pequeño y  $\eta \in (\mathbf{t}^r)\mathbb{R}[[\mathbf{t}]]$ . Ahora, si elegimos  $\mu := (0, \mu_2, \dots, \mu_n) \in (\mathbf{t}^r)\mathbb{R}[[\mathbf{t}]]^n$  de modo que

$$\mathbf{t}^{-k'_i}(\lambda_i/\lambda_0 + \mu_i) = \rho_i + \mathbf{t}^{-k'_i}\mu_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}] \setminus \{0\}$$

conseguimos nuestro objetivo. En efecto,  $\lambda_i/\lambda_0 \neq 0$  y por tanto  $k'_i = k_i$ , por lo que definimos  $\mathbf{p}_i(\mathbf{t}) := \rho_i + \mathbf{t}^{-k'_i}\mu_i$ ; si por el contrario  $\lambda_i/\lambda_0 = 0$ , entonces escribimos  $\rho_i + \mathbf{t}^{-k'_i}\mu_i = \mathbf{t}^{k_i}\mathbf{p}_i(\mathbf{t})$  con  $k_i \geq 0$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  y  $\mathbf{p}_i(0) \neq 0$ . Los enteros  $r, k_i$  y los polinomios  $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  satisfacen las condiciones del enunciado.  $\square$

## III.2. Imágenes polinómicas y regulares de dimensión 1

En esta esta sección se caracterizan, en términos geométricos, los conjuntos semialgebraicos 1-dimensionales  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  cuyo invariante  $p(\mathcal{S})$  y/o  $r(\mathcal{S})$  es finito. Demostramos que, en ambos casos, si el invariante implicado es finito, entonces es  $\leq 2$ , y determinamos en qué condiciones su valor es 1. Denotamos  $\mathcal{S}_{(k)}$  el conjunto de puntos del semialgebraico  $\mathcal{S}$  cuya dimensión local es  $k$ . Por supuesto, sólo una cantidad finita de estos  $\mathcal{S}_{(k)}$  es no vacía y, como consecuencia de [BCR, 2.3.6], todos ellos son semialgebraicos.

Una *curva racional compleja* es la imagen de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  por una aplicación birracional (y por tanto regular), mientras que una *curva racional real* es una curva algebraica proyectiva real irreducible  $C$  tal que  $C_{(1)}$  es la imagen de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  por una aplicación birracional (y por tanto regular). Recordamos que a las imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}$  las hemos llamado, traduciendo la expresión “parametric semiline” introducida por Z. Jelonek, *semilíneas paramétricas*; por analogía, a las imágenes regulares de  $\mathbb{R}$  las llamaremos *semilíneas regulares*.

Iniciamos nuestra discusión con el caso  $m = 1$ , esto es, cuando  $\mathcal{S}$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ .



**Lema III.2.1** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Entonces,

- (i)  $p(I) < +\infty$  si y sólo si  $I$  no es acotado. En tal caso  $p(I) \leq 2$ , y  $p(I) = 2$  si y sólo si  $I \subsetneq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto.
- (ii)  $r(I) \leq 2$ , y  $r(I) = 2$  si y sólo si  $I \subsetneq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto.

*Demostración.* (i) Observamos que toda aplicación polinómica no constante

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sum_{j=0}^d a_j t^j$$

se extiende a una aplicación polinómica

$$F : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1, (x_0 : x_1) \mapsto \left( x_0^d : \sum_{j=0}^d a_j x_0^{d-j} x_1^j \right)$$

que cumple  $F(p_\infty) = p_\infty$ , donde  $p_\infty = (0 : 1)$ . La aplicación  $F$  es propia pues es continua y la recta proyectiva  $\mathbb{RP}^1$  es compacta. Por tanto, también  $f = F|_{\mathbb{R}} = F|_{F^{-1}(\mathbb{R})}$  es propia, luego es una aplicación cerrada. En consecuencia  $f(\mathbb{R})$  es un subconjunto semialgebraico no acotado y cerrado en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  o  $f(\mathbb{R})$  es un intervalo propio cerrado y no acotado. De aquí que, si  $I \subsetneq \mathbb{R}$  es abierto, entonces  $p(I) \geq 2$ . Más aún, si  $p(I) = n < +\infty$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación polinómica con  $g(\mathbb{R}^n) = I$ , elegimos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $g(x_0) \neq g(0)$ . El intervalo  $I$  contiene a la imagen de la aplicación polinómica no constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(tx_0)$ , luego  $I$  no es acotado.

Para terminar la prueba de este apartado basta demostrar que el intervalo  $[0, +\infty[$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}$  y que  $]0, +\infty[$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ . Pero para ver esto es suficiente considerar las aplicaciones polinómicas

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2 \quad \text{y} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (xy - 1)^2 + x^2.$$

(ii) Para la segunda parte de esta afirmación observamos que, por el Lema III.1.1, toda aplicación regular  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se extiende a una aplicación regular  $F : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ . Por tanto, la imagen de  $F$  es  $\mathbb{RP}^1$  o un intervalo propio cerrado  $J$  de  $\mathbb{RP}^1$ . Si  $F(p_\infty) = p_\infty$ , entonces  $f(\mathbb{R}) := I = J \setminus \{p_\infty\}$  es un intervalo cerrado no acotado de  $\mathbb{R}$ . Por otra parte, si  $F(p_\infty) = c \in \mathbb{R}$  se sigue que  $J = [a, b]$  es un intervalo cerrado acotado de  $\mathbb{R}$ , e  $I = J$  si  $F^{-1}(c)$  no es un único punto, mientras que  $I = J \setminus \{c\}$  si  $F^{-1}(c)$  es un único punto. De aquí que, al ser  $I$  conexo, debe ser un intervalo cerrado  $[a, b]$  o uno de los intervalos acotados semiabiertos  $[a, b[$ ,  $]a, b]$ . Esto implica que si el intervalo  $I \subsetneq \mathbb{R}$  es abierto entonces  $r(I) \geq 2$ .

Por último, y teniendo en cuenta el apartado (i), es suficiente observar que los intervalos  $[0, 1]$  y  $]0, 1]$  son las imágenes de las aplicaciones regulares

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1+t^2},$$

respectivamente, y que el intervalo  $]0, 1[$  es la imagen de la aplicación regular

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{(xy - 1)^2 + x^2}{1 + (xy - 1)^2 + x^2}.$$

Las comprobaciones de estas últimas afirmaciones es inmediata.  $\square$

Para determinar los subconjuntos semialgebraicos 1-dimensionales  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ , donde  $m \geq 2$ , tales que  $p(\mathcal{S})$  y/o  $r(\mathcal{S})$  son finitos, necesitamos antes algunos resultados previos.

**Lema III.2.2** *Sea  $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación racional no constante cuya imagen denotamos  $\mathcal{S}$ . Entonces:*

- (i) *Existe una aplicación regular  $\sigma$ -invariante  $F : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  tal que  $F|_{\mathbb{R}} = f$  y  $F(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ .*
- (ii) *El conjunto  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva algebraica racional compleja y existen una aplicación sobreyectiva, regular, birrational y  $\sigma$ -invariante  $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  y una aplicación regular, sobreyectiva y  $\sigma$ -invariante  $\tilde{F} : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  tales que  $F = \pi \circ \tilde{F}$  y  $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$ .*
- (iii) *Si  $f$  es polinómica, entonces  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})$  es un único punto.*

*Demostración.* (i) Quitando denominadores y homogeneizando adecuadamente  $f$  se extiende a una aplicación racional  $\sigma$ -invariante

$$F := (F_0 : F_1 : \dots : F_m) : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m,$$

donde cada polinomio  $F_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$  es homogéneo y  $\deg(F_i) = \deg(F_j)$  para cada par de índices  $0 \leq i < j \leq m$ . Esta extensión es, por el Lema III.1.1, regular y, por el principio de identidad, única. Además,  $F(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ , que está contenido en  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , contiene, por [Mu, 2.31], un subconjunto abierto no vacío en la topología de Zariski de  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ ; por tanto, como  $F$  es propia y  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es irreducible, concluimos que  $F(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  (véase [Mu, 2.33]).

(ii) Sea  $K \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$  la normalización de  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  que es, por [Sh1, 5.3], una curva proyectiva irreducible no singular birrationalmente equivalente a  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , vía una aplicación regular sobreyectiva  $\pi : K \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ . Como  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es  $\sigma$ -invariante podemos suponer que también  $K$  y  $\pi$  lo son. La composición  $\pi^{-1} \circ F : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \dashrightarrow K$  es una aplicación racional  $\sigma$ -invariante que, por el Lema III.1.1, se extiende a una aplicación regular sobreyectiva  $\sigma$ -invariante  $\tilde{F} : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow K$  que cumple la igualdad  $F = \pi \circ \tilde{F}$ . Deducimos que  $K$  es una curva algebraica proyectiva no singular de género aritmético  $g_a(K) = 0$  ya que, por [Mu, 7.6, 7.20],

$$0 = g_a(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) \geq g_a(K) \geq 0.$$

Por tanto  $K$  es una curva racional no singular (véase [Mu, 7.17]), luego podemos suponer que  $K = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Para concluir observamos que, por la unicidad de la normalización,  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \pi|_{\mathbb{R}\mathbb{P}^1})$  es la normalización de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  y  $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$ .

(iii) Si  $f$  es polinómica,  $\mathcal{S}$  es no acotado, luego  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$  es no vacío. Por otra parte, en la construcción de la extensión  $F$  de  $f$  podemos tomar  $F_0 = x_0^d$  para cierto  $d \geq 1$ , así que  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{C}) = \{F((0 : 1))\}$  es un único punto.  $\square$

**Lema III.2.3** *Sea  $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación racional no constante cuya imagen tiene dimensión 1. Entonces,*

- (i) *Existen  $g \in \mathbb{R}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  y una aplicación racional  $h : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $f = h \circ g$ .*
- (ii) *Si  $f$  es una aplicación polinómica, podemos elegir  $g$  y  $h$  de modo que también sean polinómicas.*

*Demostración.* (i) Sea  $\mathbb{F} := \mathbb{R}(f_1, \dots, f_m)$  el menor subcuerpo de  $\mathbb{R}(\mathbf{x}) := \mathbb{R}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  que contiene a  $\mathbb{R}$  y a  $f_1, \dots, f_m$ . Debemos tener que  $\text{tr.deg}(\mathbb{F}|\mathbb{R}) = \dim(\text{Im } f) = 1$ , luego al menos una de las funciones racionales  $f_i$ 's no es constante. Se deduce entonces de [N, §13] y [Sch, §3. Thm. 4], que existe  $g \in \mathbb{R}(\mathbf{x})$  tal que  $\mathbb{F} = \mathbb{R}(g)$ . Como  $f_i \in \mathbb{F} = \mathbb{R}(g)$ , podemos escribir cada  $f_i = \frac{p_i(g)}{q_i(g)}$  para ciertos polinomios coprimos  $p_i, q_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ . En consecuencia, la aplicación racional  $h := (\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}) : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^m$  cumple  $f = h \circ g$ .

(ii) Supongamos que  $f$  es una aplicación polinómica. Por [N, §13] y [Sch, §3. Thm. 4], podemos elegir  $g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ . Por el Lema de Bezout,  $1 = p_i a_i + q_i b_i$  para ciertos  $a_i, b_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ . Sustituyendo la variable  $\mathbf{t}$  por  $g$  obtenemos la identidad polinómica

$$1 = p_i(g)a_i(g) + q_i(g)b_i(g) = q_i(g)f_i a_i(g) + q_i(g)b_i(g) = q_i(g)(f_i a_i(g) + b_i(g)),$$

luego  $q_i(g) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Por ello los cocientes  $h_i := \frac{p_i(\mathbf{t})}{q_i(g)}$  son polinomios.  $\square$

**Ejemplo III.2.4** Los conjuntos  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  son imágenes regulares de  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  es imagen de  $\mathbb{S}^1$  mediante la proyección canónica  $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , es suficiente demostrar que  $\mathbb{S}^1$  es imagen regular de  $\mathbb{R}$ . Para comprobar esto basta considerar, por ejemplo, la aplicación regular

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)^2}((t^2 - 1)^2 - 4t^2, 4t(t^2 - 1)).$$

Esta aplicación resulta de componer la inversa de la proyección estereográfica  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  desde  $(1, 0)$  con la aplicación *doblar* definida por

$$g : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, z = x + \sqrt{-1}y \equiv (x, y) \mapsto z^2 \equiv (x^2 - y^2, 2xy).$$

**Corolario III.2.5** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico de dimensión pura 1 tal que  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva racional. Entonces  $\mathcal{S}$  es la unión de un número finito de semilíneas regulares.*

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  la normalización real de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ . Si se da la igualdad  $\mathcal{S} = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , entonces  $\mathcal{S}$  es, por el Ejemplo III.2.4, imagen de  $\mathbb{R}$  por una aplicación regular, y hemos concluido. Por otra parte, si  $\mathcal{S} \neq \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  denotamos  $p_\infty$  el punto de infinito de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  y podemos suponer que  $\phi(p_\infty) \in \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$ . En consecuencia,  $\phi^{-1}(\mathcal{S})$  es un conjunto semialgebraico de  $\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \{p_\infty\}$ , esto es,  $\phi^{-1}(\mathcal{S})$  es una unión finita  $\bigcup_{i=1}^s \{p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^s I_j$  de puntos e intervalos. Esto implica, al ser  $\mathcal{S}$  de dimensión pura, que  $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^s \phi(I_j)$ .

Si  $I_j$  no es abierto se deduce del Lema III.2.1 que  $\phi(I_j)$  es una semilínea regular. Por otra parte, si  $I_j := ]a_j, b_j[$  es un intervalo abierto con  $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$ , escribimos  $I_j = ]a_j, c] \cup [c, b_j[$  y, por el Lema III.2.1,  $\phi_j(I_j)$  es unión de dos semilíneas regulares, lo que termina la demostración.  $\square$

El siguiente resultado es una caracterización geométrica de los conjuntos semialgebraicos unidimensionales que son imagen de una aplicación polinómica (véase [FG2, 2.1-2]).

**Teorema III.2.6** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 1-dimensional. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{S}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \geq 1$ .
- (ii)  $\mathcal{S}$  es irreducible, no acotado y  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva racional  $\sigma$ -invariante tal que  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{C})$  se reduce a un único punto.

Si este es el caso,  $p(\mathcal{S}) \leq 2$ .

*Demostración.* (i)  $\implies$  (ii) Sabemos que  $\mathcal{S}$  no es acotado y, por la Proposición I.1.4,  $\mathcal{S}$  es irreducible. Como  $p(\mathcal{S}) < +\infty$ , existe una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ . Por el Lema III.2.3 existen aplicaciones polinómicas  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen  $f = h \circ g$ . Ahora, por el Lema III.2.2,  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva racional  $\sigma$ -invariante y  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{C})$  es un único punto.

(ii)  $\implies$  (i) Sea  $\pi := (\pi_0, \dots, \pi_m) : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  una normalización  $\sigma$ -invariante de  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , lo que implica que  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \pi|_{\mathbb{R}\mathbb{P}^1})$  es una normalización de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ . Puesto que  $\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{C})$  es un único punto, podemos suponer que  $\pi_0 = \tau_0^d$  para algún  $d \geq 1$ . En particular,

$$\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \mathbf{H}_\infty(\mathbb{C}) = \{\pi((0 : 1))\}.$$

En consecuencia,  $\pi|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \{p_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación polinómica, y como  $\mathcal{S}$  es irreducible y 1-dimensional se tiene  $\mathcal{S} \subset \pi(\mathbb{R}) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)}) \setminus \mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})$ . Más aún, como  $(\mathbb{R}, \pi|_{\mathbb{R}})$  es la normalización de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  existe, por la Proposición I.1.5, un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $\pi(I) = \mathcal{S}$ ; de hecho, al ser  $\mathcal{S}$  no acotado, tampoco  $I$  es acotado. Se desprende del Lema III.2.1 que  $I$ , y por tanto  $\mathcal{S}$ , es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Corolario III.2.7** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 1-dimensional que es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \geq 1$ . Entonces  $p(\mathcal{S}) = 1$  si y sólo si  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathbb{R}^m$ .*

*Demostración.* Si  $p(\mathcal{S}) = 1$  existe una aplicación polinómica no constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f(\mathbb{R}) = \mathcal{S}$ . Como  $f$  es propia deducimos que  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathbb{R}^m$ .

Recíprocamente, como hemos visto en la prueba de (ii)  $\implies$  (i) en el Teorema III.2.6, existe una aplicación polinómica  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $(\mathbb{R}, \pi)$  es la normalización real de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ . Por tanto existe, por la Proposición I.1.5, un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $\pi(I) = \mathcal{S}$ . Como  $\mathcal{S}$  es no acotado y cerrado en  $\mathbb{R}^m$ , podemos elegir este intervalo de modo que también sea no acotado y cerrado en  $\mathbb{R}$ . En virtud del Lema III.2.1 esto implica que el intervalo  $I$ , y en consecuencia  $\mathcal{S}$ , es imagen polinómica de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Para terminar esta sección presentamos los resultados análogos a los anteriores para imágenes regulares de espacios euclídeos. Comenzamos caracterizando en términos geométricos las imágenes regulares 1-dimensionales de espacios euclídeos.

**Teorema III.2.8** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 1-dimensional. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{S}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \geq 1$ .
- (ii)  $\mathcal{S}$  es irreducible y  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva racional.

Si este es el caso,  $r(\mathcal{S}) \leq 2$ .

*Demostración.* (i)  $\implies$  (ii) En primer lugar, la irreducibilidad de  $\mathcal{S}$  se desprende de la Proposición I.1.4. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación regular tal que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ . Por el Lema III.2.3 existen una función racional  $g \in \mathbb{R}(\mathbf{x}) := \mathbb{R}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  y una aplicación racional  $h := (\frac{h_1}{h_0}, \dots, \frac{h_m}{h_0}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $f = h \circ g$ , y se deduce del Lema III.2.2 que  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una curva racional.

(ii)  $\implies$  (i) Recordemos que si  $\phi : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es una normalización real de  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , la imagen  $\phi(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$ . Por tanto, si  $\mathcal{S} = \text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$ , se deduce del Ejemplo III.2.4 que  $\mathcal{S}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}$ . Por otra parte, si  $\mathcal{S} \neq \text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$  podemos suponer que  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)}) \setminus \mathcal{S}$  contiene a la imagen  $\phi(p_\infty)$  del punto de infinito  $p_\infty$  de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ . Se deduce de la Proposición I.1.5 que  $\phi(I) = \mathcal{S}$  para cierto intervalo  $I \subset \mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \{p_\infty\}$ , y por el Lema III.2.1 concluimos que  $I$ , y también  $\mathcal{S}$ , es imagen regular de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Corolario III.2.9** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 1-dimensional que es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \geq 1$ . Entonces  $r(\mathcal{S}) = 1$  si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes:*

- (i)  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .

- (ii)  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{p\}$  es un único punto y el menor germen analítico que contiene al germen  $\mathcal{S}_p$  es irreducible.

*Demostración.* Supongamos que  $r(\mathcal{S}) = 1$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación regular tal que  $f(\mathbb{R}) = \mathcal{S}$ . Por el Lema III.2.2,  $f$  se extiende a una aplicación regular sobreyectiva  $F : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{C}P^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$ , y existen una aplicación birracional regular sobreyectiva  $\sigma$ -invariante  $\pi : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{C}P^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  con  $\pi(\mathbb{R}P^1) = \text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}^{\text{zar}}(\mathcal{S}_{(1)})$  y una aplicación regular sobreyectiva  $\sigma$ -invariante  $\tilde{F} : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  tales que  $F = \pi \circ \tilde{F}$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\tilde{F}(p_\infty) = p_\infty$ . Por tanto, la restricción  $\tilde{f} := \tilde{F}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regular tal que  $f = \pi|_{\mathbb{R}} \circ \tilde{f}$  y, por el Lema III.2.1,  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  o  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, \infty[$  o  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, 1]$  o  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, 1[$ .

Si  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, 1]$ , entonces  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ . En los demás casos, denotemos  $q = p_\infty$  si  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  o  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, \infty[$  y  $q = 1$  si  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = [0, 1[$ . Observamos que  $\tilde{f}(\mathbb{R}) \cup \{q\}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}P^1$ , luego compacto. Por tanto, su imagen  $\mathcal{S} \cup \{\pi(q)\}$  mediante  $\pi$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}P^m$  y  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \{\pi(q)\}$ .

De este modo, en todos los casos la diferencia  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  es vacía o sólo contiene un punto. Además, si  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{p := \pi(q)\}$  se tiene que  $\pi^{-1}(p) \cap (\tilde{f}(\mathbb{R}) \cup \{q\}) = \{q\}$ . Por tanto la clausura analítica del germen  $\mathcal{S}_p$  es irreducible, porque  $\mathcal{S}_p$  es la imagen por  $\pi$  del germen  $(\tilde{f}(\mathbb{R}))_q$ .

Recíprocamente, supongamos que se cumple alguna de las condiciones (i) y (ii) del enunciado. Por el Teorema III.2.8 y la Proposición I.1.5 existen una aplicación birracional regular  $\phi : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}^{\text{zar}} \mathcal{S}$  y un subconjunto conexo  $I \subset \mathbb{R}P^1$  tales que  $\phi(I) = \mathcal{S}$ ; de hecho  $I$  es la única componente 1-dimensional de  $\phi^{-1}(\mathcal{S})$ , y distinguimos los dos casos posibles:

**Caso 1.**  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ . Entonces,  $\mathcal{S}$  es cerrado en  $\mathbb{R}P^m$  y por tanto,  $I = \mathbb{R}P^1$  o  $I$  es un intervalo compacto contenido en  $\mathbb{R}P^1$ , que podemos suponer que es  $I = [0, 1]$ .

**Caso 2.**  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{p\}$  es un punto y la clausura analítica del germen  $\mathcal{S}_p$  es irreducible. Esto último implica que  $I = \text{Cl}_{\mathbb{R}P^1}(I) \setminus \{a\}$  para algún  $a \in \mathbb{R}P^1$  tal que  $\phi(a) = p$ ; de este modo, podemos suponer que  $I = [0, 1[$  o  $I = \mathbb{R}$ .

En ambos casos deducimos, como consecuencia del Lema III.2.1 y el Ejemplo III.2.4, que  $\mathcal{S}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Corolario III.2.10** *No existe ningún conjunto semialgebraico unidimensional  $\mathcal{S}$  tal que  $p(\mathcal{S}) = 2$  y  $r(\mathcal{S}) = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico tal que  $\dim(\mathcal{S}) = 1$  y  $p(\mathcal{S}) = 2$ . Por el Teorema III.2.6 el conjunto  $\mathcal{S}$  no es acotado y, por el Corolario III.2.7,  $\mathcal{S}$  no es cerrado en  $\mathbb{R}^m$ . Por tanto, la diferencia  $\text{Cl}_{\mathbb{R}P^m}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  consta de al menos dos puntos; uno en  $H_\infty(\mathbb{R})$  porque  $\mathcal{S}$  no es acotado, y otro en  $\mathbb{R}^m$  porque  $\mathcal{S}$  no es cerrado. Esto implica, por el Corolario

III.2.9, que  $r(\mathcal{S}) = 2$ . □

**Ejemplos III.2.11** (1) El intervalo abierto  $\mathcal{S} := ]0, +\infty[ \subset \mathbb{R}$  cumple  $p(\mathcal{S}) = r(\mathcal{S}) = 2$ , como consecuencia del Lema III.2.1.

(2) Para la rama de hipérbola  $\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, y \geq 1\}$  se cumple que  $p(\mathcal{S}) = \infty$  y  $r(\mathcal{S}) = 2$ . En efecto, aunque la primera afirmación se comprueba directamente, también se sigue del Teorema III.2.6, pues  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^2}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) \cap \text{H}_\infty(\mathbb{C}) = \{(1 : 0), (0 : 1)\}$  consta de más de un punto. En cuanto a la segunda, este último hecho asegura, en virtud del Corolario III.2.9, que  $r(\mathcal{S}) > 1$ .

Para demostrar que  $r(\mathcal{S}) = 2$  basta aplicar el Teorema III.2.8 porque  $\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^2}^{\text{zar}}(\mathcal{S})$  es racional, al ser una cónica no singular, y la no singularidad, junto con el hecho de que  $\mathcal{S}$  es conexo implica, por la Proposición I.1.5, que  $\mathcal{S}$  es un conjunto semialgebraico irreducible.

Por supuesto, es fácil encontrar una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S}$ ; por ejemplo

$$f(x, y) = \left( (xy - 1)^2 + x^2, \frac{1}{(xy - 1)^2 + x^2} \right).$$

(3) Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(x^2 - 1), x > 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} := \text{Cl}(\mathcal{S}).$$

Por el Teorema III.2.8,  $r(\mathcal{S}) = r(\mathcal{T}) = \infty$ , ya que

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^2}^{\text{zar}}(\mathcal{S}) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^2}^{\text{zar}}(\mathcal{T}) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2 : x_2^2 x_0 = x_1(x_1^2 - x_0^2)\}$$

es una curva elíptica.

### III.3. Conexión del conjunto de puntos de infinito de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$

El propósito de esta sección es demostrar el siguiente teorema:

**Teorema III.3.1** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica no constante y denotemos  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,  $\mathcal{S}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}) \cap \text{H}_\infty(\mathbb{R})$  es no vacío y conexo.*

En realidad obtendremos una versión algo más general de este resultado, válido para una familia más amplia de aplicaciones regulares que denominamos aquí *aplicaciones cuasi-polinómicas*, y que introducimos a continuación.

**Definición III.3.2** Sea  $f := \left( \frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_m}{f_0} \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación regular, donde cada

$$f_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \quad \text{y} \quad 0 \leq \deg(f_0) < \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_m)\}.$$

Denotemos  $\mathbb{R}[\mathbf{x}] := \mathbb{R}[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n]$  y consideremos la aplicación racional

$$F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m, \quad x := (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto (F_0(x) : F_1(x) : \dots : F_m(x)),$$

donde, si hacemos  $d := \max\{\deg(f_i) : 0 \leq i \leq m\}$ , los polinomios  $F_i$  están definidos por

$$F_i(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) := \mathbf{x}_0^d f_i\left(\frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_0}, \dots, \frac{\mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_0}\right) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}].$$

Sea  $Y_{\mathbb{R}}$  el conjunto de indeterminación de  $F_{\mathbb{R}}$  y escribamos  $F_0 = \mathbf{x}_0^e F'_0$ , donde  $e \geq 1$  y  $F'_0 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  es un polinomio homogéneo no divisible entre  $\mathbf{x}_0$ . Decimos entonces que  $f$  es una *aplicación cuasi-polinómica* si  $Y_{\mathbb{R}} \cap \{F'_0 = 0\} = \emptyset$ .

**Observaciones III.3.3** (i) Toda aplicación polinómica es cuasi-polinómica; basta tomar  $f_0 = 1$ , pero el recíproco no se cumple. Basta tomar  $f_0 := b_0^2 + (b_1^2 \mathbf{x}_1^{2k} + \dots + b_n^2 \mathbf{x}_n^{2k})^\ell$ , donde  $k > 1$  y  $\ell \geq 1$  y  $b_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , caso en el que se satisface  $\{F'_0 = 0\} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n = \emptyset$ , y alguno de los  $f_i$  de grado mayor que  $2k\ell$ .

(ii) Si los polinomios  $f_0, f_1, \dots, f_m$  son primos entre sí, entonces

$$Y_{\mathbb{R}} \cap \{F'_0 = 0\} = \{F'_0 = 0, F_1 = 0, \dots, F_m = 0\} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^n.$$

(iii) Si  $n = 1$ , la condición  $0 \leq \deg(f_0) < \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_m)\}$  caracteriza las aplicaciones cuasi-polinómicas.

**Teorema III.3.4** Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  un conjunto semialgebraico que es la imagen de la aplicación cuasi-polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Entonces,  $\mathcal{S}_\infty$  es conexo.

*Demostración del Teorema III.3.4 para el caso  $n = 2$ .* Escribimos

$$f := \left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_m}{f_0}\right) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{donde cada } f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \text{ y } \mathcal{Z}_{\mathbb{R}^2}(f_0) = \emptyset.$$

Como  $\deg(f_0) < \max\{\deg(f_1), \dots, \deg(f_m)\}$ , la aplicación  $f$  es no constante. Realizaremos la demostración en varios pasos.

(III.3.4.1) Con las notaciones de III.3.2, la aplicación racional  $F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  se extiende de modo natural a una aplicación racional  $\sigma$ -invariante  $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ . Podemos suponer que los polinomios  $F_0, F_1, \dots, F_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  son primos entre sí, de modo que el conjunto de indeterminación de  $F_{\mathbb{K}}$  (donde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) es

$$Y_{\mathbb{K}} := \{x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^2 : x_0 F'_0(x) = 0, F_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

$Y_{\mathbb{K}}$  es un subconjunto finito (véase III.1.b) del conjunto  $\ell_\infty(\mathbb{K}) \cup \{x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^2 : F'_0(x) = 0\}$ . De hecho  $Y_{\mathbb{R}}$  está contenido en la recta de infinito  $\ell_\infty(\mathbb{R})$ , ya que  $f$  es regular.

(III.3.4.2) Sea  $(Z_1, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$  una resolución  $\sigma$ -invariante de  $F_{\mathbb{C}}$  y mantengamos la notación utilizada en III.1.b.1. Denotamos



- $X_1 := Z_1 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ , que es una superficie algebraica proyectiva real no singular,
- $\pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_{X_1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , que es la composición de una sucesión finita de explosiones e isomorfismos regulares, y cuya restricción

$$\pi_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} : X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$$

es un isomorfismo birregular, y

- $\widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{X_1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , que es una aplicación regular proyectiva real tal que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} = F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}$ .

Como  $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R})$  se satisface que  $\pi_{\mathbb{R}}(x) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \ell_{\infty}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$  para cualquier  $x \in X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$ . Por tanto, para todo  $x \in X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$  se tiene

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}(x) = (F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}})(x) = f(\pi_{\mathbb{R}}(x)) \in \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}\mathbb{P}^m \setminus H_{\infty}(\mathbb{R}),$$

de donde  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_{\infty}(\mathbb{R})) \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$ .

(III.3.4.3) La transformada estricta  $K_{\infty}$  de  $\ell_{\infty}(\mathbb{C})$  respecto de  $\pi_{\mathbb{C}}$  es, por III.1.c.4(ii), una curva algebraica compleja no singular y  $\pi_{\mathbb{C}}|_{K_{\infty}} : K_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  es un isomorfismo birregular  $\sigma$ -invariante; en consecuencia,  $K_{\infty}$  es una curva algebraica racional no singular  $\sigma$ -invariante. Por tanto  $C_{\infty} := K_{\infty} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  es una curva algebraica real racional no singular, que además es la transformada estricta de  $\ell_{\infty}(\mathbb{R})$  respecto de  $\pi_{\mathbb{R}}$ .

(III.3.4.4) Sea  $E := \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : F'_0(z) = 0\}$ , que es una curva algebraica proyectiva  $\sigma$ -invariante. Como  $f_0$  no se anula en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{x}_0$  no divide a  $F'_0$ , la intersección  $E \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  es un subconjunto  $\sigma$ -invariante y finito, tal vez vacío, de  $\ell_{\infty}(\mathbb{R})$ . Denotamos  $\widetilde{E}$  la transformada estricta de  $E$  respecto de  $\pi_{\mathbb{C}}$ , que es una curva algebraica proyectiva compleja  $\sigma$ -invariante y cumple la igualdad  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(E) = \widetilde{E} \cup \bigcup_{y \in E \cap Y_{\mathbb{C}}} \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ . Comprobamos a continuación:

$$(III.3.4.4.1) \quad \widetilde{E} \cap \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) = \emptyset \quad y \quad \widetilde{E} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k \subset C_{\infty}.$$

En efecto, sea  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  y comprobemos que  $\widetilde{E} \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) = \emptyset$ . En caso contrario, existiría  $x \in \widetilde{E} \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  de modo que  $y = \pi_{\mathbb{C}}(x) \in \pi_{\mathbb{C}}(\widetilde{E}) = E$ ; por tanto

$$y \in Y_{\mathbb{R}} \cap E \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2 = Y_{\mathbb{R}} \cap \{z \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2 : F'_0(z) = 0\} = \emptyset,$$

que es una contradicción. Puesto que  $\pi(\widetilde{E} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k) = E \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R})$ , tenemos

$$\widetilde{E} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \setminus \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y) \subset C_{\infty}.$$

□

(III.3.4.4.2) Además, teniendo en cuenta que:

$$F_{\mathbb{C}}(\ell_{\infty}(\mathbb{C}) \setminus Y_{\mathbb{C}}) \subset H_{\infty}(\mathbb{C}), \quad F_{\mathbb{C}}(E \setminus Y_{\mathbb{C}}) \subset H_{\infty}(\mathbb{C}), \quad \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} = F_{\mathbb{C}} \circ \pi_{\mathbb{C}}|_{Z_1 \setminus \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}})} \quad y$$

$\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \subset Z_1$  es una curva algebraica proyectiva compleja, deducimos que

$$\widetilde{E} \cup K_{\infty} \subset \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \subset \widetilde{E} \cup K_{\infty} \cup \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(Y_{\mathbb{C}}).$$

En consecuencia,  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  es una curva algebraica proyectiva compleja  $\sigma$ -invariante cuyas componentes irreducibles distintas de  $\widetilde{E}$  son, o bien puntos, o bien curvas algebraicas racionales complejas no singulares (véase III.1.b.1).

(III.3.4.5) El siguiente diagrama resume la situación, en los casos complejo y real, en la que nos encontramos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \widetilde{E} \cup K_{\infty} \\ \cap \\ \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \\ \cap \\ Z_1 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{C}}} \\ \cap \\ \mathbb{C}P^2 \\ \downarrow F_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}P^m \\ \cup \\ \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}) \end{array} & \begin{array}{c} \ell_{\infty}(\mathbb{C}) \cup E \supset Y_{\mathbb{C}} \\ \cap \\ \mathbb{C}P^2 \\ \downarrow F_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}P^m \\ \cup \\ \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}) \end{array} \\ \begin{array}{c} \widetilde{E} \cap \mathbb{R}P^k \\ \cap \\ \mathbf{C}_{\infty} \\ \cap \\ X_1 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}}} \\ \cap \\ \mathbb{R}P^2 \\ \downarrow F_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}P^m \\ \cup \\ \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}) \end{array} & \begin{array}{c} \ell_{\infty}(\mathbb{R}) \supset Y_{\mathbb{R}} \\ \cap \\ \mathbb{R}P^2 \\ \downarrow F_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}P^m \\ \cup \\ \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}) \end{array} \end{array}$$

(III.3.4.6) Demostramos a continuación que  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  es conexo. En consecuencia,  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  no contiene puntos aislados y sus componentes irreducibles distintas de  $\widetilde{E}$  son curvas algebraicas racionales no singulares.

En efecto, aplicando el Teorema de Factorización de Stein I.1.7 a la aplicación proyectiva regular (morfismo proyectivo)  $\widehat{F}_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow \mathbb{C}P^m$ , existen una variedad algebraica proyectiva  $V$  y morfismos proyectivos  $G_1 : Z_1 \rightarrow V$ ,  $G_2 : V \rightarrow \mathbb{C}P^m$  tales que:

- $G_1$  es sobreyectivo y sus fibras son conexas,
- $G_2$  es un morfismo finito, y
- $\widehat{F}_{\mathbb{C}} = G_2 \circ G_1$ .

Para nuestros propósitos, es suficiente comprobar que los conjuntos  $\mathbf{H} := G_2^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  y  $G_1^{-1}(\mathbf{H}) = \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  son conexos.

(III.3.4.6.1)  $G_2^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  es conexo.

Como  $G_2$  es finito, deducimos de [H1, II.5.17] que  $G_2$  es un morfismo afín; por tanto

$$G_2^{-1}(\mathbb{C}^m) = G_2^{-1}(\mathbb{C}P^m) \setminus G_2^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) = V \setminus G_2^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$$

es una variedad algebraica afín. Por consiguiente, al ser  $V$  una variedad algebraica proyectiva deducimos, usando [H2, 6.2, p.79], que  $\mathbf{H} = G_2^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) = V \setminus G_2^{-1}(\mathbb{C}^m)$  es conexo, puesto que es el complementario en  $V$  de una subvariedad algebraica afín abierta.

(III.3.4.6.2)  $G_1^{-1}(\mathbf{H})$  es conexo.

Supongamos que  $G_1^{-1}(\mathbf{H})$  es unión disjunta de dos subconjuntos cerrados  $A_1, A_2$ . Como la aplicación  $G_1$  es propia y sobreyectiva,  $G_1(A_1)$  y  $G_1(A_2)$  son subconjuntos cerrados de  $\mathbf{H}$  que satisfacen la igualdad  $\mathbf{H} = G_1(A_1) \cup G_1(A_2)$ . Si  $G_1(A_i) \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2$ , la intersección  $G_1(A_1) \cap G_1(A_2) \neq \emptyset$ , puesto que  $\mathbf{H}$  es conexo. Elegimos un punto  $x \in G_1(A_1) \cap G_1(A_2)$ ; se cumple entonces

$$G_1^{-1}(\{x\}) = (G_1^{-1}(\{x\}) \cap A_1) \sqcup (G_1^{-1}(\{x\}) \cap A_2),$$

por lo que la fibra  $G_1^{-1}(\{x\})$ , que es conexa, sería unión disjunta de dos subconjuntos cerrados no vacíos, y esto es una contradicción.  $\square$

(III.3.4.7) A continuación, aplicando el Teorema Principal de Zariski I.1.6 al morfismo birracional proyectivo  $\pi_{\mathbb{C}} : Z_1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ , tenemos que: *Para cada  $y \in Y_{\mathbb{C}}$  la fibra  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  es conexa.*

(III.3.4.8) En el siguiente paso utilizaremos el Lema III.1.3 varias veces. Para simplificar el procedimiento, señalamos a continuación algunos hechos. En primer lugar, por III.1.c.4, el conjunto  $A := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{C}) \cup Y_{\mathbb{C}})$  es una curva algebraica, cuyas componentes irreducibles son curvas algebraicas racionales no singulares. A continuación, observamos que  $U := Z_1 \setminus A = \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus Y_{\mathbb{C}})$  es un subconjunto denso de  $Z_1$  y birregularmente equivalente a  $\mathbb{C}^2 \setminus Y_{\mathbb{C}}$  (es decir, el complementario en  $\mathbb{C}^2$  de un subconjunto finito). Ahora, sean  $B_1, B_2 \subset A$  dos curvas algebraicas compactas y conexas sin componentes irreducibles comunes. Entonces, como consecuencia del Lema III.1.3, el Ejemplo III.1.4 y la Observación III.1.5, la intersección  $B_1 \cap B_2$  es vacía o consiste en un único punto.

(III.3.4.9) Consideremos un punto  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  y sea  $T$  una unión conexa  $\sigma$ -invariante de componentes irreducibles de  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$ . Sean  $K_1, \dots, K_r$  las componentes irreducibles  $\sigma$ -invariantes de  $T$  y definimos  $C_i := K_i \cap \mathbb{R}P^k$ , que es, por III.1.b.1(v), una curva algebraica real racional no singular para todo  $1 \leq i \leq r$ . Tenemos entonces:

- (i) La curva algebraica proyectiva  $\bigcup_{i=1}^r K_i$  es conexa.
- (ii) Si además suponemos que  $K_{\infty} \cap T \neq \emptyset$ , entonces la intersección

$$K_{\infty} \cap T = K_{\infty} \cap \bigcup_{i=1}^r K_i$$

es un único punto, que pertenece a  $X_1$ . En particular,  $K_{\infty} \cup \bigcup_{i=1}^r K_i$  es conexo.

- (iii) Podemos ordenar los índices  $1 \leq i \leq r$  de modo que tanto  $C_{\infty} \cap C_1 = K_{\infty} \cap T$  como  $C_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j$  se reducen a un único punto para  $2 \leq i \leq r$ . En particular, la curva algebraica proyectiva real  $C := \bigcup_{i=1}^r C_i$  es conexa y  $C_{\infty} \cap C \neq \emptyset$ .

Comenzamos demostrando III.3.4.9 (i). Si  $T = \bigcup_{i=1}^r K_i$  no hay nada que comprobar. En otro caso, denotamos por  $K_{r+1}, \dots, K_s$  las componentes irreducibles de  $T$  que no son

$\sigma$ -invariantes. Denotamos

$$t := \max \left\{ \#\mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \{1, \dots, r\}, \bigcup_{i \in \mathcal{F}} K_i \text{ es conexo} \right\}$$

y se trata de comprobar que  $t = r$ . Supongamos, por el contrario, que  $t < r$ ; podemos entonces suponer que  $K := \bigcup_{i=1}^t K_i$  es conexo. Así, como cada  $K_\ell$  es conexa, la intersección  $K \cap K_\ell = \emptyset$  para  $t < \ell \leq r$ . Como  $T$  es conexo y  $\sigma$ -invariante, pero  $K \cap \bigcup_{i=t+1}^r K_i = \emptyset$ , podemos suponer que  $K \cap K_{r+1} \neq \emptyset$  y  $\sigma(K_{r+1}) = K_{r+2}$ . Puesto que  $K$  es  $\sigma$ -invariante,  $K \cap K_{r+2} \neq \emptyset$  y por tanto  $K \cup K_{r+1} \cup K_{r+2}$  es conexo y  $\sigma$ -invariante. A continuación reordenamos los índices  $i = r+1 \leq i \leq s$  recurrentemente de modo que, para cada  $j \geq 1$ ,

- $K \cup \bigcup_{i=r+1}^{r+2j} K_i$  es conexo y  $\sigma$ -invariante y
- $\sigma(K_{r+2j-1}) = K_{r+2j}$ ,

hasta encontrar índices  $r < r+2j \leq s$  y  $t < \ell \leq r$  tales que  $K_\ell \cap (K \cup \bigcup_{i=r+1}^{r+2j} K_j) \neq \emptyset$ ; nótese que existen estos índices porque  $T = \bigcup_{i=1}^s K_i$  es conexo.

Tenemos así dos curvas algebraicas proyectivas conexas  $\sigma$ -invariantes  $K \cup \bigcup_{i=r+1}^{r+2j} K_j$  y  $K_\ell$  contenidas en  $A = \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{C}) \cup Y_{\mathbb{C}})$ , ya que  $y \in Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R}) \subset \ell_{\infty}(\mathbb{C})$ . Por tanto, la intersección  $K_\ell \cap (K \cup \bigcup_{i=r+1}^{r+2j} K_j)$ , que es  $\sigma$ -invariante y no vacía ha de ser, por III.3.4.8, un punto  $p_\ell \in X_1 = Z_1 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ . Puesto que  $K_i \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  para todo  $r+1 \leq i \leq s$  (véase III.1.b.1(v)), deducimos que  $p_\ell \in K_\ell \cap K$ , y esto es una contradicción, pues  $K \cap K_\ell = \emptyset$ . Por consiguiente  $r = t$  y  $\bigcup_{i=1}^r K_i$  es conexo.

A continuación demostramos III.3.4.9 (ii). Como  $K_\infty, T \subset \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{C})) \subset A$  son curvas algebraicas proyectivas conexas  $\sigma$ -invariantes, la intersección no vacía y  $\sigma$ -invariante  $K_\infty \cap T$  es, por III.3.4.8, un único punto  $p \in X_1$ . De aquí se deduce que  $p \in T \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k \subset \bigcup_{i=1}^r K_i$ , porque las componentes irreducibles no  $\sigma$ -invariantes de  $T$  están contenidas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  (véase III.1.b.1(v)). Por consiguiente  $K_\infty \cap T = K_\infty \cap \bigcup_{i=1}^r K_i = \{p\}$ .

Comprobemos III.3.4.9 (iii). En primer lugar, como  $p \in X_1 = Z_1 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  se tiene

$$C_\infty \cap \bigcup_{i=1}^r C_i = \left( K_\infty \cap \bigcup_{i=1}^r K_i \right) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \{p\} \neq \emptyset.$$

Por tanto, podemos suponer que  $C_\infty \cap C_1 \neq \emptyset$ , es decir,  $C_\infty \cap C_1 = \{p\} = K_\infty \cap T$ . Como  $\bigcup_{i=1}^r K_r$  es conexo afirmamos que: *Podemos ordenar los índices  $2 \leq i \leq r$  de tal modo que  $K_i$  interseca la unión  $\bigcup_{j=1}^{i-1} K_j$  para  $2 \leq i \leq r$ .*

En efecto, al ser  $K = \bigcup_{i=1}^r K_i$  conexo, la intersección  $K_1 \cap \bigcup_{i=2}^r K_i \neq \emptyset$ , luego podemos suponer que  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ . Teniendo en cuenta de nuevo que  $K$  es conexo, deducimos que la intersección de  $K_1 \cup K_2$  y  $\bigcup_{i=3}^r K_i \neq \emptyset$  no es vacía, y por tanto podemos suponer que  $K_3$  interseca a  $K_1 \cup K_2$ . Procediendo de esta manera se comprueba finalmente nuestra afirmación.

De este modo  $K_i$  y  $\bigcup_{j=1}^{i-1} K_j$  son curvas algebraicas proyectivas conexas  $\sigma$ -invariantes contenidas en  $A$  y la intersección  $K_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j$  es  $\sigma$ -invariante y no vacía, luego se deduce de III.3.4.8 que existe un punto  $q_i \in X_1$  tal que  $\{q_i\} = K_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j$ . Consecuentemente

$$q_i \in \mathbb{R}\mathbb{P}^k \cap K_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j = C_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j.$$

Así,  $C_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j \neq \emptyset$  para cada  $2 \leq i \leq r$ , y como cada  $C_i$  es una curva algebraica no singular birregularmente equivalente a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , deducimos que la curva proyectiva  $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$  es conexa.  $\square$

(III.3.4.10) A continuación demostramos lo siguiente: Si  $y \in Y_{\mathbb{R}}$ , la curva algebraica proyectiva  $\sigma$ -invariante  $T_y := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  es conexa y  $K_{\infty} \cap T_y$  es un único punto.

En efecto, como  $y \in Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R}) \subset \ell_{\infty}(\mathbb{C})$  y  $\pi_{\mathbb{C}}(K_{\infty}) = \ell_{\infty}(\mathbb{C})$ , se deduce que la intersección  $K_{\infty} \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Por otra parte, como consecuencia de III.3.4.4.2 y III.3.4.9(ii),

$$T_y \cap K_{\infty} = \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \cap K_{\infty} = \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap K_{\infty}$$

es un sólo punto. Además, por III.3.4.4.1,  $\widetilde{E} \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) = \emptyset$ . Observamos también que si  $y_1, y_2 \in Y_{\mathbb{C}}$  e  $y_1 \neq y_2$ , la intersección  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y_1) \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y_2) = \emptyset$ . Por consiguiente, si  $T_y$  no fuese conexo o  $K_{\infty} \cap T_y = \emptyset$ , entonces (véase III.3.4.4.2) tampoco sería conexo

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) = \widetilde{E} \cup K_{\infty} \cup \bigsqcup_{z \in Y_{\mathbb{C}}} (\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(z) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))),$$

lo que contradice III.3.4.6.

En consecuencia, si  $K_{1,y}, \dots, K_{r,y}$  son las componentes irreducibles  $\sigma$ -invariantes de  $T_y$ , se deduce de III.3.4.9 que la curva algebraica proyectiva  $\bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y}$  es conexa y la intersección  $K_{\infty} \cap T_y = K_{\infty} \cap \bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y}$  es un punto de  $X_1$ .  $\square$

(III.3.4.11) Comprobemos ahora que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))$  es conexo, lo que implica que también es conexo  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})))$ .

En primer lugar observamos que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})) = \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  pues  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}$  es  $\sigma$ -invariante. Además, por III.3.4.4.2,

$$\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) = \widetilde{E} \cup K_{\infty} \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{C}}} (\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))). \quad (\text{III.3.1})$$

Fijemos un punto  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  y hagamos  $T_y := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$ . Si  $T_y$  consta de un único punto entonces, por III.3.4.10, deducimos que  $T_y \subset K_{\infty}$ . En caso contrario, denotamos  $K_{1,y}, \dots, K_{r_y,y}$  las componentes irreducibles  $\sigma$ -invariantes de  $T_y$ ; usando que las

componentes irreducibles no  $\sigma$ -invariantes de  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  no intersecan  $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$  (véase III.1.b.1(v)), deducimos que  $T_y \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ .

Además, por III.1.b.1 (iv),  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \emptyset$  para todo  $y \in Y_{\mathbb{C}} \setminus Y_{\mathbb{R}}$ . Denotemos por  $Y'_{\mathbb{R}}$  el subconjunto de puntos de  $Y_{\mathbb{R}}$  tales que  $T_y$  no es un punto. Intersecando los dos miembros de la igualdad (III.3.1) con  $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$  deducimos, aplicando III.3.4.4.1, que

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})) = \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = \mathbf{C}_{\infty} \cup \bigcup_{y \in Y'_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k.$$

Recordemos ahora que, por III.3.4.10, la curva proyectiva  $\bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y}$  es conexa y la intersección  $K_{\infty} \cap \bigcup_{i=1}^{r_y} K_{i,y}$  es un punto  $\{p_y\}$  para cada  $y \in Y'_{\mathbb{R}}$ . Es más, por III.1.b.1(v) y III.3.4.2, las intersecciones  $C_{i,y} := K_{i,y} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  y  $C_{\infty} = K_{\infty} \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$  son curvas algebraicas racionales reales no singulares y, en particular, conexas. Con la nueva notación,

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})) = \mathbf{C}_{\infty} \cup \bigcup_{y \in Y'_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} C_{i,y}. \quad (\text{III.3.2})$$

Para completar la demostración de III.3.4.11 observamos que, por III.3.4.9 (iii) se tiene: *Cada curva proyectiva  $C_y := \bigcup_{i=1}^{r_y} C_{i,y}$  es conexa y cada intersección  $C_{\infty} \cap C_y \neq \emptyset$ .*  $\square$

(III.3.4.12) Para terminar sólo queda demostrar que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))) = \mathcal{S}_{\infty}$ . Como la aplicación  $\pi_{\mathbb{R}}$  es propia y  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  es compacto, también  $X_1$  es compacto, luego  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}$  es propia, y por tanto también lo es su restricción  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)} : \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Así, como  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  es denso en  $X_1$  y  $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^2) = F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ , deducimos que

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\text{Cl}_{\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))) = \text{Cl}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))) = \text{Cl}(f(\mathbb{R}^2)) = \text{Cl}(\mathcal{S});$$

por consiguiente,  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) = \text{Cl}(\mathcal{S})$ . Al ser  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}$  propia, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Cl}(\mathcal{S}) \sqcup \mathcal{S}_{\infty} &= \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S}) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\text{Cl}_{X_1}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m))) \\ &= \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X_1) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) \sqcup \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))) = \text{Cl}(\mathcal{S}) \sqcup \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))). \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{S}_{\infty} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})))$  es, por III.3.4.11, conexo, como queríamos ver.  $\square$

En este momento estamos ya preparados para demostrar los Teoremas III.3.1 y III.3.4 para  $n$  arbitrario. Presentamos primero una demostración del Teorema III.3.1 independientemente de la del Teorema III.3.4, ya que, aunque sólo resuelve el caso “particular” del Teorema III.3.1, resulta esclarecedora para comprender mejor la estrategia que emplearemos en la demostración de III.3.4, que es mucho más técnica.

*Demostración del Teorema III.3.1.* Para  $n = 1$ , el resultado se sigue del Teorema III.2.6. Para demostrar que  $\mathcal{S}_{\infty}$  es conexo es suficiente probar que dados dos puntos cualesquiera

$p, q \in \mathcal{S}_\infty$  existe un subconjunto conexo  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_\infty$  que contiene a  $p$  y a  $q$ . Por el Lema III.1.6 existen polinomios  $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  tales que  $\mathbf{p}_i(0) \neq 0, \mathbf{q}_i(0) \neq 0$  y enteros  $k_i, \ell_i$  tales que las parametrizaciones  $\alpha(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{k_1}\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{t}^{k_n}\mathbf{p}_n)$  y  $\beta(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{\ell_1}\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{t}^{\ell_n}\mathbf{q}_n)$  satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha)(t) = p \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \beta)(t) = q,$$

donde los límites “se consideran en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ ”. Es claro que al menos un par  $(k_i, \ell_j)$  está formado por números enteros negativos. Consideramos ahora los polinomios

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \mathbf{y}^{k_i} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i < 0 \\ \mathbf{x}^{k_i} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad v_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} (-\mathbf{y})^{|\ell_i|} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}) & \text{si } \ell_i < 0 \\ \mathbf{x}^{\ell_i} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}) & \text{si } \ell_i \geq 0 \end{cases}$$

y sea

$$h := \frac{(\mathbf{xy} + 1)}{2}(u_1, \dots, u_n) + \frac{(1 - \mathbf{xy})}{2}(v_1, \dots, v_n).$$

Consideramos la aplicación polinómica  $g = f \circ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  y observamos que

- $\mathcal{T}_0 := \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f) = \mathcal{S}$ , y así  $\mathcal{T}_{0,\infty} \subset \mathcal{S}_\infty$ .
- $p = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, 1/t)$  y  $q = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, -1/t)$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ .

Por consiguiente, como  $p, q \in \mathcal{T}_{0,\infty} \subset \mathcal{S}_\infty$  y  $\mathcal{T}_{0,\infty}$  es conexo por III.3.4 para  $n = 2$ , se concluye la demostración.  $\square$

Ahora demostramos el Teorema III.3.4 en su versión general.

*Demostración del Teorema III.3.4 para  $n$  arbitrario.* El caso  $n = 1$  se sigue del Corolario III.2.9 y el caso  $n = 2$  ya ha sido demostrado previamente. Por tanto, podemos asumir que  $n \geq 3$ . Escribimos  $f := (\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_m}{f_0})$ , donde cada  $f_j \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ ,  $f_0(x) \neq 0$  para cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\text{gcd}(f_0, f_1, \dots, f_m) = 1$ . Podemos suponer que  $\deg(f_1) \geq \deg(f_j)$  para cada  $1 \leq j \leq m$ , y mediante un cambio lineal de coordenadas en  $\mathbb{R}^m$  del tipo

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, y_2 + b_2 y_1, \dots, y_m + b_m y_1),$$

donde cada  $b_j \in \mathbb{R}$ , podemos suponer que

$$\deg(f_1) = \dots = \deg(f_m) =: d > \deg(f_0) = d - e \quad \text{para algún } e \geq 1.$$

Denotamos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)$  y definimos

$$F_j(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0^d f_j \left( \frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_0}, \dots, \frac{\mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_0} \right) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \quad \text{y} \quad F_0 = \mathbf{x}_0^e F'_0,$$

donde  $e \geq 1$  y  $F'_0 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  no es múltiplo de  $\mathbf{x}_0$ . Observamos que  $\mathbf{x}_0$  no divide a  $F_j$  para  $1 \leq j \leq m$ . Tras un cambio lineal de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  del tipo

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2 + a_2 x_1, \dots, x_n + a_n x_1),$$

donde cada  $a_i \in \mathbb{R}$ , podemos suponer además que el grado de cada  $f_j$  coincide con su grado respecto de la variable  $x_1$ .

Para demostrar que  $\mathcal{S}_\infty$  es conexo es suficiente demostrar que existe un punto  $p_0 \in \mathcal{S}_\infty$  tal que para cualquier otro punto  $q \in \mathcal{S}_\infty$  existe un subconjunto conexo  $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}_\infty$  que contiene tanto a  $p_0$  como a  $q$ . Elegimos

$$p_0 := \lim_{t \rightarrow 0^+} (F_0 : F_1 : \cdots : F_m)(1 : 1/t : 0 : \cdots : 0) \in H_\infty(\mathbb{R}),$$

donde el límite se toma en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , y sea  $q \in \mathcal{S}_\infty$ . Por el Lema III.1.6, existen

- enteros  $r, k_i$  con  $r \geq 1$  y  $k_{i_0} = \min\{k_1, \dots, k_n\} < 0$ , y
- polinomios  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $\mathbf{p}_i(0) \neq 0$  para  $1 \leq i \leq n$  y  $\mathbf{p}_{i_0} \equiv \pm 1$ ,

tales que para cada  $\beta \in (\mathbf{t}^r)\mathbb{R}[\mathbf{t}]^n$  se tiene  $q = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ (\alpha + \beta))(t)$ , donde

$$\alpha(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{k_1} \mathbf{p}_1, \mathbf{t}^{k_2} \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{t}^{k_n} \mathbf{p}_n).$$

Tras el cambio de variable  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}^6$  podemos asumir que  $k_{i_0} \leq -6$  y que  $k_{i_0}$  es par. A efectos de simplificar las expresiones, tras este cambio de variable conservaremos la notación inicial.

Escribimos  $\mathbf{p}_i(\mathbf{t}) := \sum_{j=0}^{d_i} a_{ij} \mathbf{t}^j$ , donde  $d_i := \deg(\mathbf{p}_i)$ , y consideramos la función regular

$$w_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \sum_{j+k_i < 0} a_{ij} \mathbf{u}_2^{|k_i+j|} + \sum_{j+k_i \geq 0} a_{ij} \frac{\mathbf{u}_1^{e_j} \mathbf{u}_2}{((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^{q_j}},$$

donde

$$j + k_i + 1 = 4q_j + e_j, \quad q_j \geq 0 \text{ y } 0 \leq e_j \leq 3 \text{ para cada } 0 \leq j \leq d_i \text{ con } j + k_i \geq 0.$$

Observamos que  $w_i(\mathbf{t}, 1/\mathbf{t}) = \mathbf{t}^{k_i} \mathbf{p}_i(\mathbf{t})$  para  $1 \leq i \leq n$  y  $w_{i_0} = \mathbf{p}_{i_0} \mathbf{u}_2^{|k_{i_0}|} = \pm \mathbf{u}_2^{|k_{i_0}|}$ .

Definimos  $\ell_0 := \max\{q_{d_i} : k_i + d_i = 4q_{d_i} + e_{d_i} - 1 \geq 0\}$  y observamos que para cada  $\ell \geq \ell_0$  se tiene  $((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_i \in \mathbb{R}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ . Además

$$\begin{aligned} \deg(((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_i) &\leq \max\{-k_i + 4\ell, 4\ell - 4q_j + e_j + 1 : k_i + j \geq 0\} \\ &\leq 4\ell + \max\{-k_i, 4\} \leq 4\ell + |k_{i_0}| \end{aligned}$$

y se cumple la igualdad  $\deg(((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_i) = 4\ell + |k_{i_0}|$  si y sólo si  $k_i = k_{i_0}$ . Más aún, como  $|k_{i_0}| \geq 6$ ,

$$\deg_{\mathbf{u}_1}(((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_i) \leq \begin{cases} 2(\ell - q_{d_i}) + 3 & \text{si } k_i + d_i \geq 0 \\ 2\ell & \text{si } k_i + d_i < 0 \end{cases} < 2\ell + 4 < 4\ell + |k_{i_0}|$$

para cada  $1 \leq i \leq n$ . Sea  $\ell := \max\{\ell_0, r\}$  y definamos

$$h_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) := \begin{cases} ((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell & \text{si } i = 0, \\ ((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \mathbf{p}_1(0) \mathbf{u}_1^{4\ell + |k_{i_0}|} & \text{si } i = 1, \\ ((\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^\ell w_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & \text{si } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$



Consideramos la aplicación regular  $h := (\frac{h_1}{h_0}, \dots, \frac{h_n}{h_0}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y observamos que

$$h(\mathbf{t}, 0) = (\mathbf{p}_1(0)\mathbf{t}^{4\ell+|k_{i_0}|}, 0, \dots, 0) \quad \text{y} \quad h(\mathbf{t}, 1/\mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t}) + (\mathbf{p}_1(0)\mathbf{t}^{8\ell+|k_{i_0}|}, 0, \dots, 0);$$

de aquí que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ h)(1/t, 0) = p_0$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ h)(t, 1/t) = q$ .

A continuación consideramos la aplicación regular  $g := f \circ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Denotamos  $g_i := F_i(h_0, h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$  para  $0 \leq i \leq m$  y observamos que  $g = (\frac{g_1}{g_0}, \dots, \frac{g_m}{g_0})$ , donde  $g_0(u) \neq 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^2$ . A continuación probamos que  $g$  es una aplicación cuasi-polinómica. En primer lugar, tenemos

- $\mathcal{T}_0 := \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f) = \mathcal{S}$  y así  $\mathcal{T}_{0,\infty} \subset \mathcal{S}_{\infty}$ .
- $p_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(1/t, 0)$  y  $q = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, 1/t)$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ .
- $g_0 = ((\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 - 1)^2 + \mathbf{u}_2^4)^{e\ell} F_0'(h_0, h_1, \dots, h_n)$ , ya que  $F_0 = \mathbf{x}_0^e F_0'$ .
- $\deg(g_0) = d(4\ell + |k_{i_0}|) - e|k_{i_0}| < d(4\ell + |k_{i_0}|) = \max\{\deg(g_1), \dots, \deg(g_m)\}$ .

En efecto, como

- $\deg(F_0') = \deg(f_0) = \deg_{\mathbf{x}_1}(f_0) = d - e$ ,
- $\deg(F_j) = \deg(f_j) = \deg_{\mathbf{x}_1}(f_j) = d$ ,
- $\deg(h_i) \leq 4\ell + |k_{i_0}|$ ,  $\deg(h_1) = 4\ell + |k_{i_0}|$  y
- $(h_0, h_1, \dots, h_n)(\mathbf{t}, 0) = (1, \mathbf{p}_1(0)\mathbf{t}^{4\ell+|k_{i_0}|}, 0, \dots, 0)$ ,

se cumple que

$$\deg(g_0) = 4e\ell + (d - e)(4\ell + |k_{i_0}|) = d(4\ell + |k_{i_0}|) - e|k_{i_0}| < d(4\ell + |k_{i_0}|) = \deg(g_j)$$

para cada  $1 \leq j \leq m$ .

Sea  $\mu := 4\ell + |k_{i_0}|$  y escribimos  $H_i := \mathbf{u}_0^\mu h_i(\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0}, \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_0})$ ,  $G_j := \mathbf{u}_0^{d\mu} g_j(\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0}, \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_0})$ , que son polinomios homogéneos del anillo  $\mathbb{R}[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ . Estos polinomios satisfacen

$$G_j = \mathbf{u}_0^{d\mu} F_j\left(h_0\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0}, \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_0}\right), h_1\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0}, \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_0}\right), \dots, h_n\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0}, \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_0}\right)\right) = F_j(H_0, H_1, \dots, H_n),$$

y  $G_0 = \mathbf{u}_0^{e|k_{i_0}|} G'_0$ , donde  $G'_0 := ((\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0^2)^2 + \mathbf{u}_2^4)^{e\ell} F_0'(H_0, H_1, \dots, H_n)$ . Si calculamos los grados de los polinomios involucrados comprobamos que  $\mathbf{u}_0$  no divide a  $G'_0$ . En efecto,

$$\deg(G'_0) = \deg(G_0) - e|k_{i_0}| = d\mu - e|k_{i_0}| = \deg(g_0),$$

y como el homogeneizado de  $g_0$  es

$$\frac{G_0}{\mathbf{u}_0^{\deg(G_0) - \deg(g_0)}} = \frac{G_0}{\mathbf{u}_0^{e|k_{i_0}|}} = G'_0$$

y el homogeneizado de un polinomio nunca es múltiplo de la variable que se emplea para homogeneizar, deducimos que  $G'_0$  no es múltiplo de  $\mathbf{u}_0$ .

En lo que sigue los lugares de ceros con los que trabajaremos serán considerados en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Para demostrar que  $g$  es cuasi-polinómica sólo queda comprobar que

$$\{G'_0 = 0, G_1 = 0, \dots, G_m = 0\} = \emptyset.$$

Como  $\{F'_0 = 0, F_1 = 0, \dots, F_n = 0\} = \emptyset$ , deducimos que

$$\begin{aligned} & \{G'_0 = 0, G_1 = 0, \dots, G_m = 0\} \\ &= \{H_0 = 0, \dots, H_n = 0\} \cup \{((u_1 u_2 - u_0^2)^2 + u_2^4)^{e\ell} = 0, G_1 = 0, \dots, G_m = 0\}. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} H_0(u_0, u_1, u_2) &= u_0^{|k_{i_0}|} ((u_1 u_2 - u_0^2)^2 + u_2^4)^\ell, \\ H_1(0, u_1, u_2) &= \begin{cases} p_1(0) u_1^{4\ell + |k_{i_0}|} & \text{si } k_{i_0} < k_1, \\ p_1(0) \left( (u_1^2 u_2^2 + u_2^4)^\ell u_2^{|k_{i_0}|} + u_1^{4\ell + |k_{i_0}|} \right) & \text{si } k_{i_0} = k_1, \end{cases} \\ H_i(0, 0, u_2) &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 2 \text{ y } k_{i_0} < k_i, \\ p_i(0) u_2^{4\ell + |k_{i_0}|} & \text{si } i \geq 2 \text{ y } k_{i_0} = k_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, de la igualdad  $H_0 = 0$  se deduce que  $u_0 = 0$ , mientras que de  $H_1(0, u_1, u_2) = 0$  deducimos  $u_1 = 0$  (hemos usado aquí que  $k_{i_0}$  es par). Además, si  $H_{i_0}(0, 0, u_2) = 0$  resulta que  $u_2 = 0$ . En consecuencia,  $\{H_0 = 0, \dots, H_n = 0\} = \emptyset$ .

Por otro lado, la igualdad  $((u_1 u_2 - u_0^2)^2 + u_2^4)^{e\ell} = 0$  implica  $u_0 = 0, u_2 = 0$ . De este modo, como  $G_1 = 0$ , concluimos que

$$0 = G_1(0, u_1, 0) = F_1(H_0(0, u_1, 0), H_1(0, u_1, 0), \dots, H_n(0, u_1, 0)) = F_1(0, u_1^\mu, 0, \dots, 0);$$

para la última igualdad recordamos que

$$\deg_{u_1}(((u_1 u_2 - 1)^2 + u_2^4)^\ell w_i) < 4\ell + |k_{i_0}| \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Como  $\deg(F_1) = \deg(f_1) = \deg_{x_1}(f_1) = \deg_{x_1}(F_1)$ , tenemos  $a = F_1(0, 1, 0, \dots, 0) \neq 0$ . Así,

$$0 = F_1(0, u_1^\mu, 0, \dots, 0) = a u_1^{d\mu}$$

implica  $u_1 = 0$ ; de este modo,  $\{((u_1 u_2 - u_0^2)^2 + u_2^4)^{e\ell} = 0, G_1 = 0, \dots, G_m = 0\} = \emptyset$  y concluimos que  $\{G'_0 = 0, G_1 = 0, \dots, G_m = 0\} = \emptyset$ . Por tanto,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación cuasi-polinómica.

Usando ahora III.3.4 para  $n = 2$  aplicado a  $g$ , concluimos que  $\mathcal{T}_{0,\infty} = (g(\mathbb{R}^2))_\infty$  es conexo, y como  $p_0, q \in \mathcal{T}_{0,\infty}$ , la demostración está completa.  $\square$

Es claro que el conjunto de puntos del infinito del conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  es un subconjunto semialgebraico del hiperplano de infinito  $H_\infty(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{RP}^m$ . En particular, esto sucede si  $\mathcal{S}$  es una imagen polinómica o regular de  $\mathbb{R}^n$ . En este punto, una pregunta que surge de manera natural es la siguiente:

**Problema III.3.5** Sea  $\mathcal{S}_0$  un subconjunto semialgebraico no vacío cerrado y conexo del hiperplano de infinito  $H_\infty(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{RP}^m$ . ¿Existen un entero positivo  $n$  y una aplicación polinómica (o cuasi-polinómica)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $f(\mathbb{R}^n)_\infty = \mathcal{S}_0$ ?

Para  $m = 2$  la respuesta es afirmativa (véase el Ejemplo III.3.6), pero desconocemos lo que sucede para  $m \geq 3$ .

**Ejemplo III.3.6** Para cada subconjunto semialgebraico no vacío cerrado y conexo  $\mathcal{T}$  contenido en la recta de infinito  $\ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$  existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\dim(f(\mathbb{R}^2)) = 2$  y  $(f(\mathbb{R}^2))_\infty = \mathcal{T}$ . En efecto, por la Proposición II.3.20 la afirmación es válida si  $\mathcal{T}$  no es un único punto, mientras que en este último caso podemos suponer que  $\mathcal{T} := \{(0 : 1 : 0)\}$  y un cálculo inmediato muestra que la imagen de la aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, y^2 + x^2)$  satisface  $(f(\mathbb{R}^2))_\infty = \{(0 : 1 : 0)\}$ .

**Observaciones III.3.7** (i) Aunque se puede intentar un estudio sistemático de los conjuntos semialgebraicos que son imagen de algún espacio  $\mathbb{R}^n$  por una aplicación cuasi-polinómica, y en particular compararlos con las imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$ , el comportamiento de las mismas respecto a la composición no es fácil de controlar, y esto complica el desarrollo de una teoría armoniosa para esta clase de aplicaciones. De hecho, su introducción en las páginas anteriores obedece a nuestro deseo de comprender mejor la obstrucción que surge en relación con la conexión del conjunto  $\mathcal{S}_\infty$ .

(ii) Como acabamos de señalar, mientras que la composición de aplicaciones regulares o polinómicas es, respectivamente, regular y polinómica, la composición de aplicaciones cuasi-polinómicas no es, en general, una aplicación del mismo tipo. Sirve como ejemplo la composición de las aplicaciones cuasi-polinómicas

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y^2) \quad \text{y} \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{x^3}{1+x^2+y^2}, \frac{y^3}{1+x^2+y^2} \right).$$

(iii) Obsérvese que la imagen de la aplicación cuasi-polinómica

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left( \frac{1}{1+t^2}, 1+t^2 \right)$$

es el conjunto  $\mathcal{S} := \{xy = 1, y \geq 1\}$ , luego  $r(\mathcal{S}) = 1$  mientras que, en virtud del Ejemplo III.2.11,  $p(\mathcal{S}) = \infty$ .

### III.4. Frontera exterior de una imagen polinómica de $\mathbb{R}^n$

El propósito de esta sección es demostrar el Teorema III.4.1. Antes de ello, necesitamos introducir y recordar algunos conceptos y notaciones. Decimos que un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  es *conexo por semilíneas paramétricas* si para cada par de puntos  $x, y \in \mathcal{S}$  existe una semilínea paramétrica contenida en  $\mathcal{S}$  que pasa por  $x$  e  $y$ ; con más generalidad, diremos que  $\mathcal{S}$  es *completamente conexo por semilíneas paramétricas* si se cumple la propiedad análoga para cualquier colección finita de puntos de  $\mathcal{S}$ . Por otro lado, recordamos que dado un entero  $k \geq 0$  denotamos por  $\mathcal{S}_{(k)}$  el conjunto formado por los puntos  $x \in \mathcal{S}$  en los que  $\mathcal{S}$  tiene dimensión local  $k$ .

**Teorema III.4.1** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica cuya imagen denotamos  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$ , y  $d := \dim(\mathcal{S})$ . Entonces,

- (i)  $\mathcal{S}$  es completamente conexo por semilíneas paramétricas.
- (ii) Para cada  $x \in \delta\mathcal{S}$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$ .
- (iii) Si  $d = n$ , existe un conjunto semialgebraico  $\mathcal{U}$  abierto y denso en  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$  tal que para cada  $x \in \mathcal{U}$  existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \text{Cl}^{\text{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \text{Cl}(\mathcal{S})$ .

Para demostrar este Teorema necesitamos un resultado preliminar acerca de la preimagen de la recta de infinito  $\ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$  respecto de una resolución del lugar de indeterminación de una aplicación cuasi-polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Diremos que una sucesión  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  es *totalmente no acotada en  $\mathbb{R}^n$*  si todas sus subsucesiones son no acotadas.

**Lema III.4.2** Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación cuasi-polinómica y  $(Z_1 \subset \mathbb{CP}^k, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$  una resolución  $\sigma$ -invariante de la extensión racional natural  $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^m$  de  $f$ . Denotamos

$$\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2), \quad X_1 := Z_1 \cap \mathbb{RP}^k, \quad \widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{X_1} \quad \text{y} \quad \pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_{X_1}.$$

Sean  $\mathcal{C}_\infty$  la transformada estricta respecto de  $\pi_{\mathbb{R}}$  de la recta de infinito  $\ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$  e  $Y_{\mathbb{R}}$  el lugar de indeterminación de la restricción  $F_{\mathbb{R}} := F_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{RP}^2}$ . Entonces,

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R})) = \mathcal{C}_\infty \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y), \quad (\text{III.4.1})$$

y para cada punto  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  se tiene  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y) = \mathcal{C}_{1,y} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{s_y,y}$ , donde:

- (i) Cada  $\mathcal{C}_{i,y}$  es una curva algebraica racional real no singular.
- (ii) La intersección  $\mathcal{C}_\infty \cap \mathcal{C}_{1,y}$  es un único punto  $\{b_{1,y}\}$ .
- (iii) La fibra  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$  es conexa y, de hecho,  $\mathcal{C}_{i,y} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{C}_{j,y}$  es un único punto  $\{b_{i,y}\}$  para todo  $2 \leq i \leq s_y$ .

- (iv) Si  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_{i,y}) \not\subset \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})$  y  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{C}_{i,y}}$  no es constante, entonces  $b_{i,y} \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))$ . Más aún, si  $\phi_{i,y} : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbf{C}_{i,y}$  es una aplicación birregular tal que  $\phi_{i,y}^{-1}(b_{i,y})$  es el punto de infinito de  $\mathbb{RP}^1$ , entonces  $h_{i,y} := \widehat{F}_{\mathbb{R}} \circ \phi_{i,y}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación polinómica cuya imagen está contenida en  $\text{Cl}(\mathcal{S})$ .
- (v) Si  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_{i,y}) \not\subset \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})$  y  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{C}_{i,y}}$  es constante, entonces  $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))$  y existe  $j \neq i$  para el que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{C}_{j,y}}$  es no constante y  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_{i,y}) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_{j,y})$ .
- (vi) Sea  $Y_{\mathbb{R}}^* := \{y \in Y_{\mathbb{R}} : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)) \not\subset \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})\}$  y para cada  $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$  consideramos

$$\mathcal{F}_y := \{1 \leq i \leq s_y : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_{i,y}) \not\subset \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}), \widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{C}_{i,y}} \text{ es no constante}\}.$$

Se cumple entonces

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}),$$

- (vii) La restricción  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  es una aplicación propia y para cada  $z \in \mathcal{D}$  existe una sucesión totalmente no acotada  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$  tal que la sucesión  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $z$ .

*Demostración.* La igualdad (III.4.1) se sigue de la inclusión  $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R})$  (véase III.3.4.1), y para cada  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  se satisfacen los apartados (i)-(iii), por III.3.4.7 y III.3.4.9 (iii).

A continuación demostramos (iv). Fijemos un punto  $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$ , y sea  $\mathbf{C}_i := \mathbf{C}_{i,y}$  una componente irreducible de  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$  tal que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\mathbf{C}_i) \not\subset \mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})$ . Sean  $\mathbf{K}_i$  la componente irreducible  $\sigma$ -invariante de  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  que cumple  $\mathbf{K}_i \cap \mathbb{RP}^k = \mathbf{C}_i$  y  $\Phi_i : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbf{K}_i$  una aplicación birregular  $\sigma$ -invariante. Entonces, la restricción  $\phi_i := \Phi_i|_{\mathbb{RP}^1} : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbf{C}_i$  es también birregular y la composición  $H_i := \widehat{F}_{\mathbb{C}} \circ \Phi = (H_{i0} : H_{i1} : \dots : H_{im}) : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^m$  es una aplicación regular  $\sigma$ -invariante. Los polinomios  $H_{ij} \in \mathbb{R}[\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1]$  son homogéneos del mismo grado  $d$ , y podemos asumir que  $\gcd(H_{i0}, \dots, H_{im}) = 1$ . Como  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{C}_i}$ , y por tanto  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{\mathbf{K}_i}$ , no es constante, el grado  $d$  es  $\geq 1$ ; de aquí que  $\mathbf{K}_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C})) = \Phi(\{H_{i0} = 0\}) \neq \emptyset$ .

Puesto que  $\mathbf{K}_i$  y  $\widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  son  $\sigma$ -invariantes y conexos (véase III.3.4.6) y están contenidos en  $A := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{C}) \cup Y_{\mathbb{C}})$ , la intersección  $\mathbf{K}_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{C}))$  es  $\sigma$ -invariante y no vacía y contiene, a la vista de III.3.4.8, un único punto  $p_i \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))$ . Así, tras un cambio de coordenadas afin  $\sigma$ -invariante, podemos suponer que  $H_{i0}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) := \mathbf{t}_0^d$  y que  $h_i := H_i|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una aplicación polinómica no constante. Se sigue de la demostración de III.3.4.12 que

$$\text{Im}(h_i) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X_1) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))) = \text{Cl}(\mathcal{S}). \quad (\text{III.4.2})$$

Comprobamos ahora que  $b_i \equiv b_{i,y} = p_i \in \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}))$ . Si  $i = 1$  el resultado es claro; por tanto, suponemos  $i \geq 2$ . Sean  $\mathbf{K}_j$  las componentes irreducibles de  $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y)$  que

satisfacen  $K_j \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k = C_j$  para  $1 \leq j \leq r-1$ . Por III.3.4.10 y las propiedades (i)-(iii), la curva algebraica proyectiva compleja

$$T_i := K_\infty \cup (\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{C}))) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j \subset \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{C})) \subset A$$

es conexa. En consecuencia, como también  $K_i \subset A$  es conexa, la intersección  $K_i \cap T_i$  es, por (iii), no vacía y contiene al punto  $\{b_i\}$ . Pero  $K_i \cap T_i$  es, por III.3.4.8, un único punto, luego  $K_i \cap T_i = \{b_i\}$ . Se tiene entonces

$$\{p_i\} = K_i \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{C})) = K_i \cap \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap \widehat{F}_{\mathbb{C}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{C})) \subset K_i \cap T_i = \{b_i\},$$

es decir,  $b_i = p_i$ .

Ahora comprobamos (v). Como  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{C_{i,y}}$  es constante y  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{i,y}) \not\subset H_\infty(\mathbb{R})$ , la intersección  $C_{i,y} \cap \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R})) = \emptyset$ . Además, por (iii) sabemos que existe un índice  $1 \leq j < i$  tal que la intersección  $C_{j,y} \cap C_{i,y} = \{b_{i,y}\}$ . Como  $b_{i,y} \notin \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))$  se tiene  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{j,y}) \not\subset H_\infty(\mathbb{R})$ . Si  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{C_{j,y}}$  no es constante hemos terminado, puesto que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{C_{i,y}} \equiv \widehat{F}_{\mathbb{R}}(b_{i,y})$ . En otro caso repetimos el procedimiento con  $C_{j,y}$  hasta que llegamos al índice que nos interesa. Este proceso debe terminar puesto que  $C_{1,y} \cap C_\infty \neq \emptyset$  y  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_\infty) \subset H_\infty(\mathbb{R})$ .

Pasamos a probar (vi). Para cada  $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$ , sea  $\mathcal{G}_y := \{1 \leq i \leq s_y : \widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{i,y}) \not\subset H_\infty(\mathbb{R})\}$ . Como consecuencia de los siguientes hechos:

- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^m)) = \text{Cl}(\mathcal{S})$  y  $\mathcal{S}_\infty = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R})))$ , vistos en III.3.4.12,
- $C_\infty \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))$ , y por tanto  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_\infty) \subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R})))$ ,
- $\mathcal{S} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ ,
- $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_\infty) \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y))$ ,

por la igualdad (III.4.1) en el enunciado, y de los apartados anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(X_1) \setminus (\widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))) \cup \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))) \\ &\subset \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_\infty(\mathbb{R}))) \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}))) \subset \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{G}_y} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\}) \\ &= \mathcal{D} = \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}^*} \bigcup_{i \in \mathcal{F}_y} h_{i,y}(\mathbb{R}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}), \end{aligned}$$

y por tanto (vi) queda demostrado.

Finalmente comprobamos (vii). En primer lugar, como  $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  es una aplicación propia también lo es su restricción

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D})} : X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(H_\infty(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$

Así, como la restricción  $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$ , para demostrar que la aplicación  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  es propia es suficiente ver que  $X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}))$ . En efecto, de la igualdad (III.3.2) y la definición de  $\mathcal{D}$ , se deduce que

$$\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))).$$

De esta igualdad resulta

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))) \\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup (\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})), \end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbf{H}_{\infty}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{D}) &= X_1 \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D}))) \\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})). \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada  $z \in \mathcal{D}$  existen  $y \in Y_{\mathbb{R}}^*$ ,  $i \in \mathcal{F}_y$  y  $u \in \mathbf{C}_{i,y} \setminus \{b_{i,y}\} \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$  tales que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$ . Al ser  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  denso en  $X_1$ , existe una sucesión  $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  que converge a  $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$ . Por tanto la sucesión  $\{x_k = \pi_{\mathbb{R}}(u_k)\}_k$  es totalmente no acotada y  $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$ ; concluimos que la sucesión  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $z$ , como queríamos ver.  $\square$

El resultado anterior proporciona una nueva demostración del Teorema I.3.9 (véase [FG2, 3.8]), que se trata de un caso particular del Teorema III.4.1.

**Corolario III.4.3** Sean  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 2-dimensional que es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$  y  $\delta\mathcal{S} = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$  su frontera exterior. Entonces existe una familia finita de semilíneas paramétricas  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$  tales que  $\delta\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$ .

**Observaciones III.4.4** En las hipótesis del Corolario anterior, y conservando la misma notación, observamos que:

(i) Si  $\dim(\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}) = 1$ , entonces  $\mathcal{L}_i \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ . En efecto, como  $\mathcal{L}_i$  es una semilínea paramétrica, su clausura de Zariski  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{L}_i)$  es irreducible y unidimensional. Pero  $\mathcal{L}_i \cap \delta\mathcal{S}$  tiene dimensión 1, luego  $\mathcal{L}_i \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{L}_i) \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ .

(ii) Si  $p \in \delta\mathcal{S}$  es un punto aislado, entonces existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L} \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$  que contiene a  $p$ .  $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema III.4.1.

*Demostración del Teorema III.4.1.* Comenzamos probando (i). Sean  $\mathcal{F} := \{q_1, \dots, q_r\} \subset \mathcal{S}$  y  $\mathcal{G} := \{p_1, \dots, p_r\} \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos finitos tales que  $f(p_i) = q_i$  para cada índice  $1 \leq i \leq r$ . Comprobemos primero que existe una involución polinómica  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que transforma cada  $p_i$  en un punto de la forma  $(a_i, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

En efecto, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que las primeras coordenadas de los puntos  $p_i$  son distintas dos a dos, esto es, si  $p_i := (a_{1i}, \dots, a_{ni})$  entonces  $a_{1i} \neq a_{1j}$  si  $i \neq j$ . Por tanto, existen polinomios  $\gamma_j \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $\gamma_j(a_{1i}) = a_{ji}$  para cada  $2 \leq j \leq n$ , luego

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \gamma_2(x_1) - x_2, \dots, \gamma_n(x_1) - x_n)$$

es una involución polinómica de  $\mathbb{R}^n$  que satisface  $h(a_i, \mathbf{0}) = p_i$  para todo índice  $1 \leq i \leq r$ .

Consideramos la aplicación  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$  y observamos que la semilínea paramétrica  $\mathcal{L} := \text{Im}(f \circ h \circ \alpha)$  satisface  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ , lo que implica que  $\mathcal{S}$  es completamente conexo por semilíneas paramétricas.

Para demostrar (ii), fijemos un punto  $x \in \delta\mathcal{S}$ . Por el Lema III.1.6, existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros  $k_i$  con  $k_1 = \min\{k_1, \dots, k_n\} < 0$ , y
- polinomios  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $\mathbf{p}_i(0) \neq 0$  para  $2 \leq i \leq n$ ,

tales que  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha)(t)$ , donde  $\alpha(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}^{k_1}, \mathbf{t}^{k_2} \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{t}^{k_n} \mathbf{p}_n)$ . Escribimos

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \mathbf{y}^{|k_i|} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i < 0, \\ \mathbf{x}^{k_i} \mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i \geq 0, \end{cases}$$

para  $1 \leq i \leq n$ . Consideramos las aplicaciones polinómicas  $h := (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g := (g_1, \dots, g_m) = f \circ h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Como  $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2) \subset f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ , tenemos que  $x \notin \mathcal{S}_0$ . Por otra parte, si definimos  $\beta(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}, 1/\mathbf{t})$  se satisface que  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (g \circ \beta)(t)$ , luego  $x \in \text{Cl}(\mathcal{S}_0) \setminus \mathcal{S}_0 = \delta\mathcal{S}_0$ . Así, por el Corolario III.4.3, existe una semilínea paramétrica  $\mathcal{L} \subset \text{Cl}(\mathcal{S}_0) \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$  que contiene a  $x$ .

A continuación probamos (iii). Suponemos que  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)} \neq \emptyset$ , porque en caso contrario no hay nada que probar. Sean  $X := \mathfrak{G}_f$  el grafo de  $f$  y

$$\mathcal{D} := \pi_2(\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m}(X) \setminus X) \cap \mathbb{R}^m,$$

donde  $\pi_2 : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ ,  $(x, y) \rightarrow y$  es la proyección sobre el segundo factor. Como la restricción

$$\rho := \pi_2|_{\text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m}(X)} : \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m}(X) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$$

es propia y  $\rho^{-1}(\mathbf{H}_\infty(\mathbb{R})) \subset \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m}(X) \setminus X$ , también es propia la restricción

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}.$$



Además, para cada  $y \in \mathcal{D}$  existe una sucesión totalmente no acotada  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $y$ .

En virtud de [BCR, 2.8.13] la dimensión del conjunto semialgebraico  $\mathcal{D}$  es  $\leq n - 1$ , por lo que la dimensión de  $\mathcal{R} := \text{Cl}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \setminus (\mathcal{D} \cap \mathcal{S})$  es  $\leq n - 2$ . En particular,

$$\mathcal{T} := \delta\mathcal{S} \setminus \text{Cl}(\mathcal{R}) = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus (\mathcal{S} \cup \text{Cl}(\mathcal{R})) = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus (\text{Cl}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \cup \mathcal{S}) = \delta\mathcal{S} \setminus \text{Cl}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \quad (\text{III.4.3})$$

tiene dimensión  $n - 1$  y  $\delta\mathcal{S} \setminus \mathcal{T} \subset \text{Cl}(\mathcal{R})$  tiene dimensión  $\leq n - 2$ . Por tanto

$$\mathcal{U} := ((\delta\mathcal{S})_{(n-1)} \cap \mathcal{T}) \setminus \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S} \setminus (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) = (\delta\mathcal{S})_{(n-1)} \setminus (\text{Cl}(\mathcal{D} \cap \mathcal{S}) \cup \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S} \setminus (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}))$$

es un subconjunto semialgebraico abierto y denso de  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$ .

Tomamos  $x \in \mathcal{U}$ ; por el Lema III.1.6, existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros  $r, k_i$  con  $k_1 = \min\{k_1, \dots, k_n\} < 0$ , y
- polinomios  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $\mathbf{p}_i(0) \neq 0$  para  $2 \leq i \leq n$

tales que  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha)(t)$ , donde  $\alpha(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{k_1} + \mathbf{t}^r, \mathbf{t}^{k_2}\mathbf{p}_2(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{t}^{k_n}\mathbf{p}_n(\mathbf{t}))$ . Tras la sustitución  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}^2$  podemos suponer que  $k_1$  y  $r$  son pares. Escribimos  $h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y}^{|k_1|} + \mathbf{x}^r$  y para cada  $2 \leq i \leq n$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \mathbf{y}^{|k_i|}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i < 0, \\ \mathbf{x}^{k_i}\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i \geq 0. \end{cases}$$

Observamos que la aplicación  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  es propia, puesto que si  $\{z_k\}_k$  es una sucesión no acotada en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\{h_1(z_k)\}_k$  es una sucesión no acotada en  $\mathbb{R}$ , luego  $\{h(z_k)\}_k$  es una sucesión no acotada en  $\mathbb{R}^n$ . Es más,  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t, 1/t)$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Ahora escribimos  $g := f \circ h$ , cuya restricción  $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  es propia, porque tanto la restricción  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  como  $h$  lo son. Hagamos  $\mathcal{S}_0 := g(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}$ .

Por el Lema III.4.2 (vi-vii) sabemos que existe un número finito de semilíneas paramétricas  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$  tales que

$$\delta\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{D}_0 := \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S}_0) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup \delta\mathcal{S},$$

la restricción  $g : \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{D}_0) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}_0$  es propia y para cada  $z \in \mathcal{D}_0$  existe una sucesión totalmente no acotada  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\{g(x_k)\}_k$  converge a  $z$ . Al ser  $h$  propia,  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ ; por tanto,  $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ . Más aún, puesto que  $x \in \delta\mathcal{S}_0$  se deduce que existe un índice  $1 \leq i \leq r$  con  $x \in \mathcal{L}_i$ . Observamos también que

$$\mathcal{L}_i \subset (\mathcal{S} \cap \mathcal{D}_0) \cup (\delta\mathcal{S} \setminus (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cup (\mathcal{L}_i \cap (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}).$$

Así, si  $\dim(\mathcal{L}_i \cap (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) = 0$ , entonces

$$x \in \mathcal{L}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{S}) \cup \text{Cl}(\delta\mathcal{S} \setminus (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S} \cap \mathcal{D}) \cup \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S} \setminus (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}),$$

lo que contradice que  $x \in \mathcal{U}$ . Por tanto,  $\dim(\mathcal{L}_i \cap (\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) = 1$  y  $\mathcal{L}_i \subset \text{Cl}^{\text{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)})$ , como queríamos ver.  $\square$

**Proposición III.4.5** *Un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  conexo por semilíneas paramétricas es irreducible, de dimensión pura, y su imagen  $h(\mathcal{S})$  por cualquier función polinómica  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es no acotada o se reduce a un punto.*

*Demostración.* En efecto, supongamos primero que  $\mathcal{S}$  es reducible y sean  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r$  las componentes irreducibles de  $\mathcal{S}$  (véase el Teorema I.1.3). Para  $i = 1, 2$  sea  $x_i \in \mathcal{S}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{S}_j$  y sea  $\mathcal{L}$  una semilínea paramétrica tal que  $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ . Consideremos una parametrización polinómica  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $\mathcal{L}$ . Por [FG3, 2.4, 4.3] existe una función de Nash  $f \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$  tal que  $\mathcal{S}_1 := \{x \in \mathcal{S} : f(x) = 0\}$ . Sea  $\mathcal{C} := \alpha^{-1}(\bigcup_{i=2}^r \mathcal{S}_i) \subset \mathbb{R}$ , que es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}$ , que no interseca a  $\alpha^{-1}(x_1)$ . Entonces  $f \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función Nash que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}$ . Por el Principio de Identidad,  $f \circ \alpha$  es idénticamente cero, luego  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}_1$ , que es una contradicción.

Supongamos que  $\mathcal{S}$  no tiene dimensión pura y sea  $\mathcal{T} := \bigcup_{0 \leq k < d} \mathcal{S}_{(k)}$ , donde  $d := \dim \mathcal{S}$ . El conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}_{(d)}$  es cerrado en  $\mathcal{S}$  y la clausura de Zariski  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{T})$  tiene dimensión  $\leq d - 1$ . Sea  $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$  tal que  $\text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) = 0\}$  y elijamos puntos  $x_1 \in \mathcal{S} \setminus \text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{T})$  y  $x_2 \in \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ . Sea  $\mathcal{L}$  una semilínea paramétrica tal que  $x_1, x_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$  y sea  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una parametrización polinómica de  $\mathcal{L}$ . Consideramos el subconjunto cerrado  $\mathcal{C}' := \beta^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{S}_{(d)})$  de  $\mathbb{R}$ , que no interseca al conjunto  $\beta^{-1}(x_2)$ . Consecuentemente,  $g \circ \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función polinómica que se anula idénticamente sobre el subconjunto abierto no vacío  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}'$  de  $\mathbb{R}$ . Por el Principio de Identidad,  $g \circ \beta$  es idénticamente cero y así  $\mathcal{L} \subset \text{Cl}^{\text{zar}}(\mathcal{T})$ , que es una contradicción.

Finalmente, supongamos que existe una aplicación polinómica  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(\mathcal{S})$  es acotado y no se reduce a un punto. Sean  $q_1, q_2 \in h(\mathcal{S})$  con  $q_1 \neq q_2$  y sean  $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$  tales que  $h(p_i) = q_i$  para  $i = 1, 2$ . Tomamos ahora una semilínea paramétrica  $\mathcal{L}$  tal que  $p_1, p_2 \in \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$  y una parametrización polinómica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $\mathcal{L}$ . Observamos que  $h \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación polinómica con imagen acotada, y se deduce de III.2.1 que  $h \circ \gamma$  es constante. Esto es falso porque  $q_1, q_2 \in \text{Im}(h \circ \gamma)$ .  $\square$

Este es un punto adecuado para plantear algunas cuestiones cuya respuesta desconocemos en este momento.

**Problemas III.4.6** (i) Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 2-dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas, cuyo conjunto de puntos de infinito  $\mathcal{S}_\infty$  es conexo y tal que existe un número finito de semilíneas paramétricas contenidas en  $\text{Cl}(\mathcal{S})$  que recubren su frontera exterior  $\delta\mathcal{S}$ . ¿Existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  que satisfaga  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S}$ ?

(ii) Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico  $n$ -dimensional completamente conexo por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito  $\mathcal{S}_\infty$  es conexo y tal que existe un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{U}$  abierto y denso en  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$  tal que para cada  $x \in \mathcal{U}$  existe una semilínea paramétrica que pasa por  $x$  y está contenida en  $\text{Cl}^{\text{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \text{Cl}(\mathcal{S})$ . ¿Existe entonces una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ ?

**Observaciones III.4.7** (i) Existen conjuntos semialgebraicos  $\mathcal{S}$  completamente conexos por semilíneas paramétricas cuyo conjunto de puntos de infinito  $\mathcal{S}_\infty$  no es conexo, y viceversa. En efecto, si  $\mathcal{S}_1 := \{0 \leq x \leq 1\} \cup \{0 \leq y \leq x\} \subset \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\mathcal{S}_{1,\infty} = \{(0 : 0 : 1)\} \cup \{(0 : 1 : t), 0 \leq t \leq 1\},$$

que no es conexo. Sin embargo, utilizando interpolación y el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, se puede comprobar que  $\mathcal{S}_1$  es completamente conexo por semilíneas paramétricas. Por otra parte, el conjunto de puntos de infinito de la banda  $\mathcal{S}_2 := \mathbb{R} \times [0, 1]$  se reduce a un único punto, y por tanto es conexo, pero  $\mathcal{S}_2$  no es completamente conexo por semilíneas paramétricas porque su proyección sobre la coordenada segunda es acotada y distinta de un punto.

(ii) El conjunto semialgebraico  $\mathcal{S} := \{x^2 + y^2 > 1\} \subset \mathbb{R}^2$  es completamente conexo por semilíneas paramétricas y su conjunto de puntos del infinito es conexo; sin embargo su frontera exterior no puede ser recubierta con un conjunto finito de semilíneas paramétricas. Por tanto,  $\mathcal{S}$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ , aunque sí lo es de  $\mathbb{R}^3$  (véase [FG2, 4.2]).

(iii) Los resultados acerca de la frontera exterior de una imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  y su conjunto de puntos del infinito han sido obtenidos utilizando como herramienta fundamental la resolución del lugar de indeterminación de aplicaciones racionales complejas que son extensión de aplicaciones polinómicas definidas sobre  $\mathbb{R}^2$ . Tal vez se puedan obtener condiciones más restrictivas sobre la geometría de la frontera exterior y/o las características del conjunto de puntos de infinito de una imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 3$  empleando aplicaciones más generales.

### III.5. Conjunto de puntos de infinito de una imagen regular de $\mathbb{R}^n$

Hemos demostrado en la Sección III.3 que el conjunto de puntos de infinito de una imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  es conexo. De hecho hemos probado que esta propiedad es cierta para una clase de aplicaciones más amplia, que hemos denominado cuasi-polinómicas. En esta sección mostramos que dicho resultado no se satisface en el caso de las aplicaciones regulares, incluso cuando  $n = 1$ . Presentamos a continuación algunos ejemplos que ilustran este hecho en diversas situaciones, y ponen de manifiesto el mal comportamiento de las aplicaciones cuasi-polinómicas y que no hay “muchas”, aparte de las polinómicas.

**Ejemplos III.5.1** (i) Ya vimos en el Ejemplo III.2.11 que la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto ((xy - 1)^2 + x^2, 1/((xy - 1)^2 + x^2)),$$

es el conjunto semialgebraico 1-dimensional  $\mathcal{S} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, uv = 1\}$ . Observamos que  $\mathcal{S}_\infty = \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$  no es conexo.

(ii) La imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{x^2}{1 + y^2}, \frac{y^2}{1 + x^2} \right),$$

es el conjunto semialgebraico 2-dimensional

$$\mathcal{S} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, uv < 1\}.$$

Nótese que  $\mathcal{S}_\infty = \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$  no es conexo. De hecho, esta aplicación se escribe como  $f = (f_1/f_0, f_2/f_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde

$$f_0(x, y) = (1 + x^2)(1 + y^2), \quad f_1(x, y) = x^2(1 + x^2) \quad y \quad f_2(x, y) = y^2(1 + y^2),$$

y en particular  $\deg(f_0) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\}$ .

(iii) Consideremos los polinomios

$$g_1(x, y) = (1 + x^4)y^6, \quad h_1(x, y) = (1 + y^4)^2, \quad g_2(x, y) = (1 + y^4)x^4 \quad y \quad h_2(x, y) = (1 + x^4)^3,$$

y denotemos  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2)$  la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{g_1(x, y)}{h_1(x, y)}, \frac{g_2(x, y)}{h_2(x, y)} \right).$$

El conjunto de puntos de infinito de  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{S}_\infty = \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ , que no es conexo. Si definimos  $f_1 = g_1h_2$ ,  $f_2 = g_2h_1$  y  $f_0 = h_1h_2$  se tiene  $\deg(f_0) = 20$ , mientras que  $\deg(f_1) = 22$  y  $\deg(f_2) = 16$ . Por tanto,  $\deg(f_0) < \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\}$  y

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{f_1(x, y)}{f_0(x, y)}, \frac{f_2(x, y)}{f_0(x, y)} \right).$$

Sin embargo, el lugar de indeterminación de la aplicación racional

$$F := (F_0 : F_1 : F_2) : \mathbb{RP}^2 \dashrightarrow \mathbb{RP}^2$$

que extiende  $f$  es

$$Y_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}_\infty \subset \{F'_0 = 0\}, \quad \text{donde } F'_0 := (x_0^4 + x_1^4)^3(x_0^4 + x_2^4)^2 \quad y \quad F_0 = x_0^2 F'_0.$$

En efecto, observamos primero que

$$f(\mathbb{R}^2) \subset \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\},$$

ya que para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se cumple que

$$\left(\frac{g_1^2(x, y)}{h_1^2(x, y)}\right) \left(\frac{g_2(x, y)}{h_2(x, y)}\right) = \left(\frac{y^4}{1+y^4}\right)^3 \left(\frac{x^4}{1+x^4}\right) \leq 1.$$

Esto demuestra que  $\mathcal{S}_\infty \subset \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ , y para probar la otra inclusión basta encontrar dos parametrizaciones racionales

$$\alpha : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ y } \beta : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tales que } \lim_{t \rightarrow 0^+} \|\alpha(t)\|^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|\beta(t)\|^2 = +\infty$$

que satisfagan las igualdades

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g_1}{h_1}(\alpha(t)) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g_2}{h_2}(\alpha(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g_1}{h_1}(\beta(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g_2}{h_2}(\beta(t)) = +\infty.$$

A tal efecto podemos elegir  $\alpha(t) = (1/t, 1)$  y  $\beta(t) = (1, 1/t)$ .

Es natural plantearse la siguiente cuestión.

**Problema III.5.2** Dado un conjunto semialgebraico cerrado  $\mathcal{R} \subset \ell_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^2$ , ¿existe una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $(f(\mathbb{R}^2))_\infty = \mathcal{R}$ ?

Si  $\mathcal{R}$  es conexo vimos en el Ejemplo III.3.6 que de hecho  $f$  se puede elegir polinómica. A continuación probamos que la respuesta a la cuestión III.5.2 es también afirmativa si  $\mathcal{R}$  es un conjunto finito.

**Lema III.5.3** Sean  $H_i := c_i x - d_i y \in (\mathbb{R}^2)^*$  formas lineales, donde  $1 \leq i \leq r$ , de modo que cada  $c_i d_i \neq 0$ , y las rectas  $\ell_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_i(x, y) = 0\}$  son distintas dos a dos. Denotemos  $p_i := (0 : d_i^2 : c_i^2) \in \mathbb{RP}^2$ . Entonces la imagen de la aplicación regular

$$h := (h_1, h_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left( \frac{x^2}{1 + \prod_{i=1}^r H_i(x, y)^2}, \frac{y^2}{1 + \prod_{i=1}^r H_i(x, y)^2} \right)$$

es un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  tal que  $\mathcal{S}_\infty = \{p_1, \dots, p_r\}$ .

*Demostración.* Demostramos en primer lugar que  $\mathcal{S}_\infty \subset \{p_1, \dots, p_r\}$ . En efecto, un cálculo directo muestra que el jacobiano  $\text{Jac}(h)$  de  $h$  no es idénticamente nulo, luego  $\mathcal{S} := h(\mathbb{R}^2)$  tiene dimensión 2. Además, se deduce de la Proposición I.1.4 que  $\mathcal{S}$  tiene dimensión pura. Por tanto  $\text{Cl}_{\mathbb{RP}^2}(\mathcal{S}') = \text{Cl}_{\mathbb{RP}^2}(\mathcal{S})$ , donde

$$\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus (h(\{x = 0\}) \cup h(\{y = 0\}) \cup h(\{\text{Jac}(h) = 0\})).$$

Fijemos un punto  $p \in S_\infty$ ; por el Lema III.1.6, podemos suponer, reordenando las variables y cambiando  $x$  por  $-x$  en caso necesario, que existen  $f \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $f(0) \neq 0$  y enteros  $k, \ell$  con  $-k = \min\{-k, \ell\} < 0$  tales que si  $\alpha(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{-k}, \mathbf{t}^\ell f)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(\alpha(t)) = p$  y  $(h \circ \alpha)(]0, \varepsilon]) \subset S'$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. El cambio de variables efectuado no altera la estructura de  $h$ , por lo que mantenemos la notación. Es claro que, como  $p \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ , al menos uno de los siguientes límites es infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} (h_1 \circ \alpha)(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{2k(r-1)}}{t^{2kr} + \prod_{i=1}^r H_i(1, t^{k+\ell} f(t))^2}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} (h_2 \circ \alpha)(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{2kr+2\ell} f(t)^2}{t^{2kr} + \prod_{i=1}^r H_i(1, t^{k+\ell} f(t))^2}. \end{aligned}$$

Observamos que:

- (1) El primer límite es infinito si y sólo si  $\prod_{i=1}^r H_i(1, \mathbf{t}^{k+\ell} f(\mathbf{t}))^2 = \mathbf{t}^{\nu_1} g_1(\mathbf{t})$  para algún polinomio  $g_1 \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  y algún entero  $\nu_1 \geq 2k(r-1) + 1$ .
- (2) El segundo límite es infinito si y sólo si  $\ell < 0$  y  $\prod_{i=1}^r H_i(1, \mathbf{t}^{k+\ell} f(\mathbf{t}))^2 = \mathbf{t}^{\nu_2} g_2(\mathbf{t})$  para algún polinomio  $g_2 \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  y un entero  $\nu_2 \geq 2kr + 2\ell + 1$ .

En ambos casos, puesto que  $k + \ell \geq 0$ , se deduce que existe un índice  $1 \leq i \leq r$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_i(1, t^{k+\ell} f(t)) = 0$ ; por tanto, como  $c_i, d_i \neq 0$ , concluimos que  $\ell = -k < 0$  y  $f(0) = c_i/d_i$ . Ahora, según se cumpla (1) o (2) denotamos  $\mu := \nu_i - 2k(r-1) - 1 \geq 0$  y  $g := g_i$ . Así, tenemos

$$\mathbf{t}^{2kr} + \prod_{i=1}^r H_i(1, \mathbf{t}^{k+\ell} f(\mathbf{t}))^2 = \mathbf{t}^{2k(r-1)+1} \mathbf{t}^\mu g(\mathbf{t}).$$

A la vista de lo anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} p &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{2kr} + \prod_{i=1}^r H_i(1, f(t))^2 : t^{2k(r-1)} : t^{2kr+2\ell} f(t)^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{2k(r-1)+1} t^\mu g(t) : t^{2k(r-1)} : t^{2k(r-1)} f(t)^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{\mu+1} g(t) : 1 : f(t)^2) \\ &= (0 : 1 : c_i^2/d_i^2), \end{aligned}$$

por lo que  $S_\infty \subset \{p_1, \dots, p_r\}$ . Recíprocamente,

$$h(d_i/t, c_i/t) = (d_i^2/t^2, c_i^2/t^2) \equiv (t^2 : d_i^2 : c_i^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} (0 : d_i^2 : c_i^2) = p_i,$$

de donde se deduce la igualdad  $S_\infty = \{p_1, \dots, p_r\}$ . □

Presentamos a continuación un ejemplo más, relacionado con la Cuestión III.5.2, en el que el conjunto de puntos del infinito de la imagen de una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está formado, exactamente, por dos componentes conexas de dimensión 1.

**Ejemplo III.5.4** Existe una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen  $\mathcal{S}$  satisfice

$$\mathcal{S}_\infty = \{(0 : u : 1) : 0 \leq u \leq 1/2\} \cup \{(0 : 1 : v) : 0 \leq v \leq 1/2\}.$$

Construimos  $f$  en varios pasos:

(III.5.4.1) La imagen  $\mathcal{S}_1 := g(\mathbb{R}^2)$  de la aplicación regular

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{x^2 + 1}{1 + x^2 y^2}, \frac{y^2 + 1}{1 + x^2 y^2} \right),$$

cumple la igualdad  $\mathcal{S}_{1,\infty} = \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ , ya que

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{T} \cup [0, 2]^2 \subset \{u > 0, v > 0\},$$

donde  $\mathcal{T} := \{0 < u \leq 1, v > 0\} \cup \{0 < v \leq 1, u > 0\}$ .

En efecto, comprobamos primero que  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{T} \cup [0, 2]^2$ . Sea  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y supongamos que  $g(x, y) = (u, v)$  donde  $v > 2$ ; afirmamos que entonces  $0 < u \leq 1$ . La desigualdad  $u > 0$  es clara, y supongamos que  $u > 1$ . En ese caso  $x^2 > x^2 y^2$  e  $y^2 > 1 + 2x^2 y^2$ ; por tanto

$$x^2 < x^2 + 2x^4 y^2 < x^2 y^2 < x^2,$$

que es una contradicción. Por simetría, si  $u > 2$  entonces  $0 < v \leq 1$  lo que demuestra el contenido  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{T} \cup [0, 2]^2$ . A continuación vemos que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_1$ . De nuevo por simetría, es suficiente demostrar que  $\mathcal{T}_1 := \{0 < u \leq 1, v > 0\} \subset \mathcal{S}_1$ . Sea  $(u, v) \in \mathcal{T}_1$  y consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 1 = u(1 + x^2 y^2), \\ y^2 + 1 = v(1 + x^2 y^2) \end{cases} \equiv \begin{cases} v(x^2 + 1) - u(y^2 + 1) = 0, \\ uy^4 + (u - 1 - v)y^2 + v - 1 = 0. \end{cases}$$

El discriminante  $\Delta$  de la ecuación bicuadrada  $uy^4 + (u - 1 - v)y^2 + v - 1 = 0$  es

$$(u - 1 - v)^2 - 4u(v - 1) = (v - 3u + 1)^2 + 8u(1 - u) \geq 0,$$

ya que  $0 < u \leq 1$ . Como  $u - 1 - v < 0$ , el número real

$$z_0 := \frac{v + (1 - u) + \sqrt{(v - 3u + 1)^2 + 8u(1 - u)}}{2u}$$

es positivo y tiene una raíz cuadrada  $y_0 \in \mathbb{R}$ , que es solución de la ecuación bicuadrada  $uy^4 + (u - 1 - v)y^2 + v - 1 = 0$ . También necesitamos que la ecuación  $v(x^2 + 1) - u(y_0^2 + 1) = 0$ , de grado 2, tenga alguna solución real  $x_0$ ; esto sucede si

$$0 < 2(u(y_0^2 + 1) - v) = 2uz_0 + 2u - 2v = -v + 1 + u + \sqrt{(v - 3u + 1)^2 + 8u(1 - u)}$$

o, equivalentemente, si

$$0 < (v - 3u + 1)^2 + 8u(1 - u) - (v - 1 - u)^2 = 4v(1 - u),$$

y esto se sigue de las desigualdades  $v > 0$ ,  $u < 1$ ; por tanto  $(u, v) \in \mathcal{S}_1$ , como queríamos.

(III.5.4.2) Sean  $\mathcal{B}_1 := \{0 < 2u \leq v\}$  y  $\mathcal{B}_2 := \{0 < 2v \leq u\}$ . Consideremos también los conjuntos

$$\mathcal{A}_1 := \{0 < x \leq 1, 4 \leq y\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_2 := \{0 < y \leq 1, 4 \leq x\},$$

los polinomios en dos variables

$$h_0 := 1 + x(x-1)^2y(y-1)^2, \quad h_1 := x((y-1)^2y^2 + 2(x-1)^2x) \\ h_2 := y((x-1)^2x^2 + 2(y-1)^2y)$$

y la aplicación racional  $h := (h_1/h_0, h_2/h_0) : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$ , cuya restricción al conjunto  $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es regular. Su imagen  $\mathcal{S}_2 := h(\mathcal{A})$  está contenida en  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ , y su lugar de puntos de infinito es

$$\mathcal{S}_{2,\infty} = \mathcal{B}_{1,\infty} \cup \mathcal{B}_{2,\infty} = \{(0 : u : 1) : 0 \leq u \leq 1/2\} \cup \{(0 : 1 : v) : 0 \leq v \leq 1/2\}.$$

En efecto, como  $h_1(y, x) = h_2(x, y)$  y  $h_0(y, x) = h_0(x, y)$  se tiene  $\frac{h_1(y, x)}{h_0(y, x)} = \frac{h_2(x, y)}{h_0(x, y)}$ , por lo que basta comprobar que  $h(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{B}_1$  y  $(h(\mathcal{A}_1))_\infty = \mathcal{B}_{1,\infty}$ . Dado  $(x, y) \in \mathcal{A}_1$  observamos que  $h_1(x, y) > 0$  y, además,

$$h_2(x, y) - 2h_1(x, y) = y((x-1)^2x^2 + 2(y-1)^2y) - 2x((y-1)^2y^2 + 2(x-1)^2x) \\ = 2(1-x)(y-1)^2y^2 + (y-4)(x-1)^2x^2 \geq 0,$$

puesto que  $0 < x \leq 1$  e  $y \geq 4$ . En consecuencia,  $h(x, y) \in \mathcal{B}_1$ , luego  $(h(\mathcal{A}_1))_\infty \subset \mathcal{B}_{1,\infty}$  y sólo queda demostrar la inclusión  $\mathcal{B}_{1,\infty} \subset (h(\mathcal{A}_1))_\infty$ .

Para cada  $0 < \lambda \leq 1$  consideramos la semirrecta  $x = \lambda, y = t \geq 4$  y la curva  $\mathcal{C}_\lambda \subset h(\mathcal{A}_1)$  parametrizada según

$$\alpha_\lambda(t) := (\alpha_{\lambda 1}(t), \alpha_{\lambda 2}(t)) := g(\lambda, t) = \left( \frac{\lambda(t-1)^2t^2 + 2\lambda\mu_\lambda}{1 + \mu_\lambda t(t-1)^2}, \frac{2(t-1)^2t^2 + \lambda\mu_\lambda t}{1 + \mu_\lambda t(t-1)^2} \right),$$

donde  $\mu_\lambda := \lambda(\lambda-1)^2$ . Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_{\lambda 1}(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_{\lambda 2}(t) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{\lambda 1}(t)}{\alpha_{\lambda 2}(t)} = \frac{\lambda}{2},$$

deducimos que  $\mathcal{C}_{\lambda,\infty} = \{(0 : \frac{\lambda}{2} : 1)\}$ ; por consiguiente,

$$\mathcal{B}_{1,\infty} = \bigcup_{0 < \lambda \leq 1} \mathcal{C}_{\lambda,\infty} \subset \left( \bigcup_{0 < \lambda \leq 1} \mathcal{C}_\lambda \right)_\infty = (h(\mathcal{A}_1))_\infty,$$

y queda probada la otra inclusión.

(III.5.4.3) Para terminar, la imagen de la aplicación regular  $f = h \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un conjunto semialgebraico  $\mathcal{S}$  cuyo lugar de puntos de infinito es

$$\mathcal{S}_\infty = \{(0 : u : 1) : 0 \leq u \leq 1/2\} \cup \{(0 : 1 : v) : 0 \leq v \leq 1/2\},$$

como queríamos ver.



Si la respuesta a la siguiente pregunta fuese afirmativa, generalizaría el resultado anterior.

**Problema III.5.5** Sea  $\mathcal{S}_0$  un subconjunto semialgebraico del hiperplano de infinito  $H_\infty(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{R}P^m$ . ¿Existe una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $(f(\mathbb{R}^n))_\infty = \mathcal{S}_0$ ?

### III.6. Frontera exterior de una imagen regular de $\mathbb{R}^n$

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema III.6.1, para lo que necesitamos antes un resultado auxiliar acerca de las imágenes regulares de  $\mathbb{R}^2$ . Recordamos que una semilínea regular es la imagen de  $\mathbb{R}$  por una aplicación regular, y que decimos que una sucesión  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  es totalmente no acotada si todas sus subsucesiones son no acotadas.

**Teorema III.6.1** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación regular,  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$  y  $d := \dim(\mathcal{S})$ . Entonces,

- (i)  $\mathcal{S}$  es completamente conexo por semilíneas regulares.
- (ii) Para cada  $x \in \delta\mathcal{S}$  existe una semilínea regular  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$ .
- (iii) Si  $d = n$ , existe un conjunto semialgebraico  $\mathcal{U}$  abierto y denso en  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$  tal que para cada  $x \in \mathcal{U}$  existe una semilínea regular  $\mathcal{L}$  tal que  $x \in \mathcal{L} \subset \text{Cl}^{\text{zar}}((\delta\mathcal{S})_{(n-1)}) \cap \text{Cl}(\mathcal{S})$ .

En la demostración de este Teorema emplearemos técnicas y estrategias semejantes a las utilizadas en la prueba del Teorema III.3.4.

**Lema III.6.2** Dada una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  cuya imagen  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^2)$  es acotada, existe una familia finita de curvas racionales  $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$  que cumplen las siguientes condiciones:

- (i)  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \bigcup_{i=1}^r \mathcal{M}_{i,(1)} \subset \text{Cl}(\mathcal{S})$ .
- (ii) La restricción  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  es propia y para cada  $z \in \mathcal{D}$  existe una sucesión totalmente no acotada  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $z$ .

*Demostración.* Escribimos  $f := (\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_m}{f_0}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  donde cada  $f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  y  $f_0$  no se anula en ningún punto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $d := \max_{i=0, \dots, m} \{\deg(f_i)\}$  y consideremos la aplicación racional

$$F_{\mathbb{R}} = (F_0 : F_1 : \dots : F_m) : \mathbb{R}P^2 \dashrightarrow \mathbb{R}P^m, \text{ donde } F_i(\mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_1 : \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_0^d f_i\left(\frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_0}, \frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_0}\right).$$

La demostración se desarrolla en varios pasos.

(III.6.3.1) La aplicación  $F_{\mathbb{R}}$  se extiende de manera natural a una aplicación racional  $\sigma$ -invariante  $F_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^m$ . Además, en nuestra situación podemos suponer que  $\gcd(F_0, F_1, \dots, F_m) = 1$ , por lo que el conjunto de puntos de indeterminación de  $F_{\mathbb{K}}$  es

$$Y_{\mathbb{K}} := \{x \in \mathbb{K}P^2 : F_i(x) = 0, \text{ para todo } 0 \leq i \leq m\}.$$

Además  $Y_{\mathbb{R}} \subset \ell_{\infty}(\mathbb{R})$ , porque  $f$  es regular.

(III.6.3.2) Sea  $(Z_1, \pi_{\mathbb{C}}, \widehat{F}_{\mathbb{C}})$  una resolución  $\sigma$ -invariante de  $F_{\mathbb{C}}$  y mantenemos toda la notación introducida en III.1.b.1. Definimos

- $X_1 := Z_1 \cap \mathbb{R}\mathbb{P}^k$ , que es una superficie proyectiva real no singular.
- $\pi_{\mathbb{R}} := \pi_{\mathbb{C}}|_{X_1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , que es composición de una cantidad finita de explosiones e isomorfismos birregulares, y cuya restricción  $\pi_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} : X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus Y_{\mathbb{R}}$  es un isomorfismo birregular, y
- $\widehat{F}_{\mathbb{R}} := \widehat{F}_{\mathbb{C}}|_{X_1} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ , que es una aplicación regular real que satisface

$$\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})} = F_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(Y_{\mathbb{R}})}.$$

(III.6.3.3) Recordemos que, en virtud de III.1.c.4(ii), la transformada estricta  $C_{\infty}$ , respecto de  $\pi_{\mathbb{R}}$ , de la recta de infinito  $\ell_{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  es una curva algebraica proyectiva racional real no singular. Por otra parte, por III.1.b.1(v), la imagen inversa  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(y)$  de cada punto  $y \in Y_{\mathbb{R}}$  es una unión finita de curvas algebraicas racionales proyectivas reales no singulares  $C_{i,y}$ , donde  $i = 1, \dots, r_y$ . En consecuencia,  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) = C_{\infty} \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} C_{i,y}$ .

(III.6.3.4) Observamos que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(X_1) = \text{Cl}(\mathcal{S}) = \text{Cl}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^m}(\mathcal{S})$ , ya que la aplicación  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}$  es propia y el conjunto  $\mathcal{S}$  es acotado; además  $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^2) = F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ . Por tanto,

$$\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} := \widehat{F}_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{\infty}) \cup \bigcup_{y \in Y_{\mathbb{R}}} \bigcup_{i=1}^{r_y} \widehat{F}_{\mathbb{R}}(C_{i,y}) \subset \text{Cl}(\mathcal{S}),$$

lo que, por el Lema III.2.2 (ii), demuestra la afirmación (i).

A continuación probamos (ii). Observamos que, como la aplicación  $\widehat{F}_{\mathbb{R}} : X_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  es propia, su restricción  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D})} : X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  también lo es. Por tanto, al ser la restricción  $\rho := \pi_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} : \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  un isomorfismo birregular que satisface la igualdad  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$ , para demostrar que  $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  es propia es suficiente ver que  $X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}))$ .

Ahora bien, como  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}|_{\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} = f \circ \rho$ , tenemos  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D}))$ , y por tanto

$$\begin{aligned} X_1 \setminus \widehat{F}_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathcal{D}) &= X_1 \setminus (\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R})) \cup \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D}))) \\ &= \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2) \setminus \rho^{-1}(f^{-1}(\mathcal{D})) = \rho^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\mathcal{D})). \end{aligned}$$

Más aún, si  $z \in \mathcal{D}$  existe  $u \in \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\ell_{\infty}(\mathbb{R}))$  tal que  $\widehat{F}_{\mathbb{R}}(u) = z$ . Al ser  $\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  denso en  $X_1$ , existe una sucesión  $\{u_k\}_k \subset \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$  que converge a  $u$ . Así, la sucesión  $\{x_k := \pi_{\mathbb{R}}(u_k)\}_k$  es totalmente no acotada y  $f(x_k) = f(\pi_{\mathbb{R}}(u_k)) = \widehat{F}_{\mathbb{R}}(u_k)$ , de modo que  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $z$ , como queríamos ver.  $\square$

**Corolario III.6.3** *Sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto semialgebraico 2-dimensional que es imagen de una aplicación regular  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Entonces, existen un conjunto finito  $\mathcal{D}$  y una familia finita de semilíneas regulares  $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^r$  tales que  $\delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \cup \bigcup_{i=1}^r \mathcal{M}_i \subset \text{Cl}(\mathcal{S}) \cap \text{Cl}^{\text{zar}}(\delta\mathcal{S})$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{S}$  es acotado el resultado es consecuencia inmediata del Corolario III.2.5 y el Lema III.6.2; véase también la Observación III.4.4 (i). Por tanto es suficiente probar que podemos reducir la prueba al caso acotado. Para ello consideramos la inversión respecto de la esfera de  $\mathbb{R}^{m+1}$  de centro el origen y radio 1, que es la aplicación regular

$$h : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2},$$

e identificamos  $\mathbb{R}^m$  con el hiperplano  $\mathcal{H} := \{x_{m+1} = 2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ . Así, si  $\mathcal{S}$  no es acotado tampoco lo es su identificado  $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ . En consecuencia sí es acotada su imagen  $\mathcal{T} := h(\mathcal{S}) \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| < 1\}$ , porque  $\mathcal{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| > 1\}$ . Como  $h$  es una involución racional, preserva el género de las curvas y, en particular su racionalidad. Además  $\delta\mathcal{T} = h(\delta\mathcal{S}) \cup \{\mathbf{0}\}$ , luego es suficiente demostrar el resultado para  $\mathcal{T}$ , como pretendíamos probar.  $\square$

Ahora, la demostración del Teorema III.6.1, cuyos detalles omitimos, es análoga a la del Teorema III.4.1, teniendo en cuenta que, por medio de una inversión, podemos suponer que el conjunto semialgebraico implicado es acotado, y usando a continuación el Corolario III.2.5, el Lema III.6.2 y el Corolario III.6.3 en lugar del Lema III.4.2 y el Corolario III.4.3.

Terminamos esta sección justificando el interés del Teorema III.6.1. Evidentemente, es posible formular cuestiones similares a las propuestas en III.4.6 pero en el contexto de las imágenes regulares, tratando de averiguar si las afirmaciones recíprocas a las establecidas en el Teorema III.6.1 y el Corolario III.6.3 son ciertas.

**Observaciones III.6.4** (i) Un conjunto semialgebraico completamente conexo por semilíneas regulares es irreducible y de dimensión pura. La demostración es muy similar a la de la Proposición III.4.5.

(ii) Cada subconjunto semialgebraico no vacío  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema III.6.1. En efecto, para probar la condición (i) es suficiente observar que  $\mathcal{S}$  es conexo por caminos y aproximar, mediante el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass, un camino que pasa por un conjunto finito de puntos dado mediante un camino regular, utilizando además que, en virtud del Lema III.2.1, para cada  $\varepsilon > 0$  el intervalo cerrado  $[0, \varepsilon]$  es imagen regular de  $\mathbb{R}$ . Por otro lado, la condición (ii) se deduce del Lema de Selección de curvas racionales III.1.6.

(iii) La situación es radicalmente diferente para conjuntos semialgebraicos arbitrarios. En lo que sigue, diremos que un subconjunto semialgebraico  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$  es *genéricamente unireglado* si existe un subconjunto semialgebraico abierto y denso  $\mathcal{U}$  en  $\mathcal{T}$  tal que para cada punto  $x \in \mathcal{U}$  existe una semilínea regular que pasa por  $x$  y está contenida en  $\mathcal{U}$ .

Se prueba en [C, V] que si  $m \geq 4$  y  $d \geq 2m - 2$  la hipersuperficie algebraica compleja genérica  $Z$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$  de grado  $d$  no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, y lo mismo sucede si  $m = 2, 3$  y  $d \geq 2m - 1$ . Por tanto, si  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  es un conjunto semialgebraico cuya clausura de Zariski  $X$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  es una hipersuperficie genérica de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  con grado suficientemente alto, su clausura de Zariski  $Z$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$  no contiene curvas algebraicas proyectivas racionales, luego  $\mathcal{S}$  no es completamente conexo por semilíneas regulares. Es más, el conjunto  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$  no es genéricamente unireglado y no es cierto que para cada punto  $x \in \delta\mathcal{S}$  existe una semilínea regular que pasa por  $x$  y está contenida en  $\text{Cl}(\mathcal{S})$ . Esto demuestra, en virtud de III.6.1 (iii), que  $\mathcal{S}$  no es imagen regular de ningún  $\mathbb{R}^n$ .

(iv) Análogamente, si  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  es un conjunto semialgebraico abierto tal que la clausura de Zariski  $X$  de  $\delta\mathcal{S}$  en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  es una hipersuperficie genérica de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  cuyo grado es suficientemente alto, su clausura de Zariski en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$  no contiene curvas algebraicas racionales, y por tanto,  $(\delta\mathcal{S})_{(n-1)}$  no es genéricamente unireglado. Esto implica, por el Teorema III.6.1 (iii), que  $\mathcal{S}$  no es imagen regular de ningún  $\mathbb{R}^n$ . A pesar de todo, como ya hemos mencionado en el apartado (ii),  $\mathcal{S}$  es completamente conexo por semilíneas regulares y para cada punto  $x \in \delta\mathcal{S}$  existe una semilínea regular que pasa por  $x$  y está contenida en  $\text{Cl}(\mathcal{S})$ .

### III.7. Componentes conexas del exterior

Una pregunta que surge de modo natural al estudiar imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$  es la siguiente: *¿Existe alguna cota superior para el número de componentes conexas del exterior topológico  $\mathbb{R}^m \setminus \text{Cl}(\mathcal{S})$  de la imagen  $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^n)$  de una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ?* La existencia de tal cota hubiese supuesto una nueva obstrucción al hecho de ser imagen polinómica de un espacio euclídeo no contemplada en las secciones anteriores, pero demostramos en esta sección que tal cota no existe para  $n \geq 2$ .

Para aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la respuesta es sencilla; puesto que  $f(\mathbb{R})$  es un intervalo cerrado no acotado,  $\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})$  es el conjunto vacío o un intervalo abierto no acotado (que tiene una única componente conexa), por lo que en este caso la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. ¿Qué sucede en situaciones de mayor dimensión? Para aplicaciones polinómicas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la respuesta viene dada por el siguiente ejemplo.

**Ejemplo III.7.1** Sean  $J = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}$  un conjunto finito y la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( x, y^2 \prod_{i=1}^k (x - a_i) \right)$$

Denotamos  $a_0 = -\infty$  y  $a_{k+1} = +\infty$ ; es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{\ell=0}^k \{a_\ell < x < a_{\ell+1}, (-1)^{\ell+k} y > 0\} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im}(f) &= \bigcup_{\ell=0}^k \{a_\ell \leq x \leq a_{\ell+1}, (-1)^{\ell+k} y < 0\}\end{aligned}$$

y por tanto, el exterior topológico de  $\operatorname{Im}(f)$ , que es

$$\bigcup_{\ell=0}^r \{a_\ell < x < a_{\ell+1}, (-1)^{\ell+k} y < 0\},$$

tiene  $(k+1)$  componentes conexas.

Sin embargo, es más complicado obtener ejemplos que satisfagan algunas condiciones añadidas. Dedicamos lo que resta de esta sección a demostrar que, fijado un entero positivo  $k$ , existe una aplicación polinómica  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen  $\mathcal{S}_k := f_k(\mathbb{R}^2)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y cuyo complementario  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_k$  posee  $k$  componentes conexas.

Consideramos primero las aplicaciones polinómicas  $f, \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$f(x, y) := (y + (y^2 + 1)x, (xy + 1)^2 + x^2) \quad \text{y} \quad \phi(x, y) := (x + y, y).$$

Observamos que  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un homeomorfismo y  $\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H} := \{y > 0\}$ . Consideramos el subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  definido por  $\mathcal{R} := \{0 < y < x^2 + 1\}$ . Con estas notaciones se tiene el siguiente resultado.

**Lema III.7.2** *La restricción  $f|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{H}$  es un homeomorfismo entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Por el Teorema de Invarianza del dominio es suficiente comprobar que la aplicación continua  $f|_{\mathcal{H}}$  es biyectiva. Sea  $(x, y) \in \mathcal{H}$  y denotemos  $(u, v) = f(x, y)$ , es decir,

$$u = y + (y^2 + 1)x \quad \text{y} \quad v = (1 + xy)^2 + x^2.$$

Es claro que  $v > 0$ , mientras que  $u^2 + 1 - v = y^2((1 + xy)^2 + x^2) > 0$  porque  $y \neq 0$ . Esto prueba que  $f(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}$ . Recíprocamente, dado  $(u, v) \in \mathcal{R}$  existe un único punto  $(x, y) \in \mathcal{H}$  tal que  $f(x, y) = (u, v)$ , cuyas coordenadas vienen dadas por

$$y := +\sqrt{\frac{u^2 + 1 - v}{v}}, \quad x := \frac{u - y}{y^2 + 1}.$$

lo que demuestra que  $f|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{H}$  es biyectiva. □

Empleando este Lema contestamos afirmativamente en la siguiente Proposición la segunda parte de la Cuestión [FG2, 7.3.2].

**Proposición III.7.3** *El conjunto abierto  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Vimos en el Lema II.1.1 que el semiplano  $\mathcal{H}$  es la imagen de la aplicación polinómica

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y(xy - 1), (xy - 1)^2 + x^2),$$

y  $\mathcal{R}$  es, por el Lema III.7.2, la imagen de la composición  $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $\square$

En lo que resta de esta sección fijamos las siguientes notaciones. Abreviamos por  $f$  el homeomorfismo polinómico  $f|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  del Lema III.7.2. Consideramos también los homeomorfismos

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, y) \quad \text{y} \quad \psi := \phi \circ f : \mathcal{H} \rightarrow \phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{H}.$$

**Lema III.7.4** *Consideramos los conjuntos semialgebraicos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  (véase la Figura III.7.1) definidos así:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{-2y < x(y^2 + 1) < 0\}, & \mathcal{N} &:= \{0 < y < 1\}, \\ \mathcal{Q} &:= \{x < 0 < y\}, & \mathcal{P} &:= \{x^2 + 1 < 2y < 2(x^2 + 1)\}. \end{aligned}$$

*La aplicación polinómica  $\psi$  satisface las siguientes propiedades:*

$$(i) \ \psi(\mathcal{M}) = \mathcal{N}; \quad (ii) \ \psi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad (iii) \ \mathcal{M} \subset \mathcal{Q} \subset \psi(\mathcal{Q}).$$

*Demostración.* (i) Para probar la primera afirmación, observamos que

$$f^{-1}(\mathcal{N}) = \{(x, y) \in \mathcal{H} : (xy + 1)^2 + x^2 < 1\} = \{(x, y) \in \mathcal{H} : x(xy^2 + x + 2y) < 0\}.$$

En particular, si  $(x, y) \in f^{-1}(\mathcal{N})$ , y puesto que  $y > 0$ , se deduce que  $x < 0$ , y en consecuencia  $xy^2 + x + 2y > 0$ , es decir,  $-2y < x(y^2 + 1)$ . Por tanto,

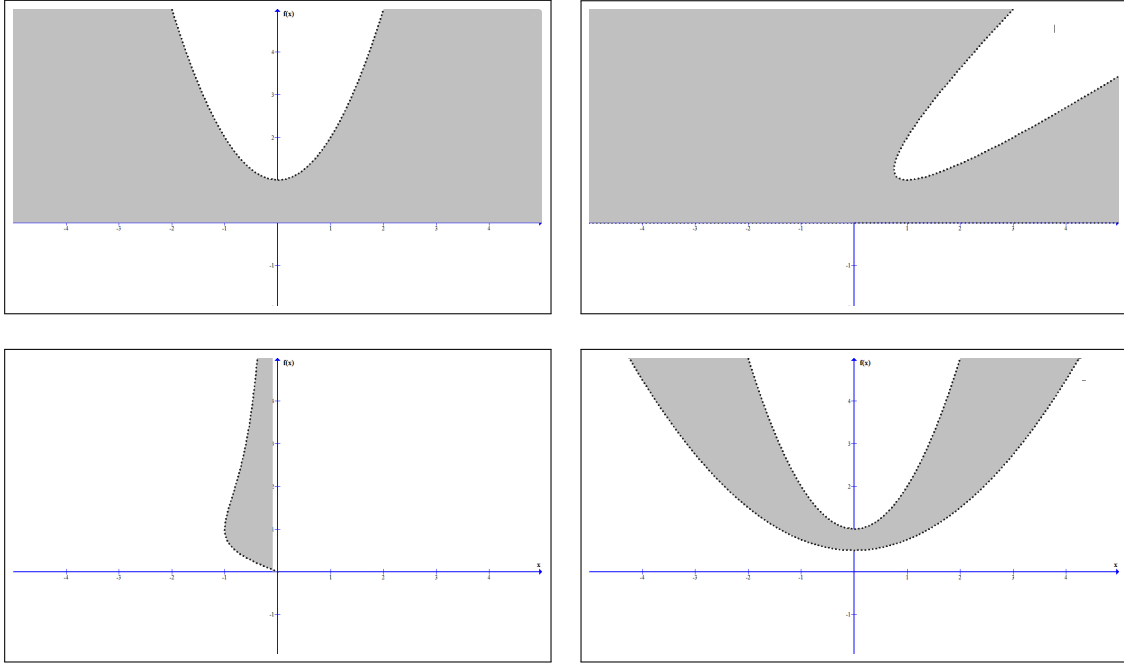
$$f^{-1}(\mathcal{N}) = \{-2y < x(y^2 + 1), x < 0\} = \mathcal{M},$$

y  $f(\mathcal{M}) = f(f^{-1}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$ , puesto que  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  es sobreyectiva. Ahora, como  $\phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ , concluimos que  $\psi(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$ .

(ii) Para ver la segunda afirmación es suficiente probar que  $f(\mathcal{N}) = \mathcal{P}$ . Consideramos la recta  $\mathcal{L} := \{y = 1\} \subset \mathcal{H}$  y observamos que las componentes conexas de su complementario  $\mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$  en  $\mathcal{H}$  son  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{H} \setminus \text{Cl}(\mathcal{N})$ . La recta  $\mathcal{L}$  se transforma mediante  $f$  en la parábola

$$f(\mathcal{L}) = \{(1 + 2t, (t + 1)^2 + t^2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 = 2y\}.$$

Al ser  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  un homeomorfismo, según vimos en el Lema III.7.2, el conjunto  $\mathcal{R} \setminus f(\mathcal{L})$  tiene dos componentes conexas,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R} \setminus \text{Cl}(\mathcal{P})$ , y necesariamente  $f(\mathcal{N}) = \mathcal{P}$  puesto que, por ejemplo, el punto  $(0, 1/2) \in \mathcal{N}$  y  $f(0, 1/2) = (1/2, 1) \in \mathcal{P}$ .


 Figura III.7.1: Las regiones abiertas  $\mathcal{R}$ ,  $\phi(\mathcal{R})$ ,  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{P}$ .

(iii) La inclusión  $\mathcal{M} \subset \mathcal{Q}$  es inmediata, así que veamos  $\mathcal{Q} \subset \psi(\mathcal{Q})$ . Para comprobarlo observamos primero que  $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}$  y  $\mathcal{H} \setminus \mathcal{Q}$  son las componentes conexas de  $\mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$  y, como  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  es un homeomorfismo, sus imágenes  $f(\mathcal{Q} \setminus \mathcal{M})$  y  $f(\mathcal{H} \setminus \mathcal{Q})$  son las dos componentes conexas

$$\mathcal{R}_1 := \{(x, y) \in \mathcal{R} : y \geq 1, x < 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_2 := \{(x, y) \in \mathcal{R} : y \geq 1, x > 0\}$$

de  $f(\mathcal{H} \setminus \mathcal{M}) = f(\mathcal{H}) \setminus f(\mathcal{M}) = \mathcal{R} \setminus \mathcal{N}$ . Como  $(-1, 1) \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}$  y  $f(-1, 1) = (-1, 1) \in \mathcal{R}_1$  deducimos que  $f(\mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}) = \mathcal{R}_1$ , luego

$$f(\mathcal{Q}) = f((\mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}) \cup \mathcal{M}) = f(\mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}) \cup f(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{N}.$$

Es más, como  $\mathcal{A} = \{0 < y < -x\} \subset \mathcal{B} = \{x < 0\} \subset \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{N}$  y  $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}$ , resulta

$$\mathcal{Q} = \phi(\mathcal{A}) \subset \phi(\mathcal{B}) \subset \phi(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{N}) = \phi(f(\mathcal{Q})) = (\phi \circ f)(\mathcal{Q}) = \psi(\mathcal{Q}),$$

y hemos terminado. □

Recordamos ahora algunas propiedades sobre el comportamiento del operador frontera. Dados un espacio topológico  $X$  y dos subconjuntos  $C \subset A \subset X$ , denotamos

$$\partial_X C := \text{Cl}_X(C) \setminus \text{Int}_X(C) \quad \text{y} \quad \partial_A C := \text{Cl}_A(C) \setminus \text{Int}_A(C)$$

la frontera de  $C$  en  $X$  y su frontera en  $A$ , respectivamente. Nótese que  $\text{Cl}_X(A) = \partial_X A \cup A$ .

**Lema III.7.5** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $A \subset X$  y  $B \subset Y$  dos subconjuntos. Sean  $C$  un subconjunto de  $A$  y  $g : A \rightarrow B$  un homeomorfismo. Entonces:

- (i)  $\partial_A C \subset \partial_X C \subset \partial_A C \cup \partial_X A$ .
- (ii)  $g(\partial_A C) = \partial_B(g(C))$ .

*Demostración.* (i) En efecto, como  $\text{Cl}_X(A) = A \cup \partial_X A$  y  $\text{Cl}_X(C) \subset \text{Cl}_X(A)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \partial_A C &= \text{Cl}_A(C) \setminus \text{Int}_A(C) = (\text{Cl}_X(C) \setminus \text{Int}_X(C)) \cap A = \partial_X C \cap A \\ &\subset \partial_X C \cap \text{Cl}_X(A) = (\partial_X C \cap A) \cup (\partial_X C \cap \partial_X A) \\ &= \partial_A C \cup (\partial_X C \cap \partial_X A) \subset \partial_A C \cup \partial_X A. \end{aligned}$$

- (ii) Al ser  $g$  un homeomorfismo preserva clausuras e interiores, y por tanto,

$$g(\partial_A C) = g(\text{Cl}_A(C) \setminus \text{Int}_A(C)) = \text{Cl}_B(g(C)) \setminus \text{Int}_B(g(C)) = \partial_B(g(C)),$$

como queríamos demostrar. □

**Definición y Proposición III.7.6 (Curvas auxiliares)** Introducimos la siguiente sucesión de curvas semialgebraicas, todas ellas semilíneas paramétricas de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \Gamma_0 := \{y = 0\}, \\ \Gamma_k := \psi(\Gamma_{k-1}) = \psi^k(\Gamma_0), \quad \text{para } k \geq 1. \end{cases}$$

Las curvas  $\Gamma_k$  son conexas, disjuntas dos a dos y cerradas en  $\mathbb{R}^2$ .

*Demostración.* En primer lugar, como  $\Gamma_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$  y  $\Gamma_k$  es una imagen polinómica de  $\Gamma_0$ , deducimos que cada  $\Gamma_k$  es una semilínea paramétrica y en particular una curva conexa y cerrada. Veamos, usando un argumento inductivo respecto de  $k$ , que las curvas  $\Gamma_k$  son disjuntas dos a dos. Para  $k = 0$  no hay nada que probar porque sólo tenemos una curva.

Supongamos a continuación que  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_k$  son disjuntas dos a dos y comprobemos que ninguna de estas curvas interseca a  $\Gamma_{k+1}$ . Por el Lema III.7.2 la aplicación  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \phi(\mathcal{R})$  es un homeomorfismo y, por la hipótesis de inducción, para cada  $1 \leq \ell \leq k$  se cumple que  $\Gamma_{\ell-1} \cap \Gamma_k = \emptyset$ . Por tanto

$$\Gamma_\ell \cap \Gamma_{k+1} = \psi(\Gamma_{\ell-1}) \cap \psi(\Gamma_k) = \psi(\Gamma_{\ell-1} \cap \Gamma_k) = \psi(\emptyset) = \emptyset.$$

Finalmente,  $\Gamma_{k+1} \subset \psi(\mathcal{H}) = \phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{H}$  no interseca a  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{H}$ . □



**Proposición III.7.7** *La aplicación  $\psi^k : \mathcal{H} \rightarrow \psi^k(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^2$  es un homeomorfismo, y  $\partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^k(\mathcal{H}))$  tiene  $k + 1$  componentes conexas, que son precisamente las curvas  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_k$ .*

*Demostración.* La aplicación  $\psi^k : \mathcal{H} \rightarrow \psi^k(\mathcal{H})$  es homeomorfismo por serlo  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \psi(\mathcal{H})$ . Como acabamos de ver que las curvas  $\Gamma_k$  son conexas y disjuntas dos a dos es suficiente comprobar la igualdad

$$\partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^k(\mathcal{H})) = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k,$$

que probamos por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$  basta aplicar el Lema III.7.2, puesto que

$$\partial_{\mathbb{R}^2}\psi(\mathcal{H}) = \partial_{\mathbb{R}^2}\phi(\mathcal{R}) = \phi(\partial_{\mathbb{R}^2}\mathcal{R}) = \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Ahora supongamos  $k \geq 1$  y ya probado que  $\partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^k(\mathcal{H})) = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k$ . Por el Lema III.7.4 se tiene

$$\mathcal{N} = \psi(\mathcal{M}) \subset \psi(\mathcal{Q}) \subset \psi(\psi^k(\mathcal{Q})) = \psi^{k+1}(\mathcal{Q}) \subset \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H},$$

es decir,  $\mathcal{N} \subset \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$  y esto implica que  $\Gamma_0 \subset \partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^{k+1}(\mathcal{H}))$ . Por otra parte, empleando de nuevo el Lema III.7.4 resulta

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{P}) &= \psi(\mathcal{N}) = \psi(\psi(\mathcal{M})) \subset \psi(\psi(\mathcal{Q})) = \psi^2(\mathcal{Q}) \\ &\subset \psi^2(\psi^{k-1}(\mathcal{Q})) \subset \psi^2(\psi^{k-1}(\mathcal{H})) = \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \subset \psi(\mathcal{H}) = \phi(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

es decir,  $\phi(\mathcal{P}) \subset \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \subset \phi(\mathcal{R})$ .

Si denotamos  $\mathcal{U} := \phi^{-1}(\psi^{k+1}(\mathcal{H}))$  se tiene  $\phi(\mathcal{P}) \subset \phi(\mathcal{U}) \subset \phi(\mathcal{R})$ , luego  $\mathcal{P} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ . Como la curva  $\Gamma := \{y = x^2 + 1\} \subset \partial_{\mathbb{R}^2}\mathcal{P} \cap \partial_{\mathbb{R}^2}\mathcal{R}$  deducimos que  $\Gamma \subset \partial_{\mathbb{R}^2}\mathcal{U}$ , luego por el Lema III.7.5 (ii), y puesto que  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un homeomorfismo, se tiene

$$\Gamma_1 = \phi(\Gamma) \subset \phi(\partial_{\mathbb{R}^2}\mathcal{U}) = \partial_{\mathbb{R}^2}(\phi(\mathcal{U})) = \partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})).$$

Aplicando el Lema III.7.5 (i) al conjunto  $\psi^{k+1}(\mathcal{H})$  obtenemos

$$\partial_{\phi(\mathcal{R})}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) \subset \partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) \subset \partial_{\phi(\mathcal{R})}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) \cup \partial_{\mathbb{R}^2}(\phi(\mathcal{R})),$$

y, teniendo en cuenta que  $\partial_{\mathbb{R}^2}(\phi(\mathcal{R})) = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subset \partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^{k+1}(\mathcal{H}))$ , deducimos, aplicando el Lema III.7.5 (ii), que  $\psi$  es un homeomorfismo y la hipótesis de inducción, a que

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbb{R}^2}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) &= \partial_{\phi(\mathcal{R})}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \psi(\partial_{\mathcal{H}}(\psi^k(\mathcal{H}))) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \\ &= \psi(\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = (\Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_{k+1}) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \bigcup_{\ell=0}^{k+1} \Gamma_\ell, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

Antes de presentar endomorfismos polinómicos de  $\mathbb{R}^2$  cuyas imágenes son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  y cuyo exterior tiene un número arbitrario de componentes conexas necesitamos una construcción auxiliar.

**Definición y Proposición III.7.8 (Regiones auxiliares)** *Los subconjuntos  $\Delta_k$  de  $\mathbb{R}^2$  definidos por*

$$\begin{cases} \Delta_0 := \{y < 0\} \\ \Delta_1 := \phi(\{y > x^2 + 1\}) \\ \Delta_k := \psi(\Delta_{k-1}) = \psi^{k-1}(\Delta_1), \text{ para cada } k > 1 \end{cases}$$

*son subconjuntos abiertos y conexos de  $\mathbb{R}^2$  disjuntos dos a dos.*

*Demostración.* Es obvio que  $\Delta_0$  y  $\Delta_1$  son subconjuntos abiertos y conexos de  $\mathbb{R}^2$ , y esto implica que también lo es cada  $\Delta_k$  con  $k \geq 2$  porque  $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  es un homeomorfismo entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Para comprobar que los conjuntos  $\Delta_k$  son disjuntos dos a dos, emplearemos un argumento inductivo respecto de  $k$  similar al utilizado en la Proposición III.7.6 para demostrar que las curvas  $\Gamma_\ell$  son disjuntas dos a dos.

Es inmediato que  $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$ , y suponiendo que los conjuntos  $\{\Delta_\ell\}_{0 \leq \ell \leq k}$  son disjuntos dos a dos se cumple, para todo para  $2 \leq \ell \leq k$

$$\Delta_\ell \cap \Delta_{k+1} = \psi(\Delta_{\ell-1}) \cap \psi(\Delta_k) = \psi(\Delta_{\ell-1} \cap \Delta_k) = \psi(\emptyset) = \emptyset.$$

Como además  $\Delta_{k+1} \subset \phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{H}$  no interseca ni a  $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{H}$  ni a  $\Delta_1 \subset \mathcal{H} \setminus \phi(\mathcal{R})$ , concluimos que  $\Delta_{k+1}$  no interseca a  $\Delta_\ell$  para todo índice  $0 \leq \ell \leq k$ .  $\square$

**Proposición III.7.9** *El exterior de la imagen de la aplicación  $\psi^k : \mathcal{H} \rightarrow \psi^k(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^2$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Cl}(\psi^k(\mathcal{H})) = \Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_k$ .*

*Demostración.* Comenzamos demostrando que

$$\text{Cl}(\psi(\mathcal{H})) \setminus \text{Cl}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) = \psi(\mathcal{H} \setminus \text{Cl}(\psi^k(\mathcal{H}))). \quad (\text{III.7.1})$$

En efecto, con las notaciones de III.7.6 se tiene  $\mathcal{H} \cap \Gamma_0 = \emptyset$  y  $\Gamma_\ell = \psi^\ell(\Gamma_0)$  para  $\ell \geq 1$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{Cl}(\psi(\mathcal{H})) \setminus \text{Cl}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) &= (\psi(\mathcal{H}) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1) \setminus \left( \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \bigcup_{\ell=2}^{k+1} \Gamma_\ell \right) \\ &= \psi(\mathcal{H}) \setminus \left( \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \cup \bigcup_{\ell=2}^{k+1} \Gamma_\ell \right) = \psi(\mathcal{H}) \setminus \left( \psi^{k+1}(\mathcal{H}) \cup \bigcup_{\ell=1}^k \psi(\Gamma_\ell) \right) \\ &= \psi \left( \mathcal{H} \setminus \left( \psi^k(\mathcal{H}) \cup \bigcup_{\ell=1}^k \Gamma_\ell \right) \right) = \psi \left( \mathcal{H} \setminus \left( \psi^k(\mathcal{H}) \cup \bigcup_{\ell=0}^k \Gamma_\ell \right) \right) = \psi(\mathcal{H} \setminus \text{Cl}(\psi^k(\mathcal{H}))), \end{aligned}$$

Visto esto demostramos el enunciado por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$  la igualdad es clara. Supongamos ahora que también es cierta para  $k \geq 1$ . Entonces, para  $k + 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \text{Cl}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) &= (\text{Cl}(\psi(\mathcal{H})) \cup \Delta_0 \cup \Delta_1) \setminus \text{Cl}(\psi^{k+1}(\mathcal{H})) \\ &= \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup (\text{Cl}(\psi(\mathcal{H})) \setminus \text{Cl}(\psi^{k+1}(\mathcal{H}))) = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \psi(\mathcal{H} \setminus \text{Cl}(\psi^k(\mathcal{H}))) \\ &= \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \psi(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_k) = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup (\Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_{k+1}) = \bigcup_{\ell=0}^{k+1} \Delta_\ell, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

Finalmente, del resultado anterior se deduce el siguiente, que se probó en nuestro artículo [U1], y que da respuesta negativa a la Cuestión [FG2, 7.3.2] propuesta por Fernando–Gamboa.

**Teorema III.7.10** *Para cada entero  $k \geq 1$  existe una aplicación polinómica  $\Phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen  $\mathcal{S}_k := \Phi_k(\mathbb{R}^2)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera está formada por  $k + 1$  componentes conexas, que son semilíneas paramétricas. Además, el exterior de  $\mathcal{S}_k$  también tiene  $k + 1$  componentes conexas.*

*Demostración.* Recordamos que la imagen de la aplicación polinómica

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y(xy - 1), (xy - 1)^2 + x^2)$$

es el semiplano abierto  $\mathcal{H} := \{y > 0\}$ . En virtud de las Proposiciones III.7.7 y III.7.9, la aplicación  $\Phi_k := \psi^k \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cumple el enunciado pues la frontera de  $\mathcal{S}_k$  es el conjunto  $\Gamma_0 \cup \cdots \cup \Gamma_k$  y su exterior es  $\Delta_0 \cup \cdots \cup \Delta_k$ .  $\square$



## Complementarios de poliedros convexos como imágenes polinómicas y regulares

Actualmente no sabemos (y es previsible que no lo sepamos por un largo período de tiempo) caracterizar geoméricamente los subconjuntos semialgebraicos  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  que satisfacen  $r(\mathcal{S}) < +\infty$  o  $p(\mathcal{S}) < +\infty$ . Por ello, buscamos familias suficientemente generales de conjuntos semialgebraicos cuyos miembros satisfagan esta propiedad. En el Capítulo II vimos algunos ejemplos básicos en esta dirección, y en éste encontramos nuevos conjuntos  $\mathcal{S}$  cuyos invariantes  $r(\mathcal{S})$  o  $p(\mathcal{S})$  son finitos. En los dos próximos capítulos centraremos nuestra atención en conjuntos semialgebraicos cuya frontera es lineal a pedazos, siempre que satisfagan las obstrucciones obtenidas en el capítulo anterior. Es natural pensar en la familia de los poliedros convexos, sus interiores y los complementarios de ambos. Por supuesto, para todos los poliedros convexos acotados el invariante  $p$  es infinito y retrasaremos el cálculo del invariante  $r$  para los poliedros convexos hasta el siguiente capítulo.

En este capítulo nos centraremos en determinar qué podemos decir de los invariantes  $p$  y  $r$  para el *complementario* de un poliedro convexo en  $\mathbb{R}^n$  o de su interior. Por supuesto, deberemos desechar de nuestro estudio en primer lugar aquellos poliedros convexos cuyo complementario no es conexo.

Si  $n = 1$  un poliedro convexo desconecta  $\mathbb{R}$  si y sólo si es acotado; por tanto en este caso desecharemos los poliedros acotados. Por otra parte, si  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo cuyo complementario  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  no es conexo, entonces, como consecuencia del Lema I.4.14,  $\mathcal{K}$  es degenerado y, por el Lema I.4.13, existen un entero  $1 \leq k \leq n$  y un poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  tales que, tras un cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ . Como  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \mathcal{P})$  no es conexo tampoco puede serlo el factor  $\mathbb{R}^{n-k} \setminus \mathcal{P}$ , lo que implica, por ser  $\mathcal{P}$  no degenerado, que  $k = n - 1$  y  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$  es un poliedro convexo que desconecta  $\mathbb{R}$ , es decir, un poliedro acotado. Si  $\mathcal{P}$  es un punto,  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un hiperplano, mientras que si  $\mathcal{P}$  es afínmente equivalente al intervalo cerrado  $[0, 1]$ , entonces  $\mathcal{K}$  es una *franja*, es decir, un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^n$  afínmente equivalente a  $\mathcal{K} = [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ ; las franjas bidimensionales  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  las denominaremos *bandas*.

Nuestro objetivo en este capítulo es abordar la veracidad el siguiente problema.

**Problema IV.1** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo que no es una franja ni un hiperplano. Determinar si  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}_v \mathcal{K}$  son imágenes polinómicas o regulares de  $\mathbb{R}^n$ .*

Los poliedros convexos y sus interiores son, por su propia definición, semialgebraicos básicos. Por tanto, si  $\dim(\mathcal{K}) < n$  y  $\mathcal{K}$  no es un hiperplano, se deduce de la Proposición II.2.1 que  $p(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}_v \mathcal{K}) = p(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = n$ , por lo que en relación con el enunciado anterior sólo falta por abordar el caso  $\dim(\mathcal{K}) = n$ . A lo largo de este capítulo veremos que la técnica que desarrollamos presenta algunas limitaciones, pero nos permite demostrar (usando también los resultados ya conocidos de la Sección III.2 para el caso de dimensión 1) las igualdades recogidas en la siguiente tabla. Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional. Entonces, si  $\mathcal{S} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y por tanto  $\text{Cl} \mathcal{S} = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}_v \mathcal{K}$  se cumple que:

	$\mathcal{K}$ acotado		$\mathcal{K}$ no acotado		
	$n = 1$	$n \geq 2$	$n = 1$	$2 \leq n \leq 3$	$n \geq 4$
$r(\mathcal{S}), r(\text{Cl} \mathcal{S})$	$+\infty$	$n$	2, 1	$n$	$n$
$p(\mathcal{S}), p(\text{Cl} \mathcal{S})$					desconocidos

La estrategia que utilizaremos se basa fundamentalmente en la generalización al caso  $n$ -dimensional con  $n \geq 2$  de las herramientas desarrolladas por el autor de esta Memoria en su trabajo [U2] en el que se aborda y resuelve completamente el problema IV.IV.1 para  $n = 2$ . La obstrucción para generalizar a dimensión  $n \geq 4$  las herramientas empleadas para  $n = 2$  (que no sirven para calcular los invariantes  $p(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$  y  $p(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}))$  para poliedros convexos no acotados  $\mathcal{K}$  de dimensión  $n \geq 4$ ) se concentra fundamentalmente en el hecho de que la siguiente propiedad de proyección es exclusiva de los poliedros convexos de dimensión 2 (véanse el Lema IV.1.12 y el Apéndice C).

(IV.5) *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo de dimensión  $n$ . Entonces existen un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  y una recta vectorial  $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^n$  tales que la proyección canónica  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \vec{\ell}$  satisface  $\pi(\mathcal{K}) = \pi(\mathcal{K} \cap H)$ .*

Tras esta discusión y el análisis anterior, nuestro objetivo será probar los siguientes resultados a lo largo de las secciones que conforman este capítulo:

**Teorema IV.2** *Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo, acotado y  $n$ -dimensional que no es una franja. Entonces,  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  son imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema IV.3** *Sean  $2 \leq n \leq 3$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo, no acotado y  $n$ -dimensional que no es una franja. Entonces,  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  son imágenes polinómicas de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema IV.4** *Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo, no acotado y  $n$ -dimensional que no es una franja. Entonces,  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  son imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ .*

## IV.1. Herramientas de recorte de tipo I

El objetivo de esta subsección es presentar y desarrollar las herramientas fundamentales que utilizaremos a lo largo de este capítulo para demostrar la parte de los Teoremas IV.2, IV.3 y IV.4 relativas a los complementarios de poliedros. En toda la sección  $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$  denota al anillo de polinomios  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

### IV.1.a. Primera posición de recorte y aplicaciones recortantes de tipo I.

Consideraremos en  $\mathbb{R}^n$  la fibración natural obtenida a partir de la proyección

$$\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Las fibras  $\pi_n^{-1}(a, 0)$  de  $\pi_n$  son rectas paralelas al vector  $\vec{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$  para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Dado un poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , la intersección

$$J_a := \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K} \tag{IV.1.1}$$

puede ser vacía o un intervalo cerrado (acotado o no) cuyo interior, como variedad topológica con borde, es  $\text{Int}_v J_a$  y cuya frontera es  $\partial J_a$ . Denotamos  $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  al conjunto de los puntos  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  tales que  $\text{Int}(\mathcal{K}) \cap \pi_n^{-1}(a, 0) = \emptyset$  y observamos que los puntos  $a \in \mathfrak{F}$  satisfacen que o bien  $J_a = \emptyset$  o bien  $J_a$  esta contenido en  $\partial \mathcal{K}$  y de hecho en una faceta de  $\mathcal{K}$ . Se cumple que

$$\text{Int}(\mathcal{K}) \cap \pi_n^{-1}(a, 0) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \in \mathfrak{F}, \\ \text{Int}_v J_a & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y por tanto  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathfrak{F}} \text{Int}_v J_a$ . Recordamos que un hiperplano  $H$  no es paralelo al vector  $\vec{e}_n$  si y sólo si cualquiera de sus ecuaciones  $h$  de grado uno cumple  $\text{deg}_{x_n}(h) = 1$ .

**Lema IV.1.1** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  tales que  $J_a \neq \emptyset$  y sea  $p \in \partial J_a$ . Entonces, existe una faceta  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  no paralela a  $\vec{e}_n$  tal que  $p \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.* Observamos en primer lugar que basta probar que existe una faceta  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $p$ , pero no contiene a  $J_a$ . Para ello, procederemos por inducción sobre la dimensión  $n$  de  $\mathcal{K}$ . Si  $n = 1$ ,  $J_a = \mathcal{K}$  y  $p$  pertenece obviamente a una faceta de  $\mathcal{K}$  que no contiene a  $J_a$ . Para  $n > 1$ , observamos que como  $p \in \partial \mathcal{K}$  existe una faceta  $\mathcal{F}_0$  de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $p$ . Si  $\mathcal{F}_0$  no contiene a  $J_a$ , hemos terminado; en caso contrario,  $\mathcal{F}_0$  es un poliedro de dimensión  $n - 1$  que cumple  $J_a = \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{F}_0$ ; por consiguiente, existe una faceta  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{F}_0$  que contiene a  $p$ , pero no contiene a  $J_a$ . Como  $\dim \mathcal{E} = n - 2$  y  $\dim \mathcal{F}_0 = n - 1$ , existe una faceta de  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  que no contiene a  $J_a$  tal que  $\mathcal{E} = \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}$ , que es por tanto la faceta buscada.  $\square$

**Definiciones IV.1.2** (1) Dado un poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  decimos que  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte débil si:

(i) Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  el conjunto  $\mathcal{J}_a$  está acotado.

Si además se cumple la siguiente condición, diremos que  $\mathcal{K}$  está situado *en primera posición de recorte fuerte*:

(ii) El conjunto  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  es acotado, donde

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} := \{a := (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : a_{n-1} \leq 0, \mathcal{J}_a \neq \emptyset, (a, 0) \notin \mathcal{J}_a\}.$$

Más aún, si  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} = \emptyset$ , diremos que la primera posición de recorte fuerte de  $\mathcal{K}$  es *óptima*.

(2) Por otra parte, decimos que la primera posición de recorte débil o fuerte de  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es *extrema con respecto a su faceta*  $\mathcal{F}$  si  $\mathcal{F} \subset \{x_{n-1} = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$ .

**Lema IV.1.3** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional que está situado en primera posición de recorte fuerte. Entonces, existe  $N > 0$  tal que

$$A := \bigcup_{a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}} \partial \mathcal{J}_a \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{K}} \times [-N, N]$$

*Demostración.* En efecto, como  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte fuerte, el conjunto  $\mathcal{J}_a$  está acotado para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Como consecuencia del Lema IV.1.1, para cada  $a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  los extremos  $(a, p_a)$  y  $(a, q_a)$  del intervalo  $\mathcal{J}_a = \{a\} \times [p_a, q_a]$  pertenecen a facetas de  $\mathcal{K}$  no paralelas al vector  $\vec{e}_n$ . Sean  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$  las facetas de  $\mathcal{K}$  no paralelas al vector  $\vec{e}_n$  y  $h_i := b_{0i} + b_{1i}x_1 + \dots + b_{ni}x_n$  una ecuación no nula del hiperplano  $H_i$  generado por  $\mathcal{F}_i$  para  $1 \leq i \leq s$ . Como  $\mathcal{F}_i$  no es paralela al vector  $\vec{e}_n$  podemos suponer que  $b_{ni} = 1$ . Definimos  $g_i := -b_{0i} - b_{1i}x_1 - \dots - b_{n-1,i}x_{n-1}$  y observamos que para cada  $a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  existen  $1 \leq i, j \leq s$  tales que  $g_i(a) = p_a$  y  $g_j(a) = q_a$ ; por tanto,  $p_a, q_a \in \{g_1(a), \dots, g_s(a)\}$ . Como  $\text{Cl} \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  es compacto, las funciones  $g_i$  son acotadas sobre  $\text{Cl} \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  y por tanto existe  $N > 0$  tal que  $p_a, q_a \in [-N, N]$  para cada  $a \in \mathfrak{A}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Definición IV.1.4** Sean  $P, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  dos polinomios no nulos tales que  $\deg_{x_n}(Q(a, \mathbf{x}_n)) \leq 2 \deg_{x_n}(P(a, \mathbf{x}_n))$  para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $Q$  es estrictamente positivo en  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $\beta_{P,Q}$  la función regular

$$\beta_{P,Q}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_n \left( 1 - \mathbf{x}_{n-1} \frac{P^2(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} \right),$$

y definimos la *aplicación recortante*  $F_{P,Q}$  de tipo I asociada a  $P$  y  $Q$  como la aplicación regular

$$F_{P,Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_{P,Q}(x)).$$

Siempre podemos suponer que  $P, Q$  son primos entre sí y que si  $Q := M > 0$  es constante entonces  $F_{P,M}$  es una aplicación polinómica.

Recordamos que el grado de una función racional  $h := f/g \in \mathbb{R}(\mathbf{x}) := \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  es la diferencia entre el grado del numerador  $f$  y el grado del denominador  $g$ .



**Observaciones IV.1.5** Las siguientes propiedades se comprueban inmediatamente:

- (i) Para cada  $a := (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , la función regular  $\beta_{P,Q}^a(\mathbf{x}_n) := \beta_{P,Q}(a, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}(\mathbf{x}_n)$  (que depende sólo de la variable  $\mathbf{x}_n$ ) tiene grado impar mayor o igual que 1; por tanto,  $\beta_{P,Q}^a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Además, si denotamos  $a' := (a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$  se cumple que  $\beta_{P,Q}(a', 0, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n$ .
- (ii) Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  se satisface la igualdad  $F_{P,Q}(\pi_n^{-1}(a, 0)) = \pi_n^{-1}(a, 0)$  y por tanto  $F_{P,Q}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .
- (iii) El conjunto de puntos fijos de  $F_{P,Q}$  es  $\{x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1}x_n P(x) = 0\}$ .
- (iv) La condición  $\deg_{\mathbf{x}_n}(Q(a, \mathbf{x}_n)) \leq 2 \deg_{\mathbf{x}_n}(P(a, \mathbf{x}_n))$  para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  se cumple si  $\deg_{\mathbf{x}_n}(Q) \leq 2 \deg(P) = 2 \deg_{\mathbf{x}_n}(P)$ .
- (iv) Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  las facetas de  $\mathcal{K}$  contenidas en hiperplanos no paralelos a  $\vec{e}_n$ . Sean  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  polinomios de grado uno que se anulan en los hiperplanos  $H_1, \dots, H_r$  que contienen respectivamente las facetas  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ , y definimos  $P := f_1 \cdots f_r$ . Entonces,  $P$  se anula sobre  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  y tiene grado  $\deg(P) = \deg_{\mathbf{x}_n}(P) = r$ .

A continuación recordamos el siguiente resultado elemental de acotación polinómica.

**Lema IV.1.6** Sean  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio de grado  $d \geq 0$ ,  $M$  la suma de los valores absolutos de los coeficientes no nulos de  $P$  y  $m$  un entero positivo tal que  $d \leq 2m$ . Entonces,  $|P(x)| \leq M(1 + \|x\|^2)^m$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Escribimos  $P := \sum_{a_\nu \neq 0} a_\nu \mathbf{x}^\nu$ , donde  $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n)$ ,  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{x}^\nu := x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$ . Para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$|x^\nu| = |x_1|^{\nu_1} \cdots |x_n|^{\nu_n} \leq \prod_{i=1}^n (1 + \|x\|^2)^{\nu_i/2} \leq (1 + \|x\|^2)^m$$

luego

$$|P(x)| \leq \sum_{a_\nu \neq 0} |a_\nu| |x^\nu| \leq \sum_{a_\nu \neq 0} |a_\nu| (1 + \|x\|^2)^m = M(1 + \|x\|^2)^m,$$

como queríamos demostrar. □

**Lema IV.1.7** Sea  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio no nulo tal que  $d := \deg(P) = \deg_{\mathbf{x}_n}(P)$ . Entonces,

- (i) Para cada  $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  estrictamente positivo con  $\deg_{\mathbf{x}_n}(Q) \leq 2 \deg(P)$ , la derivada parcial  $\frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial \mathbf{x}_n}$  tiene valor constante 1 sobre el conjunto  $\{x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1}P(x) = 0\}$ .

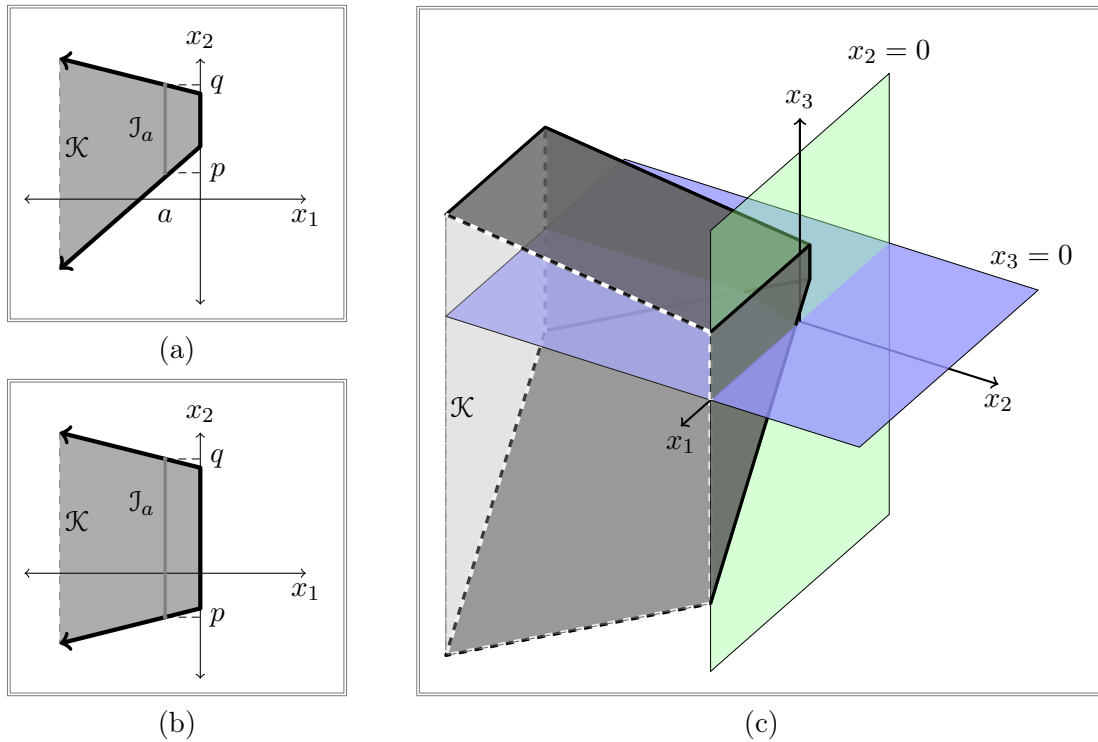


Figura IV.1.1: (a) muestra un polígono en primera posición de recorte fuerte, (b) muestra un polígono en primera posición de recorte fuerte y óptima, y (c) muestra un poliedro en primera posición de recorte fuerte. En los tres casos el poliedro está en posición extrema respecto a una de sus facetas.

(ii) Para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  existe un entero positivo  $M_K$  tal que si  $M \geq M_K$  la derivada parcial  $\frac{\partial \beta_{P,M}}{\partial x_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$ .

(iii) Existe  $M > 0$  tal que el polinomio estrictamente positivo  $Q := M(1 + x_{n-1}^2)(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^d$  cumple que  $\deg_{x_n}(Q) = 2 \deg(P) = 2 \deg_{x_n}(P)$  y la derivada parcial  $\frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial x_n}$  es estrictamente positiva en el conjunto  $\{x_{n-1} \leq 0\}$ .

*Demostración.* Primero observamos que

$$\frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial x_n} = \left(1 - x_{n-1} \frac{P^2(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}\right) - x_{n-1} x_n \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} \left(2 \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) - \frac{\partial Q}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}\right)$$

y por tanto, es claro que se cumple (i), pues  $x_{n-1} P(\mathbf{x})$  divide a  $\frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial x_n}(\mathbf{x}) - 1$ .

Para probar (ii), denotamos  $M_K \geq 0$  el máximo de la función continua

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left|2x_{n-1}x_n P(x) \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)\right|.$$

sobre el compacto  $K \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$ . Se cumple que si  $M \geq M_K$ , entonces  $\frac{\partial \beta_{P,M}}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$ .

Para probar (iii), observamos en primer lugar que  $\deg(\mathbf{x}_n P \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}) \leq 2d$  y por tanto, como consecuencia del Lema IV.1.6, existe  $M > 0$  tal que

$$\left| x_n P(x) \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| + |dP^2(x)| \leq \frac{M}{2}(1 + \|x\|^2)^d$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . Definimos  $Q := M(1 + \mathbf{x}_{n-1}^2)(1 + \|x\|^2)^d$  y observamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}) \frac{1}{Q(\mathbf{x})} = \frac{2d\mathbf{x}_n}{1 + \|x\|^2}.$$

Utilizando que  $2|x_{n-1}| \leq (1 + x_{n-1}^2)$  y que  $|x_n|^2 < 1 + \|x\|^2$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial \mathbf{x}_n}(x) &\geq \left(1 - x_{n-1} \frac{P^2(x)}{Q(x)}\right) - \frac{2|x_{n-1}|}{Q} \left( \left| x_n P(x) \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| + |dP^2(x)| \frac{|x_n|^2}{1 + \|x\|^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} - x_{n-1} \frac{P^2(x)}{Q(x)} > 0, \end{aligned}$$

para cada  $x \in \{x_{n-1} \leq 0\}$ . □

**Lema IV.1.8** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional situado en primera posición de recorte débil y  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  las facetas de  $\mathcal{K}$  contenidas en hiperplanos no paralelos a  $\vec{e}_n$ . Sea  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio que se anula sobre  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  y tiene grado  $\deg(P) = \deg_{\mathbf{x}_n}(P)$  (véase la Observación IV.1.5). Entonces, existe  $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  estrictamente positivo, con  $\deg_{\mathbf{x}_n}(Q) \leq 2 \deg(P)$  tal que

- (i)  $F_{P,Q}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K} \cap \{x_{n-1} \leq 0\})$ ,
- (ii)  $F_{P,Q}(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\})$ .

Si además,  $\mathcal{K}$  esta situado en primera posición de recorte fuerte, podemos elegir  $Q$  constante.

*Demostración.* Denotamos  $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$  y sea  $\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  el conjunto formado por aquellos  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  tales que  $\pi_n^{-1}(a, 0) \cap \text{Int}(\mathcal{K}) = \emptyset$ . Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &:= \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}\} & \mathcal{N}_a &:= \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})\} \\ \mathcal{S}_a &:= \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}'\} & \mathcal{T}_a &:= \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\})\}. \end{aligned}$$

Observamos que  $\mathcal{M}_a \subset \mathcal{N}_a$ ,  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{T}_a$ , y además

$$\mathcal{N}_a = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathfrak{F}, \\ \text{Cl}(\mathcal{M}_a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_a = \begin{cases} \mathcal{M}_a & \text{si } a_{n-1} \leq 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } a_{n-1} > 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_a = \begin{cases} \mathcal{N}_a & \text{si } a_{n-1} \leq 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } a_{n-1} > 0. \end{cases}$$

Como consecuencia de IV.1.a, tenemos que:

- (1)  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K} = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} (\{a\} \times \mathcal{M}_a)$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}' = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} (\{a\} \times \mathcal{S}_a)$ .
- (2)  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} (\{a\} \times \mathcal{N}_a)$ .
- (3)  $\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} (\{a\} \times \mathcal{T}_a)$ .

(IV.1.8.6) Llegados a este punto, elegimos  $Q$  del modo siguiente. Si  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte,  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  está acotado (véase la Definición IV.1.2) y existe, por el Lema IV.1.3, un  $N > 0$  tal que  $A := \bigcup_{a \in \mathfrak{A}_{\mathcal{K}}} \partial \mathcal{J}_a \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{K}} \times [-N, N]$ , donde  $\mathcal{J}_a := \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K}$ . Por el Lema IV.1.7 (ii) aplicado al compacto  $K := \text{Cl}(\mathfrak{A}) \times [-N, N]$ , existe  $Q := M > 0$  tal que la derivada parcial  $\frac{\partial \beta_{P,M}}{\partial x_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$ . Por otra parte, si  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte débil existe, por el Lema IV.1.7, un polinomio estrictamente positivo  $Q$  tal que  $\deg_{x_n}(Q) = 2 \deg(P) = 2 \deg_{x_n}(P)$  y la derivada parcial  $\frac{\partial \beta_{P,Q}}{\partial x_n}$  es estrictamente positiva en el conjunto  $\{x_{n-1} \leq 0\}$ .

Como la aplicación  $F_{P,Q}$  preserva las rectas  $\pi_n^{-1}(a, 0)$ , para demostrar las igualdades (i) y (ii) del enunciado es suficiente comprobar que

$$\beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = \mathcal{S}_a \quad \text{y} \quad \beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \mathcal{T}_a \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (\text{IV.1.2})$$

Fijamos  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ ; para probar las igualdades (IV.1.2) distinguimos varios casos en función de las características de  $a$ .

**Caso 1:** Si  $\mathcal{M}_a = \mathbb{R}$ , y puesto que  $\beta_{P,Q}^a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (véase la Observación IV.1.5(i)) tenemos

$$\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = \mathbb{R} = \mathcal{S}_a = \mathcal{T}_a.$$

**Caso 2:** Si  $a_{n-1} \leq 0$  y  $\mathcal{M}_a := ]-\infty, p[ \cup ]q, +\infty[$ , donde  $p \leq q$ , existen índices  $1 \leq i, j \leq r$  tales que  $(a, p) \in \mathcal{F}_i$ ,  $(a, q) \in \mathcal{F}_j$  (véase el Lema IV.1.1) y  $\mathcal{N}_a = ]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$  o  $\mathcal{N}_a = \mathbb{R}$ . En este último caso  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \beta_{P,Q}^a(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \mathcal{T}_a$ .

A continuación calculamos las imágenes  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a)$  y  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a)$  en las situaciones posibles correspondientes al Caso 2.

(2.1) Si  $q \geq 0$ , entonces  $\beta_{P,Q}^a(q) = q$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_{P,Q}^a(t) = +\infty$  y, como  $a_{n-1} \leq 0$ ,

$$\beta_{P,Q}^a(t) = t \left( 1 - \frac{a_{n-1} P^2(a, t)}{Q(a, t)} \right) \geq t > q \quad \forall t > q.$$

Por continuidad se tiene  $\beta_{P,Q}^a(]q, +\infty[) = ]q, +\infty[$  y también  $\beta_{P,Q}^a([q, +\infty[) = [q, +\infty[$ .

(2.2) Análogamente, si  $p \leq 0$  tenemos

$$\beta_{P,Q}^a(p) = p, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \beta_{P,Q}^a(t) = -\infty \quad \text{y} \quad \beta_{P,Q}^a(t) \leq t < p \quad \forall t < p.$$

De nuevo por continuidad, resulta  $\beta_{P,Q}^a(]-\infty, p[) = ]-\infty, p[$  y  $\beta_{P,Q}^a(]-\infty, p]) = ]-\infty, p]$ .

(2.3) Ahora, si  $q < 0$ , se cumple que  $(a, 0) \notin \mathcal{J}_a$ , es decir,  $a \in \mathfrak{A}$  y por IV.1.8.6 la derivada  $(\beta_{P,Q}^a)' := \frac{\partial \beta_{P,Q}^a}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva en el intervalo  $[q, 0] \subset [-N, N]$ . En particular,  $\beta_{P,Q}^a$  es una función creciente en el intervalo  $[q, 0]$ , luego  $\beta_{P,Q}^a(]q, 0]) = ]q, 0]$ , ya que  $\beta_{P,Q}^a(q) = q$  y  $\beta_{P,Q}^a(0) = 0$ . Más aún, por lo visto en (2.1),  $\beta_{P,Q}^a(]0, +\infty[) = ]0, +\infty[$  y por tanto  $\beta_{P,Q}^a(]q, +\infty[) = ]q, +\infty[$  y  $\beta_{P,Q}^a([q, +\infty]) = [q, +\infty[$ .

(2.4) De modo análogo, si  $p > 0$ , se cumple que  $(a, 0) \notin \mathcal{J}_a$ , es decir,  $a \in \mathfrak{A}$  y por IV.1.8.6 la derivada  $(\beta_{P,Q}^a)' := \frac{\partial \beta_{P,Q}^a}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva en el intervalo  $[0, p]$ . En particular  $\beta_{P,Q}^a$  es una función creciente en el intervalo  $[0, p] \subset [-N, N]$ , y puesto que  $\beta_{P,Q}^a(p) = p$  y  $\beta_{P,Q}^a(0) = 0$  se sigue que  $\beta_{P,Q}^a([0, p]) = [0, p]$ . Más aún, por lo visto en (2.2),  $\beta_{P,Q}^a(]-\infty, 0]) = ]-\infty, 0]$ . En consecuencia  $\beta_{P,Q}^a(]-\infty, p]) = ]-\infty, p]$  y  $\beta_{P,Q}^a(]-\infty, p[) = ]-\infty, p[$ .

Del análisis anterior deducimos que  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = ]-\infty, p[ \cup ]q, +\infty[ = \mathcal{M}_a = \mathcal{S}_a$  y

$$\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \begin{cases} ]-\infty, p[ \cup ]q, +\infty[ = \mathcal{J}_a & \text{si } \mathcal{N}_a = ]-\infty, p[ \cup ]q, +\infty[, \\ \mathbb{R} = \mathcal{J}_a & \text{si } \mathcal{N}_a = \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Caso 3:** Si  $a_{n-1} > 0$  y  $\mathcal{M}_a = ]-\infty, p[ \cup ]q, +\infty[$  con  $p \leq q$  entonces, al ser  $\beta_{P,Q}^a$  una función regular de grado impar mayor o igual que uno con coeficiente principal negativo (pues hemos excluido por hipótesis la posibilidad  $P(a, \mathbf{x}_n) \equiv 0$ ), tenemos

$$\begin{aligned} \beta_{P,Q}^a(p) &= p, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \beta_{P,Q}^a(t) &= +\infty; \\ \beta_{P,Q}^a(q) &= q \geq p, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta_{P,Q}^a(t) &= -\infty. \end{aligned}$$

De nuevo por continuidad,  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = \mathbb{R}$  si  $p < q$ . Cuando  $p = q$  un análisis más detallado de la derivada de  $\beta_{P,Q}^a$  (con respecto a  $\mathbf{x}_n$ ) confirma que también en este caso se satisface  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = \mathbb{R}$ . En efecto, por el Lema IV.1.7,  $(\beta_{P,Q}^a)'(p) = \frac{\partial \beta_{P,Q}^a}{\partial \mathbf{x}_n}(a, p) = 1$ , luego  $\beta_{P,Q}^a$  es una función creciente en un entorno de  $p = q$ . Existe por tanto  $\varepsilon > 0$  de modo que  $\beta_{P,Q}^a(p - \varepsilon) < \beta_{P,Q}^a(p) < \beta_{P,Q}^a(p + \varepsilon)$ , y, por el comportamiento de la función  $\beta_{P,Q}^a(t)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , tenemos

$$]-\infty, \beta_{P,Q}^a(p)] \subset \beta_{P,Q}^a([p + \varepsilon, +\infty[) \quad \text{y} \quad [\beta_{P,Q}^a(p), +\infty[ \subset \beta_{P,Q}^a(]-\infty, p - \varepsilon]),$$

por lo que  $\beta_{P,Q}^a(\mathcal{N}_a) = \beta_{P,Q}^a(\mathcal{M}_a) = \mathbb{R} = \mathcal{S}_a = \mathcal{J}_a$ , lo que prueba las igualdades (IV.1.2).  $\square$

**IV.1.b. Colocación en primera posición de recorte. Limitaciones.** El objetivo de esta subsección es estudiar cuándo un poliedro convexo no degenerado se puede colocar, tras un cambio afín de coordenadas, en primera posición de recorte débil o fuerte. Es evidente que las posibles obstrucciones sólo se presentan si el poliedro no es acotado.

Veremos en primer lugar dos caracterizaciones de la primera posición de recorte fuerte en términos de proyecciones que serán de gran utilidad a lo largo de la sección. Una vez hecho esto, veremos que para dimensión 2, todo polígono se puede situar en la mejor de las posiciones posibles. Para  $n = 3$  todo poliedro convexo no acotado se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas, mientras que para  $n \geq 4$  sólo podemos asegurarlo para los poliedros convexos acotados. En el caso de poliedros convexos no acotados, en general sólo es posible situarlos en primera posición de recorte débil y extrema con respecto a alguna de sus facetas (véase la Observación IV.1.16 para  $n = 4$ ).

**Lema IV.1.9 (Primera posición de recorte fuerte I)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado en primera posición de recorte débil. Para cada  $M \geq 0$  escribimos  $\mathcal{K}'_M := (\mathcal{K} \cap \{x_{n-1} \leq 0\}) \cup ]-M, M[^n$ . Entonces,  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte si y sólo si existe  $M \geq 0$  tal que  $\pi_n(\mathcal{K}'_M) = \mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\}$ . Además, dicha posición es óptima si y sólo si podemos elegir  $M = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte. Entonces,  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  está acotado (véase la Definición IV.1.2) y como consecuencia del Lema IV.1.3 el conjunto  $A := \pi_n^{-1}(\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}) \cap \partial\mathcal{K}$  también es acotado. Sea  $M \geq 0$  tal que  $A \subset ]-M, M[^n$  que elegimos como 0 si  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  es vacío. Observamos que para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  se cumple que si la intersección  $\mathcal{J}'_a := \mathcal{K}'_M \cap \pi_n^{-1}(a, 0)$  es no vacía, entonces  $(a, 0) \in \mathcal{J}'_a$ , luego  $\pi_n(\mathcal{J}'_a) = (a, 0) \in \mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\}$ . Por consiguiente,

$$\mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\} = \pi_n(\mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\}) \subset \pi_n(\mathcal{K}'_M) \subset \mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\},$$

es decir,  $\pi_n(\mathcal{K}'_M) = \mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\pi_n(\mathcal{K}'_M) = \mathcal{K}'_M \cap \{x_n = 0\}$  para cierto  $M \geq 0$ . Entonces para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  con  $a_{n-1} \leq 0$  tal que el conjunto  $\mathcal{J}'_a := \mathcal{K}'_M \cap \pi_n^{-1}(a, 0) \neq \emptyset$  se cumple que  $\{(a, 0)\} = \mathcal{J}'_a \cap \{x_n = 0\}$ . Por tanto, el conjunto  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} \subset ]-M, M[^n$  está acotado y de hecho, si  $M = 0$  el conjunto  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  es vacío. La primera posición de recorte débil de  $\mathcal{K}$  sumado a lo anterior, demuestra que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte. Además, si  $M = 0$  dicha posición es óptima.  $\square$

**Proposición IV.1.10 (Primera posición de recorte fuerte II)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y no degenerado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .
- (ii) Se cumplen las siguientes condiciones:
  - $\mathcal{F} \subset \{x_{n-1} = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$ ,
  - $\vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}$ ,

- Existe un hiperplano  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  tal que: su dirección  $\vec{\Pi}$  contiene a la recta vectorial  $\vec{\ell}_n$  generada por  $\vec{e}_n$ ,  $\Pi$  corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$ , las aristas acotadas de  $\mathcal{K}$  están contenidas en  $\text{Int}(\Pi^-)$  y  $\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi) = \mathcal{K} \cap \Pi \cap \{x_n = 0\}$ .

*Demostración.* Comenzamos demostrando que (i) implica (ii). Las inclusiones  $\mathcal{F} \subset \{x_{n-1} = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$  son consecuencia directa de que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a la faceta  $\mathcal{F}$ ; en particular,  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \mathcal{J}_a \neq \emptyset, (a, 0) \notin \mathcal{J}_a\}$  y este conjunto es acotado. Por la Proposición I.4.26, se cumplen las dos condiciones que nos faltan en el aserto (ii).

Recíprocamente, en las hipótesis de (ii) se cumple que

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \mathcal{J}_a \neq \emptyset, (a, 0) \notin \mathcal{J}_a\}$$

es, por la Proposición I.4.26, acotado,  $\mathcal{F} \subset \{x_{n-1} = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$ . Además, por la Observación I.4.23 todas las intersecciones  $\pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K} \subset ((a, 0) + \vec{\Pi}) \cap \mathcal{K}$  son acotadas. Por tanto,  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema IV.1.11 (Eliminación controlada de facetas)** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Supongamos que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte débil y extrema con respecto a  $\mathcal{F}_1 := \mathcal{K} \cap H_1$ . Entonces,  $\mathcal{K}_{1,\times} := \bigcap_{j=2}^m H_j^+$  está situado en primera posición de recorte débil. Además, si  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte también lo está  $\mathcal{K}_{1,\times}$  y si dicha posición de  $\mathcal{K}$  es óptima, también lo es la de  $\mathcal{K}_{1,\times}$ .

*Demostración.* Supongamos por un momento que ya hemos probado que  $\mathcal{K}_{1,\times}$  está en primera posición de recorte débil. Nótese que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{1,\times} \cap \{x_{n-1} \leq 0\}$  porque  $H_1^+ = \{x_{n-1} \leq 0\}$ . Por tanto,  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}} = \mathfrak{A}_{\mathcal{K}_{1,\times}}$  (véase la Definición IV.1.2), luego  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$  es acotado o vacío si y sólo si  $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}_{1,\times}}$  lo es. En consecuencia, si  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte también  $\mathcal{K}_{1,\times}$  lo está y si dicha posición para  $\mathcal{K}$  es óptima también lo es la de  $\mathcal{K}_{1,\times}$ .

Por tanto, sólo queda pendiente por probar que el poliedro convexo  $\mathcal{K}_{1,\times}$  está situado en primera posición de recorte débil, es decir, que para cada  $a := (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  la intersección  $\mathcal{J}'_a := \mathcal{K}_{1,\times} \cap \pi_n^{-1}(a, 0)$  es acotada. Observamos en primer lugar que si  $a_{n-1} \leq 0$ , entonces

$$\mathcal{J}'_a = \mathcal{K}_{1,\times} \cap \pi_n^{-1}(a, 0) = \mathcal{K} \cap \pi_n^{-1}(a, 0),$$

que es acotado porque  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte débil. Supongamos ahora  $a_{n-1} > 0$ . Si  $\mathcal{J}'_a = \mathcal{K}_{1,\times} \cap \pi_n^{-1}(a, 0)$  no es un segmento acotado, entonces es una semirrecta; esto quiere decir que  $\vec{v} := \pm \vec{e}_n \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}_{1,\times})$ . Sea

$$p := (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{1,\times};$$

por las propiedades del cono director (véase el Lema I.4.c), la semirrecta  $p\vec{v}$  está contenida en  $\mathcal{K}_{1,\times}$ ; además, como  $p_{n-1} \leq 0$ , entonces  $p\vec{v} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$ , es decir,  $p\vec{v} \subset \mathcal{K}_{1,\times} \cap \{x_{n-1} \leq 0\} = \mathcal{K}$ . Si tomamos ahora  $a := (p_1, \dots, p_{n-1})$ , deducimos que

$$p\vec{v} \subset \mathcal{J}_a = \mathcal{K} \cap \pi_n^{-1}(a, 0)$$

que es un conjunto acotado, porque  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte débil, lo cual es imposible. Por tanto  $\mathcal{J}'_a$  es acotado para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $\mathcal{K}_{1,\times}$  está también en primera posición de recorte débil, como queríamos.  $\square$

Veamos a continuación los diversos resultados concernientes a la colocación “efectiva” de poliedros en primera posición de recorte (débil o fuerte) anunciados anteriormente.

**Lema IV.1.12 (Primera posición de recorte fuerte para polígonos)** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  un polígono no degenerado y  $\mathcal{A}$  una arista acotada de  $\mathcal{P}$ . Entonces, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que:  $\mathcal{P}$  está en primera posición de recorte fuerte, óptima y extrema con respecto a la arista  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Sea  $\ell$  la recta que contiene a  $\mathcal{A}$ . Supongamos en primer lugar que  $\mathcal{P}$  es acotado (y por tanto compacto). Sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\vec{\ell} \cong \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + \vec{\ell}$  la proyección canónica; como  $\pi$  es continua, entonces  $\pi(\mathcal{P}) = [a, b]$  es un intervalo cerrado y acotado. Uno de los extremos de dicho intervalo se alcanza sobre los puntos de la arista  $\mathcal{A}$  y, de hecho, podemos suponer que  $\pi^{-1}(a) \cap \mathcal{P} = \mathcal{A}$ . Sea  $\mathcal{E} := \pi^{-1}(b) \cap \mathcal{P}$ , que es necesariamente una cara acotada de  $\mathcal{P}$  (obviamente una arista o un vértice). Sea  $v$  un vértice de  $\mathcal{E}$  y sea  $\ell'$  una recta que conecta  $v$  con un punto de  $\mathcal{A}$ . Tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que  $\ell := \{x_1 = 0\}$ ,  $\ell' := \{x_2 = 0\}$  y  $\mathcal{P} \subset \{x_1 \leq 0\}$ . Como consecuencia del Lema IV.1.9,  $\mathcal{P}$  está en primera posición de recorte, fuerte y óptima, que es extrema con respecto a la arista  $\mathcal{A}$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{P}$  no es acotado y elegimos un vector  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  del cono vectorial asociado a  $\mathcal{P}$ . Elegimos un punto  $p \in \mathcal{A}$  y consideramos la semirrecta  $p\vec{v}$ . Tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que  $\ell := \{x_1 = 0\}$  y que  $p\vec{v} := \{x_2 = 0, x_1 \leq 0\}$ ; de nuevo por el Lema IV.1.9,  $\mathcal{P}$  está en primera posición de recorte, fuerte y óptima, que es extrema con respecto a la arista  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Lema IV.1.13 (Primera posición de recorte débil para poliedros)** *Sean  $n \geq 3$  un entero,  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y no degenerado y  $\mathcal{F}$  una de las facetas de  $\mathcal{K}$ . Entonces, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte débil y extrema con respecto a  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $H$  el hiperplano generado por  $\mathcal{F}$  y como es habitual por  $H^+$  el semiespacio de  $\mathbb{R}^n$  de borde  $H$  que contiene a  $\mathcal{K}$ .



Si  $\mathcal{K}$  es acotado, basta realizar un cambio afín de coordenadas que transforme el hiperplano  $H$  en  $\{x_{n-1} = 0\}$  y el semiespacio  $H^+$  en  $\{x_{n-1} \leq 0\}$ . Por tanto, supondremos en lo que sigue que  $\mathcal{K}$  es no acotado.

Por el Lema I.4.17, podemos suponer, tras un cambio afín de coordenadas, que  $\mathcal{K}$  se encuentra en posición FU óptima con respecto al hiperplano  $\{x_n = 0\}$  y como consecuencia de la Observación I.4.23 todas las intersecciones  $\mathcal{P}_c := \mathcal{K} \cap \Pi_c$  de  $\mathcal{K}$  con hiperplanos  $\Pi_c := \{x_n = c\}$  están acotadas. Como la posición FU de  $\mathcal{K}$  con respecto a  $\{x_n = 0\}$  es óptima,  $H$  no es paralelo al plano  $\{x_n = 0\}$  pues la función polinómica  $f := x_n$  alcanza su mínimo en un único punto de  $\mathcal{K}$  y no en todos los puntos de una faceta; por tanto, podemos elegir un vector no nulo  $\vec{v} \in \vec{\Pi}_0 \cap \vec{H}$ . Observamos que como las intersecciones  $\mathcal{P}_c$  son todas acotadas, las intersecciones de las rectas paralelas a  $\vec{v}$  con  $\mathcal{K}$  son todas acotadas. Hacemos ahora un cambio afín de coordenadas que transforme: (1)  $\vec{v}$  en  $\vec{e}_n$ , (2)  $H$  en  $\{x_{n-1} = 0\}$ , y (3)  $H^+$  en  $\{x_{n-1} \leq 0\}$ .

En la situación actual, para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  la fibra  $\mathcal{J}_a = \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K}$  es acotada,  $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \{x_{n-1} = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_{n-1} \leq 0\}$  y por tanto  $\mathcal{K}$  se encuentra en primera posición de recorte débil y extrema con respecto a  $\mathcal{F}$ .  $\square$

A continuación, abordamos el caso tridimensional. Empezamos comprobando que si todas las aristas no acotadas de un poliedro convexo tridimensional no degenerado son paralelas, entonces se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a cualquiera de sus facetas acotadas.

**Lema IV.1.14 (Poliedros tridimensionales I)** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  un poliedro convexo no acotado, no degenerado y tridimensional cuyas aristas no acotadas son paralelas. Entonces

- (i)  $\mathcal{K}$  tiene una faceta acotada  $\mathcal{F}$ .
- (ii)  $\mathcal{K}$  se puede colocar, mediante un cambio afín de coordenadas, en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a cualquiera de sus facetas acotadas.

*Demostración.* (i) Podemos suponer que las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  son paralelas al vector  $\vec{e}_3$ . Sea  $\mathcal{A}$  una arista no acotada de  $\mathcal{K}$  y sea  $p \in \partial\mathcal{A}$ . Por el Lema IV.1.1 existe una faceta  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  no paralela a  $\vec{e}_3$  tal que  $p \in \mathcal{F}$ . Se cumple que  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \subset \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\lambda\vec{e}_3 : \lambda \geq 0\}$  y como  $\mathcal{F}$  no es paralela a  $\vec{e}_3$ , deducimos que  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \{\mathbf{0}\}$ , con lo que  $\mathcal{F}$  es acotada.

(ii) Sean  $\mathcal{F}_0$  una faceta acotada de  $\mathcal{K}$  y  $H$  el plano generado por  $\mathcal{F}_0$ . Como las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  son paralelas,  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{\lambda\vec{v} : \lambda \geq 0\}$  donde  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  es un vector director de las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$ ; sea  $\vec{\ell}$  la recta vectorial generada por  $\vec{v}$ . Como  $\mathcal{F}_0$  es una faceta acotada y  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{F}_0$ , entonces  $\vec{H} \cap \vec{\ell} = \{0\}$  y por tanto una recta paralela a  $\vec{\ell}$  y un plano paralelo a  $\vec{H}$  se cortan en un único punto. Sea ahora  $\Pi$  un plano paralelo a  $H$  que corta a todas las aristas de  $\mathcal{K}$  y tal que todas las caras acotadas de  $\mathcal{K}$  están contenidas en  $\text{Int}(\Pi^-)$ . Se deduce de la Observación I.4.23 que  $\mathcal{P} := \mathcal{K} \cap \Pi$  es un polígono acotado,  $\mathcal{K} \cap \Pi^-$  es un poliedro acotado y además  $\mathcal{K} \cap \Pi^+ = \mathcal{P} + \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \mathcal{P} + \{\lambda\vec{v} : \lambda \geq 0\}$ ; por

tanto  $\mathcal{K} \cap \Pi^+$  es afinmente equivalente a  $\mathcal{P} \times [0, +\infty[$ . Como consecuencia del Lema IV.1.12, podemos suponer, tras un cambio afín de coordenadas, que:

- $H$  es el plano  $\{x_2 = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_2 \leq 0\}$ ,
- $\Pi$  es el plano  $\{x_2 = -1\}$  y  $\pi_3(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \cap \{x_3 = 0\}$ ,
- $\vec{v} = -\vec{e}_2$  y por tanto  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \{-\lambda\vec{e}_2 : \lambda \geq 0\} \subset \{x_3 = 0\}$ .

Como  $\pi_3(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_3 = 0\}$ , deducimos del Lema IV.1.10 que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a la faceta  $\mathcal{F}_0$ .  $\square$

Nuestro objetivo a continuación es probar que todo poliedro convexo tridimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  no acotado se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus caras no acotadas.

**Lema IV.1.15 (Poliedros tridimensionales II)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  un poliedro convexo no acotado, no degenerado y tridimensional. Entonces, mediante un cambio afín de coordenadas, podemos colocar  $\mathcal{K}$  en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a una de sus caras no acotadas  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Podemos suponer, en virtud del Lema I.4.17, que  $\mathcal{K}$  se encuentra en posición FU con respecto al hiperplano  $\vec{\Pi} = \{x_n = 0\}$ . La demostración transcurrirá en varias etapas.

(IV.1.15.1) Comenzamos eligiendo la faceta  $\mathcal{F}$  del enunciado y escribimos  $\widehat{\mathcal{K}} := \text{Cl}_{\mathbb{RP}^3}(\mathcal{K})$ ,  $\mathcal{K}_\infty := \text{Cl}_{\mathbb{RP}^3}(\mathcal{K}) \cap \text{H}_\infty(\mathbb{R})$ ; claramente,  $\widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \sqcup \mathcal{K}_\infty$ . Consideramos la homografía involutiva

$$\phi : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_3 : x_1 : x_2 : x_0) = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3).$$

Como consecuencia del Lema I.4.18, el poliedro convexo  $\mathcal{K}' := \phi(\widehat{\mathcal{K}}) \subset \mathbb{R}^3 \equiv \{y_0 \neq 0\}$  es acotado y una de sus caras es  $\mathcal{E}' := \phi(\mathcal{K}_\infty)$ . Ahora distinguimos:

**Caso 1.** Si  $\mathcal{E}'$  tiene dimensión 0 o 1, elegimos una faceta no acotada  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{E}' \subset \text{Cl}(\phi(\mathcal{F}))$ .

**Caso 2.** Si  $\mathcal{E}'$  tiene dimensión 2 (es decir,  $\mathcal{E}'$  es una faceta de  $\phi(\widehat{\mathcal{K}})$ ), entonces elegimos una faceta no acotada  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $\dim(\text{Cl}(\phi(\mathcal{F})) \cap \mathcal{E}') = 1$ .

(IV.1.15.2) Denotamos por  $H$  el plano generado por la faceta  $\mathcal{F}$  y sea  $\mathfrak{F}$  el conjunto (finito) formado por las intersecciones de  $H$  de las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  que no son paralelas a  $H$ . Como  $\mathcal{K}$  en posición FU con respecto a  $\vec{\Pi}$  podemos elegir un hiperplano orientado  $\Pi$  paralelo a  $\vec{\Pi}$  que corta a todas las aristas no acotadas y tal que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  están contenidos en el semiespacio  $\Pi^-$ . Si además,  $\mathcal{E}'$  tiene dimensión 2, entonces la dimensión de  $\mathcal{K}_\infty$  es 2, la dimensión de  $\text{Cl}_{\mathbb{RP}^3}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{K}_\infty$  es 1 y, por el Lema I.4.19, la dimensión de  $\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$

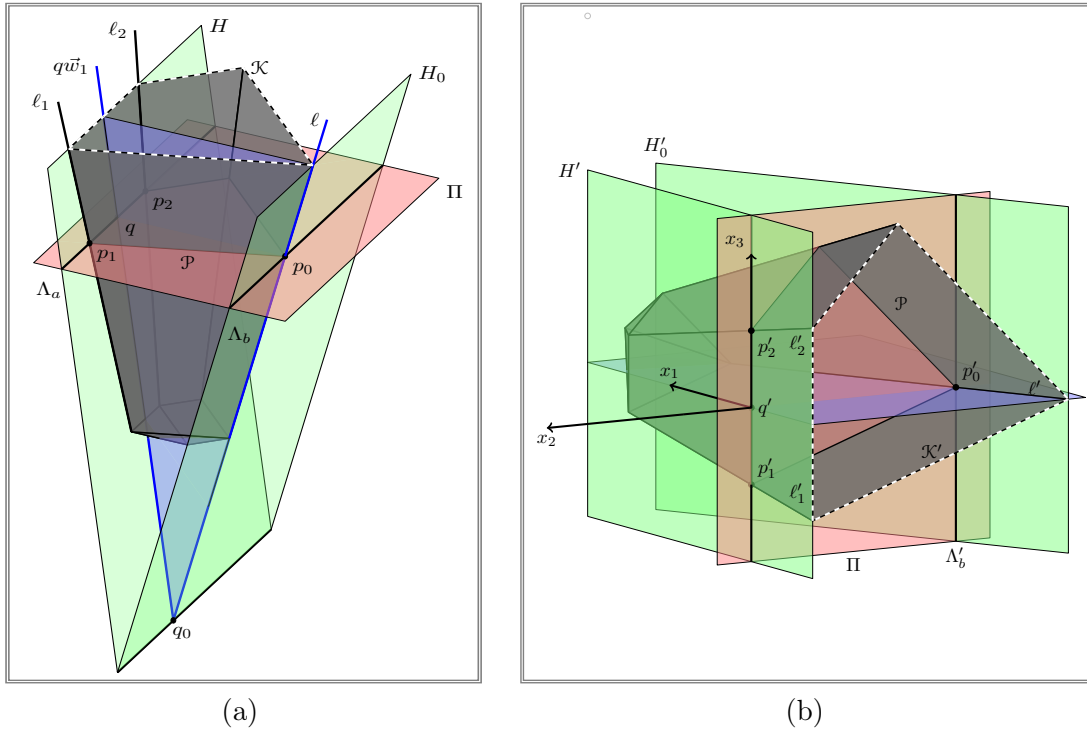


Figura IV.1.2: Colocando un poliedro tridimensional en primera posición de recorte fuerte y extrema.

es 2. Observamos también que  $\mathcal{K}$  está en posición FU respecto a  $\vec{\Pi}$ , y  $\mathcal{F}$  está en posición FU con respecto a  $\vec{\Pi} \cap \vec{H}$  dentro de  $H$ . Elegimos  $\vec{w} \in \text{Int}_v \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$  y, por el Lema I.4.21(ii), podemos suponer que la intersección  $p\vec{w} \cap (\mathcal{F} \cap \Pi) = p\vec{w} \cap (H \cap \mathcal{K} \cap \Pi)$  es un punto para cada  $p \in \mathfrak{F}$ .

(IV.1.15.3) Denotamos  $\mathcal{P} := \mathcal{K} \cap \Pi$  y  $\mathcal{E}$  la intersección  $\mathcal{F} \cap \Pi = H \cap \mathcal{P}$ . Consideramos la aplicación cociente  $\rho : \Pi \rightarrow \Pi / (\vec{H} \cap \vec{\Pi})$ ,  $x \mapsto x + (\vec{H} \cap \vec{\Pi})$  que es continua con respecto a la topología cociente de  $\Pi / (\vec{H} \cap \vec{\Pi})$ . Como  $\mathcal{P} \subset \Pi$  es compacto y  $\Pi / (\vec{H} \cap \vec{\Pi})$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$  con la topología usual,  $\rho(\mathcal{P}) \equiv [a, b]$  es un intervalo cerrado y acotado (no trivial porque  $\mathcal{P}$  tiene dimensión 2). Como  $H \cap \Pi$  es una recta de soporte de  $\mathcal{P}$  en  $\Pi$ , pues contiene a una de sus aristas, podemos suponer que  $\rho^{-1}(a) \cap \mathcal{P} = H \cap \mathcal{P} =: \Lambda_a$ . Observamos que  $\Lambda_b := \rho^{-1}(b)$ , que es una recta de  $\Pi$  paralela a  $H \cap \Pi$ , es una recta de soporte de  $\mathcal{P}$  en  $\Pi$ ; por tanto,  $\Lambda_b \cap \mathcal{P}$  es una cara de  $\mathcal{P}$  (véase el Lema I.4.3), es decir, una arista o un vértice. Como  $\mathcal{P}$  es un polígono acotado, existe un vértice  $p_0 \in \Lambda_b \cap \mathcal{P}$ ; como consecuencia de la Observación I.4.23 sabemos que  $\{p_0\}$  es la intersección de  $\Pi$  con una arista no acotada  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{K}$ .

Sea  $H_0$  el plano de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\Lambda_b$  y a la arista  $\mathcal{A}$ . Por el Lema I.4.25, se cumple que  $H_0$  es un plano de soporte de  $\mathcal{K}$ .

(IV.1.15.4) Sea  $\ell$  la recta que contiene a  $\mathcal{A}$ ; vamos a construir un plano  $W$  que contiene a  $\ell$  tal que  $W \cap H \cap \mathcal{K} = W \cap \mathcal{F}$  es una semirrecta. Analizamos separadamente dos posibles situaciones:

**Caso 1.** Si la recta  $\ell$  es paralela a  $H$ , elegimos un plano  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $\ell$  y corta a  $\text{Int}_v \mathcal{F} \cap \Pi \subset H \cap \mathcal{P} = \Lambda_a$  en un punto  $q$ .

**Caso 2.** Si la recta  $\ell$  no es paralela a  $H$ , entonces corta a  $H$  en un único punto, digamos  $\ell \cap H = \{q_0\}$ ; además,

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}P^3}(\ell) \cap \text{Cl}_{\mathbb{R}P^3}(H) \cap H_\infty(\mathbb{R}) = \emptyset \implies \text{Cl}_{\mathbb{R}P^3}(\mathcal{A}) \cap \text{Cl}_{\mathbb{R}P^3}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{K}_\infty = \emptyset$$

y así, la dimensión de  $\mathcal{K}_\infty$ , y por tanto la de  $\mathcal{E}'$ , son ambas 2. A la vista de nuestra elección de  $\mathcal{F}$  y  $\Pi$  (véanse IV.1.15.1 y IV.1.15.2) la intersección

$$q_0 \vec{w} \cap (\mathcal{F} \cap \Pi) = q_0 \vec{w} \cap (H \cap \mathcal{K} \cap \Pi) = q_0 \vec{w} \cap \Lambda_a$$

es un punto  $q$ . La recta que pasa por  $q_0$  y es paralela a  $\vec{w}$  es coplanaria con  $\ell$ ; denotamos  $W$  al plano de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a ambas rectas.

(IV.1.15.5) Sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección afín sobre  $W$  en la dirección de  $\vec{H} \cap \vec{\Pi}$ . Observamos en ambos casos que, como  $p_0 \in \Lambda_b \cap \Pi$  y  $q \in \Lambda_a \cap \Pi$  y estas rectas son paralelas a la recta vectorial  $\vec{H} \cap \vec{\Pi}$ , la recta  $W \cap \Pi$  (que pasa por los puntos  $p_0$  y  $q$ ) cumple que  $\pi(\mathcal{K} \cap \Pi) = (\mathcal{K} \cap \Pi) \cap W$ . Además, se cumple que  $\vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W}$ .

En efecto, escribimos  $H_0 := \{h_0 = 0\}$  y  $H := \{h = 0\}$  con  $h, h_0 \in \mathbb{R}[x]$  polinomios de grado uno y denotamos  $\vec{H}_0^+ := \{\vec{h}_0 \geq 0\}$  y  $\vec{H}^+ := \{\vec{h} \geq 0\}$ . Se cumple que  $\mathcal{K} \subset H_0^+ \cap H^+$  y por tanto

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \subset \vec{\mathcal{C}}(H_0^+ \cap H^+) = \vec{\mathcal{C}}(H_0^+) \cap \vec{\mathcal{C}}(H^+) = \vec{H}_0^+ \cap \vec{H}^+.$$

A continuación escribimos  $\mathcal{A} := q_1 \vec{w}_1$  y  $W \cap H \cap \mathcal{K} := q_2 \vec{w}_2$  donde  $q_1, q_2 \in \mathcal{K}$  y  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Distinguimos ahora dos casos:

**Caso 1.** Si  $\vec{w}_1$  y  $\vec{w}_2$  son linealmente dependientes, entonces  $H_0$  y  $H$  son planos paralelos y  $\vec{H}_0^+ \cap \vec{H}^+ = \vec{H}$ . Por tanto,

$$\{\lambda \vec{w}_1 : \lambda \geq 0\} \subset \vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \subset \vec{H} \cap \vec{W} = \{\mu \vec{w}_1 : \mu \in \mathbb{R}\},$$

y como  $\mathcal{K}$  es no degenerado  $\vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \{\lambda \vec{w}_1 : \lambda \geq 0\} = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W}$ .

**Caso 2.** Si  $\vec{w}_1$  y  $\vec{w}_2$  son linealmente independientes,

$$\vec{H}_0^+ \cap \vec{H}^+ \cap \vec{W} = \{\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W}.$$

Por tanto,

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W} = \vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W}) \subset \vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \subset \vec{H}_0^+ \cap \vec{H}^+ \cap \vec{W} = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W},$$

es decir,  $\vec{\pi}(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{W}$ .

(IV.1.15.6) Hacemos ahora un cambio afín de coordenadas que transforma  $H^+$  en  $\{x_2 \leq 0\}$ ,  $W$  en  $\{x_3 = 0\}$  y la recta vectorial  $\vec{H} \cap \vec{\Pi}$  en la recta vectorial  $L[\vec{e}_3]$ , y, como consecuencia de la Proposición IV.1.10, (después de dicho cambio de coordenadas) el poliedro  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto de la faceta  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Observación IV.1.16** Para construir un poliedro  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  convexo no acotado,  $n$ -dimensional y no degenerado para  $n \geq 4$  que no se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a ninguna de sus facetas, procederemos del modo siguiente. Sean  $d := n - 1$  y  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro convexo acotado no degenerado y  $d$ -dimensional que no se puede situar en primera posición de recorte fuerte, óptima y extrema respecto a ninguna de sus facetas. Como consecuencia del Lema IV.1.9, para esto basta con encontrar un poliedro convexo acotado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  tal que para cada proyección  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  en la dirección de una recta  $\vec{\ell}$  y con base un hiperplano  $W$  de  $\mathbb{R}^d$  se cumple que  $\mathcal{P} \cap W \neq \pi(\mathcal{P})$ ; para  $d = 2$  esto no es posible (véase (IV.5)), pero sin embargo sí que es posible para  $d \geq 3$  (véase el Teorema C.3). A continuación, definimos  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times [0, +\infty[ \subset \mathbb{R}^n$  y observamos que  $\mathcal{K}$  no se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas.

En caso contrario, existe un cambio afín de coordenadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{K}' := f(\mathcal{K})$  está en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas. Por el Lema IV.1.10 existe un hiperplano  $\Pi' \subset \mathbb{R}^n$  tal que: su dirección  $\vec{\Pi}'$  contiene a la recta vectorial  $\vec{\ell}_n$  generada por  $\vec{e}_n$ ,  $\Pi'$  corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$ , las aristas acotadas de  $\mathcal{K}'$  están contenidas en  $\text{Int}(\Pi'^-)$  y  $\pi_n(\mathcal{K}' \cap \Pi') = \mathcal{K}' \cap \Pi' \cap \{x_n = 0\}$ .

(IV.1.16.1) Consideramos la proyección  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de dirección la recta  $\vec{\ell}' := \vec{f}(\vec{\ell}_n)$  y de base el hiperplano  $H' := f(\{x_n = 0\})$ . Como  $\Pi'$  corta a las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$ , todas paralelas a la recta  $\vec{\ell}'$ , se sigue que  $\Pi'$  no es paralelo a dicha recta y por tanto  $\rho|_{\Pi'} : \Pi' \rightarrow H'$  es una biyección afín. Además, como  $\vec{\rho}(\vec{\ell}') = \{\mathbf{0}\}$  y por la Observación I.4.23,  $\mathcal{P}'_1 := \mathcal{K}' \cap \Pi'$  es el poliedro convexo acotado cuyos vértices son las intersecciones de las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$  (todas ellas paralelas a la recta  $\vec{\ell}'$ ) con el hiperplano  $\Pi'$ , entonces  $\rho(\mathcal{P}'_1)$  es el poliedro convexo acotado cuyos vértices son las intersecciones de las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$  con el plano  $H'$ , es decir, el poliedro convexo

$$\mathcal{P}' := H' \cap \mathcal{K}' = f(\{x_n = 0\} \cap \mathcal{K}) = f(\mathcal{P}).$$

Por tanto,  $g := (f^{-1} \circ \rho|_{\Pi'}) : \Pi' \rightarrow \{x_n = 0\}$  es una biyección afín que transforma  $\mathcal{P}'_1$  en  $\mathcal{P} \times \{0\}$ . De este modo, si definimos  $\vec{\ell} := \vec{g}(\vec{\ell}_n)$  y  $W := g(\Pi' \cap \{x_n = 0\})$  se cumple que la proyección  $\pi := (g \circ \pi_n \circ g^{-1}) : \mathbb{R}^d \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$  de dirección  $\vec{\ell}$  y base el hiperplano  $W$  de  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  cumple que  $\pi(\mathcal{P} \times \{0\}) = \mathcal{P} \times \{0\} \cap W$ , contra la elección de  $\mathcal{P}$ . Por tanto  $\mathcal{K}$  no se puede colocar en primera posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas.

## IV.2. Complementario de un poliedro convexo

El objetivo de esta sección es demostrar la parte relativa a complementarios de poliedros convexos de los Teoremas IV.2 y IV.3. Con más precisión probaremos el siguiente resultado:

**Teorema IV.2.1** Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y  $n$ -dimensional que no es una franja. Se cumple que:

- (i) Si  $\mathcal{K}$  es acotado, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Si  $\mathcal{K}$  no es acotado, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) Si  $\mathcal{K}$  no es acotado y  $n = 2$  ó  $3$ , entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

Antes de ello, necesitamos el siguiente resultado preliminar.

**Lema IV.2.2 (El ortante)** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional no degenerado y con  $n \geq 2$  caras. Entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Tras efectuar un cambio afín de coordenadas es suficiente demostrar, por inducción sobre  $n$ , que  $p(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{Q}}_n) = n$  para cada  $n \geq 2$ , donde

$$\bar{\mathcal{Q}}_n = \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si  $n = 2$  basta aplicar la Proposición II.3.20. Suponemos cierta la afirmación para  $n - 1$  (si  $n \geq 3$ ), y comprobemos que también lo es para  $n$ . Por la hipótesis de inducción existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $f(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \bar{\mathcal{Q}}_{n-1}$ . Definimos

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

que cumple la igualdad

$$\hat{f}(\mathbb{R}^n) = f(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R} = (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \bar{\mathcal{Q}}_{n-1}) \times \mathbb{R}.$$

Sea  $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un cambio afín de coordenadas tal que  $g_1((\mathbb{R}^{n-1} \setminus \bar{\mathcal{Q}}_{n-1}) \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1$ , donde

$$\mathcal{K}_1 = \{x_1 \geq 0, \dots, x_{n-3} \geq 0, x_{n-2} + x_n \geq 0, x_{n-2} - x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

es un poliedro situado en primera posición de recorte fuerte y óptima. En efecto, sea  $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  tal que la recta  $\ell_a := \{(a_1, \dots, a_{n-1}, t) : t \in \mathbb{R}\}$  corta a  $\mathcal{K}_1$ ; entonces  $a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2} \geq 0$  (pues  $a_{n-2} + t \geq 0$  y  $a_{n-2} - t \geq 0$ ) y  $-a_{n-2} \leq t \leq a_{n-2}$ . Esto hace que

$$\mathcal{J}_a = \mathcal{K} \cap \ell_a = \{a\} \times [-a_{n-2}, a_{n-2}]$$

sea un intervalo acotado que contiene a  $(a, 0)$  siempre que sea no vacío y por tanto  $\mathcal{K}_1$  está situado en primera posición de recorte fuerte y óptima.

Por la Proposición IV.1.8 existe una aplicación polinómica  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K}_1 \cap \{x_{n-1} \leq 0\})$ . Además, existe un cambio afín de coordenadas  $g_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$g_2(\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K}_1 \cap \{x_{n-1} \leq 0\})) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{Q}}_n.$$

Por tanto, la composición  $g := g_2 \circ h \circ g_1 \circ \hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación polinómica que cumple  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{Q}}_n$ .  $\square$

*Demostración del Teorema IV.2.1(i).* Abordamos en primer lugar el caso en el que  $\mathcal{K} := \Delta$  es un  $n$ -símplice en  $\mathbb{R}^n$ . Podemos suponer que se trata del  $n$ -símplice  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ , que está situado en primera posición de recorte fuerte por ser acotado, cuyos vértices son los puntos

$$v_0 := (0, \dots, 0), \quad v_i := (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0), \quad \text{para } i \neq n-1 \text{ y } v_{n-1} := (0, \dots, -1, 0).$$

Escribimos  $\Delta := \bigcap_{i=1}^{n+1} H_i^+$  donde  $\{H_1', \dots, H_{n+1}'\}$  es la presentación mínima de  $\Delta$  y ordenamos estos hiperplanos de modo que  $H_1' = \{x_{n-1} = 0\}$ ; por tanto,  $\Delta_{1,\times} := \bigcap_{i=2}^{n+1} H_i^+$  es un poliedro convexo  $n$ -dimensional no degenerado con  $n$  facetas. Por el Lema IV.2.2 existe una aplicación polinómica  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \Delta_{1,\times}$ . Como  $\Delta$  está situado en primera posición de recorte fuerte (por ser acotado) y extrema con respecto a la cara  $\Delta \cap \{x_{n-1} = 0\}$ , aplicando los Lemas IV.1.8 y IV.1.11, existe una aplicación polinómica  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(\mathbb{R}^n \setminus \Delta_{1,\times}) = \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ , y la aplicación polinómica  $f := h \circ g$  cumple  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ .

Sea ahora  $\mathcal{K}$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Existe un  $n$ -símplice  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  de modo que  $\mathcal{K} \subset \text{Int}(\Delta)$ . Escribimos  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^m H_i^+$  de modo que  $\{H_1, \dots, H_m\}$  es la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ , y consideramos los poliedros convexos  $\{\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_m\}$  definidos por:

$$\mathcal{K}_0 := \Delta, \quad \mathcal{K}_j := \mathcal{K}_{j-1} \cap H_j^+ \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

Así  $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}$  y para cada  $1 \leq j \leq m$  el poliedro  $\mathcal{K}_j = \Delta \cap (\bigcap_{i=1}^j H_i^+)$  tiene una faceta  $\mathcal{F}_j$  contenida en el hiperplano  $H_j$ . Además, el conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \Delta$  es, según acabamos de ver, la imagen de una aplicación polinómica  $f^{(0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para cada índice  $1 \leq j \leq m$  existe un cambio afín de coordenadas  $h^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h^{(j)}(H_j^+) = \{x_{n-1} \leq 0\}$ ; sea

$$\mathcal{K}'_j := h^{(j)}(\mathcal{K}_j) = h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1}) \cap h^{(j)}(H_j^+) = h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}.$$

En virtud del Lema IV.1.8 existe una aplicación polinómica  $g^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$g^{(j)}(\mathbb{R}^n \setminus h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1})) = \mathbb{R}^n \setminus (h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}'_j,$$

y por tanto la aplicación polinómica  $f^{(j)} := (h^{(j)})^{-1} \circ g^{(j)} \circ h^{(j)}$  satisface  $f^{(j)}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_{j-1}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_j$ .

Finalmente,  $f := f^{(m)} \circ \dots \circ f^{(0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación polinómica que cumple  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_m = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

Abordamos a continuación la prueba del Teorema IV.2.1(ii) y (iii). Comenzaremos resolviendo, en el Corolario IV.2.5, el caso en el que  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  es una semibanda, que requiere un tratamiento especial.

**Lema IV.2.3** *Consideremos el semiplano abierto  $\mathcal{H} := \{x > 0\}$  de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f^{(1)}$  la aplicación polinómica definida por*

$$f^{(1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^3 y^2 - x, y(x + 1)).$$

Sean  $\mathcal{S}_1 := \{x < 0, |y| < 1\}$ ,  $\mathcal{S}_2 := \{x \geq 0, |y| > 1\}$  y  $\mathcal{R} := \{x \geq 0, |y| \leq 1\}$ . Entonces,  $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \subset f^{(1)}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ .

*Demostración.* Para probar la inclusión,  $\mathcal{S} \subset f^{(1)}(\mathcal{H})$ , tomamos  $(u, v) \in \mathcal{S}$  y consideramos las funciones

$$\mu_u^\varepsilon(x) := \varepsilon(x + 1) \sqrt{\frac{x + u}{x^3}} \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1$$

que se obtienen al despejar  $y$  en la igualdad  $x^3 y^2 - x = u$  y substituir el resultado obtenido en la segunda coordenada de la aplicación  $f^{(1)}$ .

Nótese que si  $(u, v) \in \mathcal{S}_1$  entonces  $u < 0$ , luego las funciones  $\mu_u^\varepsilon$  están definidas y son continuas en el intervalo  $[-u, +\infty[$ . Como  $|v| < 1$ , y además

$$\mu_u^\varepsilon(-u) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_u^\varepsilon(x) = \varepsilon,$$

existe  $x_0$  tal que  $\mu_u^\varepsilon(x_0) = v$  si  $\varepsilon v \geq 0$ . Por tanto, eligiendo

$$y_0 := \varepsilon \sqrt{\frac{x_0 + u}{x_0^3}},$$

se tiene  $f^{(1)}(x_0, y_0) = (u, v)$ , lo que demuestra la inclusión  $\mathcal{S}_1 \subset f^{(1)}(\mathcal{H})$ .

Por otra parte, si  $(u, v) \in \mathcal{S}_2$ , se tiene  $u \geq 0$  y  $|v| > 1$ , por lo que las funciones  $\mu_u^\varepsilon$  están definidas y son continuas en  $]0, +\infty[$  y se cumplen las igualdades

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mu_u^\varepsilon(x) = \varepsilon \infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_u^\varepsilon(x) = \varepsilon \quad \text{donde } \varepsilon \infty := \begin{cases} +\infty & \text{si } \varepsilon = +1, \\ -\infty & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

En consecuencia, como  $|v| > 1$ , existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mu_u^\varepsilon(x_0) = v$  si  $\varepsilon v > 1$ . Así, definiendo  $y_0$  como antes, resulta  $f^{(1)}(x_0, y_0) = (u, v)$ , luego  $\mathcal{S}_2 \subset f^{(1)}(\mathcal{H})$ .



Para demostrar la inclusión  $f^{(1)}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ , tomamos  $(u, v) \in f^{(1)}(\mathcal{H})$  con  $u \geq 0$ , y hemos de probar que  $|v| > 1$ . Sabemos que existen  $x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $x > 0$  y

$$f^{(1)}(x, y) = (x^3y^2 - x, (x + 1)y) = (u, v).$$

Como  $x > 0$  y  $x(x^2y^2 - 1) = u \geq 0$  deducimos que  $y \neq 0$  y  $x^2y^2 - 1 \geq 0$ , por lo que  $x \geq 1/|y|$ , y considerando la segunda coordenada de  $f^{(1)}$ , deducimos que

$$|v| = |y||x + 1| = |y|(x + 1) \geq |y|(1 + 1/|y|) > 1,$$

como queríamos demostrar. □

**Lema IV.2.4** Sean  $\mathcal{S}, \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  los conjuntos definidos en el Lema IV.2.3, y  $h \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  un polinomio tal que  $h(0) = 0$ ,  $h(\varepsilon/2) = h(\varepsilon) = \varepsilon$  para  $\varepsilon = \pm 1$  y su función polinómica asociada es creciente en  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  (por ejemplo,  $h(\mathbf{t}) = \frac{10}{9}\mathbf{t}^5 - \frac{49}{18}\mathbf{t}^3 + \frac{47}{18}\mathbf{t} \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$ ). Entonces, la aplicación

$$f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x(y^2 - 1/4)^2, h(y)(1 + (y^2 - 1)^2x^2)),$$

satisface la igualdad  $f^{(2)}(\mathcal{S}) = f^{(2)}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ . En particular  $f^{(2)}(\mathcal{T}) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$  para cada conjunto  $\mathcal{T}$  tal que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ .

*Demostración.* La última afirmación es consecuencia inmediata de la primera, que es la que probamos a continuación. Como  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ , basta comprobar las inclusiones  $f^{(2)}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R} \subset f^{(2)}(\mathcal{S})$ .

Para la primera inclusión tomamos un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ , por lo que bien  $|y_0| > 1$ , bien  $x_0 < 0$ . Si  $|y_0| > 1$ , entonces

$$|h(y_0)|(1 + (y_0^2 - 1)^2x_0^2) > 1 \implies f^{(2)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}.$$

Por otra parte, si  $x_0 < 0$  e  $y_0 \neq \pm 1/2$ , entonces  $x_0(y_0^2 - 1/4)^2 < 0$  y también en este caso  $f^{(2)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ . Por último, si  $y_0 = \pm 1/2$  tenemos

$$f^{(2)}(x_0, y_0) = (0, h(y_0)(1 + 9x_0^2/16)) = (0, \pm(1 + 9x_0^2/16)),$$

luego  $f^{(2)}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$ , ya que el valor absoluto de la segunda coordenada de  $f^{(2)}(x_0, y_0)$  es mayor que 1.

Para la segunda inclusión, sea  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}$  y consideramos la función

$$\rho_u : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto h(y) \left( 1 + \frac{(y^2 - 1)^2 u^2}{(y^2 - 1/4)^4} \right),$$

que es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\}$  y se obtiene despejando  $x$  en la igualdad  $x(y^2 - 1/4)^2 = u$  y sustituyendo el resultado en la segunda coordenada de  $f^{(2)}$ . La función anterior satisface:

- (i)  $\lim_{y \rightarrow (1/2)^-} \rho_u(y) = +\infty$  y  $\lim_{y \rightarrow -(1/2)^+} \rho_u(y) = -\infty$ ,
- (ii)  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \rho_u(y) = +\infty$  y  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \rho_u(y) = -\infty$ ,
- (iii)  $\rho_u(\varepsilon) = h(\varepsilon) = \varepsilon$  donde  $\varepsilon = \pm 1$ .

Ahora, distinguimos dos casos. Si  $u < 0$ , existe, por (i),  $y_0 \in ]-1/2, 1/2[$  tal que  $\rho_u(y_0) = v$ . Por otro lado, si  $u \geq 0$  se tiene  $|v| > 1$ , y existe, por (ii) y (iii),  $y_0 \in \mathbb{R}$  con  $1 < |y_0|$  tal que  $\rho_u(y_0) = v$ . Definimos

$$x_0 := \frac{u}{(y_0^2 - 1/4)^2},$$

y es inmediato comprobar que  $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$ ; por tanto  $(u, v) = f^{(2)}(x_0, y_0) \in f^{(2)}(\mathcal{S})$ .  $\square$

**Corolario IV.2.5 (La semibanda)** *El complementario de una semibanda es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* En la Proposición II.1.1 probamos que existe una aplicación polinómica  $f^{(0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen es el semiplano abierto  $\mathcal{H} := \{x > 0\}$ . Sean  $f^{(1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  las aplicaciones introducidas en los Lemas IV.2.3 y IV.2.4 respectivamente. Entonces la aplicación polinómica  $f^{(2)} \circ f^{(1)} \circ f^{(0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface

$$(f^{(2)} \circ f^{(1)} \circ f^{(0)})(\mathbb{R}^2) = f^{(2)}(f^{(1)}(\mathcal{H})) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{R}.$$

Obviamente, podemos extender el resultado a una semibanda arbitraria empleando un cambio afín de coordenadas apropiado.  $\square$

*Demostración del Teorema IV.2.1(ii) y (iii).* Para simplificar la notación de esta prueba diremos que una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *admisibile* si  $2 \leq n \leq 3$  y  $f$  es polinómica, o  $n > 3$  y  $f$  es regular. Por tanto deberemos demostrar que:

(IV.2.1.1) *Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y  $n$ -dimensional que no es una franja. Entonces existe una aplicación admisible  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ .*

Procederemos por inducción sobre el par  $(n, m)$  donde  $n$  denota la dimensión de  $\mathcal{K}$  y  $m$  el número de facetas de  $\mathcal{K}$ . En primer lugar, abordamos el caso  $n = 2$ .

Para  $m = 1$  y  $m = 2$  basta aplicar el Lema II.1.1 y el Teorema II.3.1, respectivamente, y suponemos que IV.2.1.1 es cierto para cualquier polígono convexo no acotado y bidimensional con  $m \geq 2$  aristas que no es una banda. Sea  $\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i^+$ , donde  $\{H_1, \dots, H_{m+1}\}$  es la presentación mínima de un polígono convexo  $\mathcal{K}$  con  $m + 1 \geq 3$  aristas. En virtud del Corolario IV.2.5 podemos suponer que  $\mathcal{K}$  no es una semibanda. Como  $\mathcal{K}$  tiene al menos tres aristas, usando el Lema IV.1.12 podemos asumir además que  $\mathcal{K}$  está en primera posición de recorte fuerte, óptima y extrema con respecto a una de sus aristas acotadas. El polígono convexo  $\mathcal{K}_{1,\times} := \bigcap_{i=2}^{m+1} H_i^+$ , que contiene a  $\mathcal{K}$ , tiene  $m$  aristas y, por el Lema IV.1.11, está

en primera posición de recorte fuerte. Es claro que  $\mathcal{K}_{1,\times}$  no es una banda, pues en tal caso  $\mathcal{K}$  sería una semibanda, lo que ya hemos descartado.

Por la hipótesis de inducción existe una aplicación admisible  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen es  $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{1,\times}$ . Ahora, por la Proposición IV.1.8, existe una aplicación admisible  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{1,\times}) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}$ , luego  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K} = (h \circ g)(\mathbb{R}^2)$ .

Supondremos en lo sucesivo que  $n \geq 3$  y que el resultado es cierto para todo poliedro  $(n-1)$ -dimensional convexo que no es una franja contenido en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Distinguiremos varios casos:

**Caso 1.**  $\mathcal{K}$  es un poliedro convexo degenerado. Entonces por el Lema I.4.13 existen  $1 \leq k_0 < n$  y un poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^{k_0}$  de dimensión  $k_0$  tales que, tras un cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{K} = \mathcal{P}_0 \times \mathbb{R}^{n-k_0}$ . Si  $k_0 = 1$  podemos suponer, puesto que  $\mathcal{K}$  no es una franja, que  $\mathcal{P}_0 = [0, +\infty[$  y reescribimos  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{n-2}$  donde  $\mathcal{P} := \{x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Por otro lado, si  $k_0 \geq 2$  denotamos  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0$ . De este modo, en ambos casos  $\mathcal{K} = \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{n-k}$  donde  $k := 2$  en el primer caso y  $k := k_0$  en el segundo. Ahora por hipótesis de inducción  $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{P}$  es imagen de  $\mathbb{R}^k$  mediante una aplicación admisible  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y entonces, la imagen de la aplicación admisible  $(f, \text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}}) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  es  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ .

**Caso 2.**  $\mathcal{K}$  es un poliedro convexo no degenerado. Si  $\mathcal{K}$  tiene  $n$  facetas (y necesariamente un único vértice), basta aplicar el Lema IV.2.2. Supondremos por tanto que el número  $m$  de facetas de  $\mathcal{K}$  es estrictamente mayor que  $n$  y sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ .

Si  $n = 3$ , podemos suponer, por el Lema IV.1.15, que  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a la faceta  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K} \cap H_1^+$ , que es además no acotada. Por el contrario, si  $n > 3$ , podemos suponer, por el Lema IV.1.13, que  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte débil y extrema respecto a  $\mathcal{F}_1$ . Por el Lema IV.1.11, el poliedro convexo  $\mathcal{K}_{1,\times} = \bigcap_{j=2}^m H_j^+$  está situado en primera posición de recorte fuerte si  $n = 3$  y en primera posición de recorte débil si  $n > 3$ . Esto permite aplicar la Proposición IV.1.8 al poliedro convexo  $\mathcal{K}_{1,\times}$ , por lo que existe una aplicación admisible  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_{1,\times}) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K}_{1,\times} \cap \{x_{n-1} \leq 0\}) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K}_{1,\times} \cap H_1^+) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}.$$

Ahora bien,  $\mathcal{K}_{1,\times}$  es un poliedro con  $m-1 \geq n$  facetas, por lo que no es una franja, y por hipótesis de inducción existe una aplicación admisible  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_{1,\times}$ . Concluimos que la aplicación admisible  $h := f \circ g$  satisface

$$h(\mathbb{R}^n) = f(g(\mathbb{R}^n)) = f(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_{1,\times}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K},$$

lo que completa la demostración. □

### IV.3. Herramientas de recorte de tipo II

El objetivo de esta sección es presentar y desarrollar las herramientas fundamentales que utilizaremos en lo que resta de este capítulo para demostrar la parte de los Teoremas IV.2, IV.3 y IV.4 relativas a los complementarios de interiores de poliedros. En lo que sigue utilizaremos los aspectos preparatorios ya introducidos en §IV.1.a y en el Lema IV.1.1.

#### IV.3.a. Segunda posición de recorte y aplicaciones recortantes de tipo II.

Comenzamos con la definición de segunda posición de recorte.

**Definiciones IV.3.1** (1) Dado un poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  decimos que  $\mathcal{K}$  está situado *en segunda posición de recorte débil* si:

- (i) Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  el conjunto  $\mathcal{J}_a := \mathcal{K} \cap \pi_n^{-1}(a, 0)$  está acotado superiormente (considerando en la recta  $\pi_n^{-1}(a, 0)$  la orientación inducida por el vector  $\vec{e}_n$ ).

Si además se cumple la siguiente condición, diremos que  $\mathcal{K}$  está situado en *segunda posición de recorte fuerte*:

- (ii) El conjunto  $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}} := \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \mathcal{J}_a \neq \emptyset, (a, 0) \notin \mathcal{J}_a\}$  es acotado.

Más aún, si  $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}} = \emptyset$ , diremos que la segunda posición de recorte fuerte de  $\mathcal{K}$  es *óptima*.

(2) Por otra parte, decimos que la segunda posición de recorte débil o fuerte de  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es *extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$*  si  $\mathcal{F} \subset \{x_n = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \leq 0\}$ .

**Observaciones IV.3.2** (1) Nótese que la condición (2) de la Definición IV.3.1 implica la condición (1.i). Por tanto, todo poliedro convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$  contenido en  $\{x_n \leq 0\}$  y tal que  $\mathcal{F} := \mathcal{K} \cap \{x_n = 0\}$  es una faceta de  $\mathcal{K}$ , se encuentra en segunda posición de recorte débil y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .

(2) Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional que está situado en segunda posición de recorte fuerte. Entonces, existe  $N > 0$  tal que

$$B := \bigcup_{a \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}} \partial \mathcal{J}_a \subset \mathfrak{B}_{\mathcal{K}} \times [-N, N].$$

La demostración de este hecho es análoga a la del Lema IV.1.3 y no la incluimos. El hecho de que en la segunda posición de recorte fuerte la fibra  $\mathcal{J}_a$  no es necesariamente acotada, sino que sólo es acotada superiormente, no altera de forma relevante la demostración.

**Definición IV.3.3** Sean  $M > 0$  y  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio tal que  $d := \deg(P) = \deg_{x_n}(P) \geq 1$ . Abreviamos  $p :=$  polinómica y  $r :=$  regular y consideramos la función

$$\gamma_{P,M}^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} x_n \left(1 - x_n \frac{P^2(\mathbf{x})}{M}\right)^2 & \text{si } * = p, \\ x_n \frac{(1 - x_n P^2(\mathbf{x}))^2}{(1 - x_n P^2(\mathbf{x}))^2 + \frac{x_n^2 P^2(\mathbf{x})}{(M(1 + \|\mathbf{x}\|^2))^{2d+2}}} & \text{si } * = r, \end{cases}$$

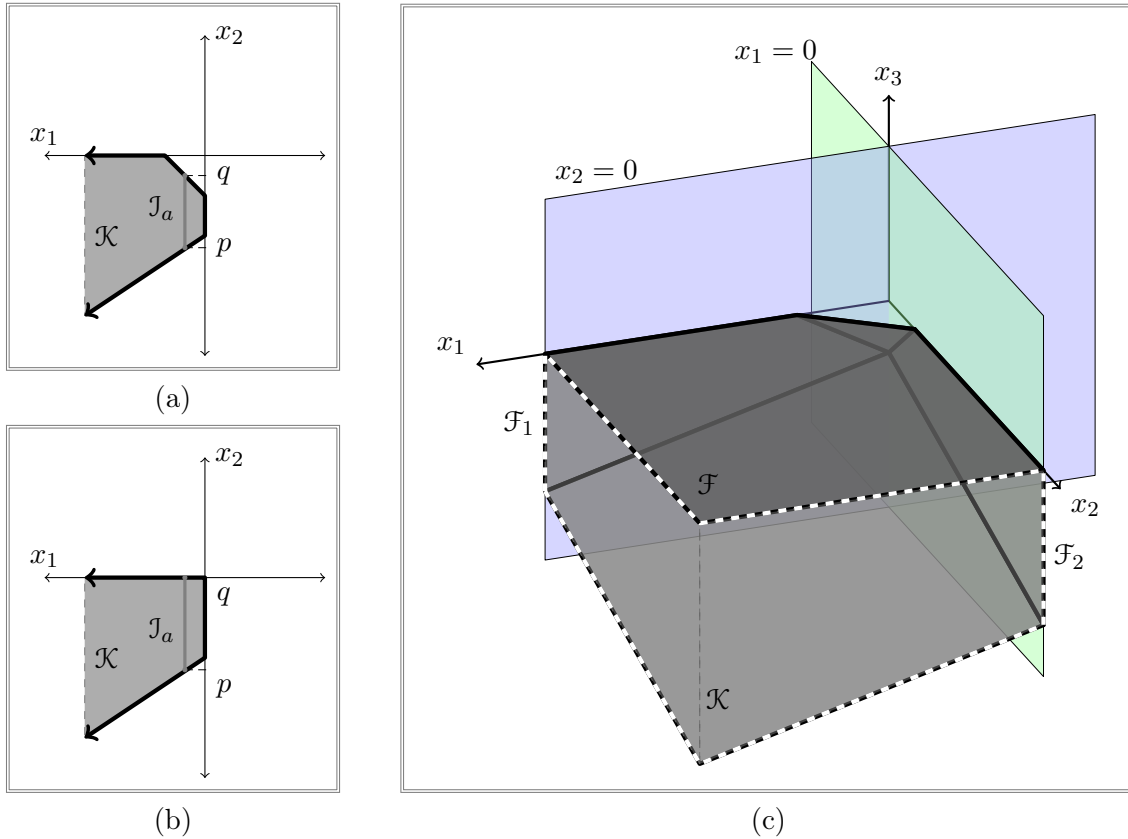


Figura IV.3.1: (a) y (b) muestran polígonos en segunda posición de recorte fuerte no óptima y óptima. (c) muestra un poliedro en segunda posición de recorte fuerte. En los tres casos el poliedro está en posición extrema respecto a una de sus facetas.

(que es polinómica o regular según el caso) y definimos la *aplicación recortante*  $\mathbf{G}_{P,M}^*$  de tipo II asociada a  $P$  y  $M$  como la aplicación (polinómica o regular según  $*$  = p o  $*$  = r)

$$\mathbf{G}_{P,M}^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma_{P,M}^*(x)).$$

Observamos que en cualquier caso  $\gamma_{P,M}^*$  es una aplicación regular de grado  $\deg(\gamma_{P,M}^*) = \deg_{x_n}(\gamma_{P,M}^*) \geq 1$ .

**Observaciones IV.3.4** Las siguientes propiedades se comprueban inmediatamente:

- (i) Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ , la función regular  $\gamma_{P,M}^{*,a}(\mathbf{x}_n) := \gamma_{P,M}^*(a, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}(\mathbf{x}_n)$  (que depende sólo de la variable  $\mathbf{x}_n$ ) tiene grado impar mayor o igual que 1; por tanto,  $\gamma_{P,M}^{*,a}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ .
- (ii) Para cada  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$  se satisface la igualdad  $\mathbf{G}_{P,M}^*(\pi_n^{-1}(a, 0)) = \pi_n^{-1}(a, 0)$  y por tanto  $\mathbf{G}_{P,M}^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .

- (iii) El conjunto de puntos fijos de  $\mathbf{G}_{P,M}^*$  contiene al conjunto  $\{x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n P(x) = 0\}$ .

A continuación presentamos algunos resultados preparatorios para la demostración del Lema IV.3.8 que es la contrapartida para la segunda posición de recorte del Lema IV.1.8 relativo a la primera posición de recorte.

**Lema IV.3.5** Sean  $f, \varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables cuyo lugar de ceros común  $\{f = 0, \varepsilon = 0\}$  es vacío. Escribimos  $g := \mathbf{x}_n \frac{f^2}{f^2 + \varepsilon^2}$  y supongamos que para cada  $x \in \{x_n \leq 0\}$  se cumple que

- $|f(x)| \geq 1$  y  $|x_n| \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| \varepsilon^2(x) < \frac{1}{16}$ ;
- $|x_n \varepsilon(x)| < \frac{1}{8}$ ,  $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}$  y  $\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| < \frac{1}{4}$ .

Entonces,  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(x) > \frac{1}{2}$  para cada  $x \in \{x_n \leq 0\}$  y  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(x) = 1$  para cada  $x \in \{\varepsilon = 0\}$ .

*Demostración.* Escribimos  $h := \frac{\varepsilon^2}{f^2 + \varepsilon^2}$ ; se cumple que  $g = \mathbf{x}_n(1 - h)$  y

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{2\varepsilon}{f^2 + \varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n} - \frac{\varepsilon^2}{(f^2 + \varepsilon^2)^2} \left( 2f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n} + 2\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n} = 1 - h - \mathbf{x}_n \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n}.$$

En particular,  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(x) = 1$  para cada  $x \in \{\varepsilon = 0\}$ . Consideramos la siguiente acotación:

$$\left| \mathbf{x}_n \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n} \right| \leq 2|\mathbf{x}_n \varepsilon| \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n} \right| \frac{1}{(f^2 + \varepsilon^2)} + 2|\mathbf{x}_n| \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n} \right| \varepsilon^2 \frac{|f|}{(f^2 + \varepsilon^2)^2} + 2|\mathbf{x}_n \varepsilon| \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n} \right| \frac{\varepsilon^2}{(f^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Ahora, si  $x \in \{x_n \leq 0\}$ , obtenemos, usando las acotaciones del enunciado:

$$\left| \mathbf{x}_n \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{64} < \frac{1}{4},$$

y por tanto

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_n}(x) = 1 - h(x) - \mathbf{x}_n \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \geq 1 - \left| \frac{\varepsilon^2(x)}{\varepsilon^2(x) + f^2(x)} \right| - \left| \mathbf{x}_n \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| > 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

como queríamos demostrar. □

**Lema IV.3.6** Sea  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio de grado  $d \geq 1$  y denotamos  $f := 1 - \mathbf{x}_n P^2$  y  $\varepsilon := \varepsilon_M := \frac{\mathbf{x}_n P}{M(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+1}}$ . Entonces, existe  $M_0 > 0$  tal que si  $M \geq M_0$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

- $|x_n| \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| \varepsilon^2(x) < \frac{1}{16}$ ;

$$\blacksquare \quad |x_n \varepsilon(x)| < \frac{1}{8}, \quad |\varepsilon(x)| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n}(x) \right| < \frac{1}{4}.$$

*Demostración.* En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned} \deg\left(\mathbf{x}_n^3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n} P^2\right) &\leq 4d + 3, \quad \deg(\mathbf{x}_n^2 P) = d + 2, \\ \deg(\mathbf{x}_n P) &= d + 1 \quad \text{y} \quad \deg\left(P + \mathbf{x}_n \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}\right) \leq d \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n} = \left(P + \mathbf{x}_n \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}\right) \frac{1}{M(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+1}} - \frac{2(d+1)\mathbf{x}_n^2 P}{M(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+2}}$$

Como consecuencia del Lema IV.1.6, existe  $M_0 > 0$  tal que si  $M \geq M_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{x}_n^3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n} P^2\right| &< \frac{M}{16}(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{2d+2} \implies \left|\mathbf{x}_n\right| \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_n}\right| \varepsilon^2 < \frac{1}{16}, \\ \left|\mathbf{x}_n^2 P\right| &< \frac{M}{8}(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+1} \implies |\mathbf{x}_n \varepsilon| < \frac{1}{8}, \\ \left|\mathbf{x}_n P\right| &< \frac{M}{2}(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+1} \implies |\varepsilon| < \frac{1}{2} \\ \left. \begin{aligned} \left|P + \mathbf{x}_n \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}\right| &< \frac{M}{8}(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+1} \\ 2(d+1)\left|\mathbf{x}_n^2 P\right| &< \frac{M}{8}(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{d+2} \end{aligned} \right\} \implies \left|\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}_n}(x)\right| < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

y por tanto se cumplen todas las desigualdades propuestas.  $\square$

**Lema IV.3.7** Sea  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$  un polinomio no nulo tal que  $d := \deg(P) = \deg_{\mathbf{x}_n}(P)$ . Entonces,

(i) Para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  existe un entero positivo  $M_K$  tal que si  $M \geq M_K$  la derivada parcial  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_n \leq 0\}$  y tiene valor constante 1 sobre el conjunto  $\{x_n P(x) = 0\}$ .

(ii) Existe  $M_0 > 0$  tal que si  $M \geq M_0$  la derivada parcial  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^r}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva en el conjunto  $\{x_n \leq 0\}$  y tiene valor constante 1 sobre el conjunto  $\{x_n P(x) = 0\}$  para cada  $M > 0$ .

*Demostración.* Para probar (i), primero observamos que

$$\frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial \mathbf{x}_n} = \left(1 - \mathbf{x}_n \frac{P^2(\mathbf{x})}{M}\right) \left(1 - 3\mathbf{x}_n \frac{P^2(\mathbf{x})}{M} - 4\mathbf{x}_n^2 \frac{P(\mathbf{x})}{M} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x})\right)$$

Denotamos  $M_K \geq 1$  el máximo de la función continua

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left| 4x_n^2 P(x) \frac{\partial P}{\partial x_n}(x) \right|$$

sobre el compacto  $K \cap \{x_n \leq 0\}$ . Se cumple que si  $M \geq M_K$ , entonces  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial x_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_n \leq 0\}$ . Además, como  $x_n P(x)$  divide a  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial x_n}(x) - 1$ , la derivada parcial  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial x_n}$  tiene valor constante 1 sobre el conjunto  $\{x_n P(x) = 0\}$ .

Para probar (ii), basta observar que  $f := 1 - x_n P^2$  es mayor o igual que 1 sobre el conjunto  $\{x_n \leq 0\}$  y aplicar los Lemas IV.3.5 y IV.3.6 tomando  $\varepsilon := \frac{x_n P(x)}{(M(1+\|x\|^2))^{d+1}}$  y  $g := \gamma_{P,M}^r$ .  $\square$

Ya estamos preparados para demostrar el análogo al Lema IV.1.8 para poliedros en segunda posición de recorte.

**Lema IV.3.8** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional situado en segunda posición de recorte débil o fuerte y  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  las facetas de  $\mathcal{K}$  contenidas en hiperplanos no paralelos a  $\vec{e}_n$ . Sean  $\Lambda$  un subconjunto arbitrario del hiperplano  $\Pi = \{x_n = 0\}$  y  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio que se anula sobre  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$  y tiene grado  $\deg(P) = \deg_{x_n}(P)$  (véase la Observación IV.1.5). Escribimos

$$* = \begin{cases} r & \text{si la segunda posición de recorte de } \mathcal{K} \text{ es sólo débil,} \\ p & \text{si la segunda posición de recorte de } \mathcal{K} \text{ es fuerte.} \end{cases}$$

Entonces, existe  $M > 0$  tal que

$$\mathbf{G}_{P,M}^*(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) = \mathbf{G}_{P,M}^*(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cup \Lambda)) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K} \cap \{x_n \leq 0\}).$$

*Demostración.* En primer lugar, para cada  $a := (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  consideramos los conjuntos

$$\mathcal{M}_a := \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})\},$$

$$\mathcal{N}_a := \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cup \Lambda)\} = \begin{cases} \mathcal{M}_a & \text{si } (a, 0) \notin \Lambda, \\ \mathcal{M}_a \setminus \{0\} & \text{si } (a, 0) \in \Lambda. \end{cases}$$

$$\mathcal{T}_a := \{t \in \mathbb{R} : (a, t) \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K} \cap \{x_n \leq 0\})\} = \mathcal{M}_a \cup [0, +\infty[.$$

De la definición de estos conjuntos se desprenden las siguientes igualdades:

$$\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} \{a\} \times \mathcal{M}_a, \quad \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cup \Lambda) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} \{a\} \times \mathcal{N}_a,$$

$$\text{y } \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K} \cap \{x_n \leq 0\}) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{R}^{n-1}} \{a\} \times \mathcal{T}_a.$$



(IV.3.8.1) Llegados a este punto, elegimos  $M > 0$  del modo siguiente. Si  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte,  $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$  está acotado y existe, por la Observación IV.3.2(2), un número real  $N > 0$  tal que  $B := \bigcup_{a \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}} \partial J_a \subset \mathfrak{B}_{\mathcal{K}} \times [-N, N]$ , donde  $J_a := \pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K}$ . Por el Lema IV.3.7 (i) aplicado al compacto  $K := \text{Cl}(\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}) \times [-N, N]$ , existe  $M > 0$  tal que la derivada parcial  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^*}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \gamma_{P,M}^p}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva sobre  $K \cap \{x_n \leq 0\}$ . Por otra parte, si  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte débil existe, por el Lema IV.3.7 (ii),  $M > 0$  tal que la derivada parcial  $\frac{\partial \gamma_{P,M}^*}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \gamma_{P,M}^r}{\partial \mathbf{x}_n}$  es estrictamente positiva en el conjunto  $\{x_n \leq 0\}$ .

(IV.3.8.2) Como  $G_{P,M}^*$  preserva las rectas  $\pi_n^{-1}(a, 0)$ , para probar el resultado que nos ocupa basta demostrar que  $\gamma_{P,M}^{*,a}(\mathcal{M}_a) = \gamma_{P,M}^{*,a}(\mathcal{N}_a) = \mathcal{J}_a$  para todo  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

(IV.3.8.3) Para comprobar esto observamos primero si  $\lambda \leq 0$  y  $\gamma_{P,M}^{*,a}(\lambda) = \lambda$ , entonces

$$\gamma_{P,M}^{*,a}(]-\infty, \lambda]) = ]-\infty, \lambda[. \quad (\text{IV.3.1})$$

En particular, como  $\gamma_{P,M}^{*,a}(0) = 0$ , la igualdad anterior se cumple para  $\lambda = 0$ .

En efecto, observamos en primer lugar que

- $\gamma_{P,M}^{p,a}(t) \leq t$  para cada  $t < 0$ .
- $\gamma_{P,M}^{r,a}(t)$  es estrictamente creciente en el intervalo  $]-\infty, 0]$ , como consecuencia del Lema IV.3.7 (ii).

Como además  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{P,M}^{*,a}(t) = -\infty$ , concluimos que la igualdad (IV.3.1) es cierta.

(IV.3.8.4) A continuación comprobamos que:  $\gamma_{P,M}^{*,a}(]r, +\infty]) = [0, +\infty[$  para todo  $r \geq 0$  tal que  $rP(r, a) = 0$ .

En efecto, la inclusión  $\gamma_{P,M}^{*,a}(]r, +\infty]) \subset [0, +\infty[$  es evidente. Para probar la otra inclusión definimos

$$\delta_a^*(\mathbf{t}) := \begin{cases} 1 - \frac{\mathbf{t}P^2(a, \mathbf{t})}{M} & \text{si } * = \text{p} \\ 1 - \mathbf{t}P^2(a, \mathbf{t}) & \text{si } * = \text{r} \end{cases}$$

y observamos que, si  $rP(a, r) = 0$ , entonces  $\delta_a^*(r) = 1$ . Por tanto, como  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_a^*(t) = -\infty$ , existe  $t_0 > r$  tal que  $\delta_a^*(t_0) = 0$ . Por continuidad se deduce que

$$[0, +\infty[ \subset \gamma_{P,M}^{*,a}([t_0, +\infty]) \subset \gamma_{P,M}^{*,a}(]r, +\infty]) \subset [0, +\infty[,$$

lo que prueba IV.3.8.4. Esto se aplica, en particular, a  $r = 0$  y a cualquier  $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ , de modo que en esta situación

$$\gamma_{P,M}^{*,a}(]0, +\infty]) = [0, +\infty[. \quad (\text{IV.3.2})$$

Pasamos ya a demostrar IV.3.8.2, para lo que distinguimos los siguientes casos:

**Caso 1:**  $\mathcal{M}_a = \mathbb{R}$ . Entonces,  $\mathcal{M}_a \setminus \{0\} \subset \mathcal{N}_a \subset \mathcal{M}_a$ , y en virtud de las igualdades (IV.3.1) y (IV.3.2) tenemos

$$\mathbb{R} = \gamma_{P,M}^{*,a} ]-\infty, 0[ \cup \gamma_{P,M}^{*,a} ]0, +\infty[ \subset \gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{N}_a) \subset \gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{M}_a) \subset \mathbb{R}.$$

Por tanto  $\gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{M}_a) = \gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{N}_a) = \mathbb{R} = \mathcal{T}_a$ .

**Caso 2:**  $\mathcal{M}_a = \mathbb{R} \setminus ]p, q[$ , donde  $-\infty \leq p < q$ . Nótese que  $(a, q) \in \partial\mathcal{K}$  y, si  $p > -\infty$ , también  $(a, p) \in \partial\mathcal{K}$ . Se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{P,M}^{*,a} (t) &= -\infty, & \gamma_{P,M}^{*,a} (p) &= p \quad (\text{si } p > -\infty); \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{P,M}^{*,a} (t) &= +\infty, & \gamma_{P,M}^{*,a} (q) &= q. \end{aligned}$$

Analizamos el comportamiento de la función  $\gamma_{P,M}^{*,a}$  sobre intervalos no acotados:

(i) Si  $q < 0$ , entonces  $\gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[) = \gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[ \setminus \{0\}) = [q, +\infty[$ .

En efecto, como  $\mathcal{M}_a \setminus \{0\} \subset \mathcal{N}_a \subset \mathcal{M}_a$  y  $\gamma_{P,M}^{*,a}$  es estrictamente creciente en el intervalo  $[q, 0] \subset [-N, N]$  (véase IV.3.8.1), deducimos que  $\gamma_{P,M}^{*,a} ([q, 0]) = [q, 0[$ . De aquí concluimos, empleando de nuevo la igualdad (IV.3.2), que

$$[q, +\infty[ = [q, 0[ \cup [0, +\infty[ = \gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[ \setminus \{0\}) = \gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[).$$

(ii) Si  $q \geq 0$  entonces  $\gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[) = \gamma_{P,M}^{*,a} ([q, +\infty[ \setminus \{0\}) = [0, +\infty[$ , en virtud de IV.1.8.4.

(iii) Si  $-\infty < p < 0$  entonces  $\gamma_{P,M}^{*,a} ]-\infty, p[) = ]-\infty, p[$ , por la igualdad IV.3.1.

(iv) Por último, si  $p \geq 0$  se tiene  $]-\infty, 0[ \subset \gamma_{P,M}^{*,a} ]-\infty, p[ \setminus \{0\}) \subset \gamma_{P,M}^{*,a} ]-\infty, p[)$ , como consecuencia de la igualdad (IV.3.1).

De lo anterior se deducen las igualdades buscadas:

$$\gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{M}_a) = \gamma_{P,M}^{*,a} (\mathcal{N}_a) = \begin{cases} \mathcal{M}_a = \mathcal{T}_a & \text{si } q < 0, \\ \mathcal{M}_a \cup [0, +\infty[ = \mathcal{T}_a & \text{si } q \geq 0. \end{cases}$$

y con esto concluye la prueba. □

**IV.3.b. Colocación en segunda posición de recorte. Limitaciones.** El objetivo de esta sección es estudiar cuándo un poliedro no degenerado se puede colocar, tras un cambio afín de coordenadas, en segunda posición de recorte fuerte, pues ya sabemos que en segunda posición de recorte débil siempre es posible. Es evidente que las posibles obstrucciones sólo se presentan si el poliedro es no acotado. Veremos en primer lugar dos caracterizaciones de la segunda posición de recorte fuerte en términos de proyecciones, que serán de gran utilidad a lo largo de la sección. Una vez hecho esto, veremos que para dimensión 2, siempre es posible situar un polígono convexo no acotado en la mejor de las

posiciones posibles. Para  $n = 3$  todo poliedro convexo no acotado se puede colocar en segunda posición de recorte fuerte. Sin embargo, para  $n \geq 4$  es posible encontrar poliedros convexos no acotados que no se pueden posicionar en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas no acotadas (véase la Observación IV.3.15 para  $n = 4$ ).

No incluimos la demostración del siguiente resultado porque es esencialmente igual a la prueba del Lema IV.1.9 relativo a la colocación en primera posición de recorte.

**Lema IV.3.9 (Segunda posición de recorte fuerte I)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado en segunda posición de recorte débil. Para cada  $M \geq 0$  escribimos  $\mathcal{K}_M := \mathcal{K} \cup -M, M]^n$ . Entonces,  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte si y sólo si existe  $M \geq 0$  tal que  $\pi_n(\mathcal{K}_M) = \mathcal{K}_M \cap \{x_n = 0\}$ . Además, dicha posición es óptima si y sólo si podemos elegir  $M = 0$ .*

**Proposición IV.3.10 (Segunda posición de recorte fuerte II)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y no degenerado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .
- (ii) *Se cumplen las siguientes condiciones:*
  - $\mathcal{F} \subset \{x_n = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \leq 0\}$ ,
  - $\vec{\pi}_n(\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = 0\}$ ,
  - *Existe un hiperplano  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  tal que: su dirección  $\vec{\Pi}$  contiene a la recta vectorial  $\vec{\ell}_n$  generada por  $\vec{e}_n$ ,  $\Pi$  corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  no paralelas a  $\vec{\ell}_n$ , las aristas acotadas de  $\mathcal{K}$  están contenidas en el semiespacio abierto  $\text{Int}(\Pi^-)$  y  $\pi_n(\mathcal{K} \cap \Pi) = \mathcal{K} \cap \Pi \cap \{x_n = 0\}$ .*

*Demostración.* Comenzamos demostrando que (i) implica (ii). En primer lugar es claro que  $\mathcal{F} \subset \{x_n = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \leq 0\}$  y además  $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$  es acotado (véase la Definición IV.3.1). Por la Proposición I.4.26, se cumplen las dos condiciones que nos faltan en el aserto (ii).

Recíprocamente, en las hipótesis de (ii) se cumple que  $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$  es acotado,  $\mathcal{F} \subset \{x_n = 0\}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \leq 0\}$ . Además, como  $\mathcal{K} \subset \{x_n = 0\}$  todas las intersecciones  $\pi_n^{-1}(a, 0) \cap \mathcal{K} \subset ((a, 0) + \vec{\Pi}) \cap \mathcal{K}$  están acotadas superiormente. Por tanto,  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Veamos a continuación los diversos resultados concernientes a la colocación “efectiva” de poliedros en segunda posición de recorte (débil o fuerte) anunciados anteriormente.

**Lema IV.3.11 (Segunda posición de recorte fuerte para polígonos)** *Sean  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  un polígono no degenerado y no acotado y  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{P}$ . Se cumple que:*

- (i) Si  $\mathcal{A}$  es una de las dos aristas no acotadas de  $\mathcal{P}$ , entonces, tras un cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{P}$  está en segunda posición de recorte fuerte, óptima y extrema con respecto a la arista  $\mathcal{A}$ .
- (ii) Si  $H_1$  contiene una arista no acotada de  $\mathcal{P}$ , entonces, tras un cambio afín de coordenadas, el polígono convexo  $\mathcal{P}_{1,\times} = \bigcap_{i=2}^m H_i^+$  está en segunda posición de recorte fuerte.

*Demostración.* (i) Sean  $\ell$  la recta que contiene a  $\mathcal{A}$ ,  $p \in \mathcal{A}$  el vértice de  $\mathcal{P}$  que es extremo de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  la arista de  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \{p\}$ . Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $\ell := \{x_2 = 0\}$  y  $\mathcal{A}' \subset \{x_1 = 0, x_2 \leq 0\}$ . Bajo estas condiciones se comprueba directamente que  $\mathcal{P}$  está en segunda posición de recorte fuerte y óptima con respecto a la arista  $\mathcal{A}$ .

(ii) Escribimos  $\mathcal{P} := [\vec{u}, p_1, \dots, p_{m-1}, \vec{v}]$  donde  $p_1, \dots, p_{m-1}$  son los vértices de  $\mathcal{P}$  y  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{P})$  son vectores directores de sus aristas no acotadas; podemos suponer que  $p_1\vec{u} \subset H_1$ . Sea  $\ell$  una recta de soporte de  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{P} \cap \ell = \{p_2\}$ . Tras un cambio afín de coordenadas que transforma la recta  $\ell$  en  $\{x_1 = 0\}$  y una reordenación de los índices de las rectas  $H_i$ , que no afectan al enunciado, podemos suponer que  $\mathcal{P} \subset \{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$ ,  $p_2 := (0, -1)$ ,  $p_1 := (1, 0)$  y  $p_1\vec{u} \subset H_1 := \{x_2 = 0\}$ . Bajo estas condiciones se comprueba directamente que  $\mathcal{P}_{1,\times}$  está en segunda posición de recorte fuerte.  $\square$

**Observación IV.3.12** El resultado análogo al Lema IV.3.11(i) no es cierto en general para polígono acotados, es decir, existen polígonos acotados que no se pueden colocar tras un cambio afín de coordenadas en segunda posición de recorte fuerte, óptima y extrema con respecto a una de sus caras. Veamos a continuación que basta considerar, por ejemplo, un hexágono regular de  $\mathbb{R}^2$  (para un pentágono regular ocurre exactamente lo mismo, pero los números involucrados son menos manejables).

En efecto, como consecuencia del Lema IV.3.9 es suficiente comprobar que dada una recta vectorial  $\vec{\ell} : x_2 = mx_1$  y el hexágono  $\mathcal{P}$  de vértices  $p_k := e^{2k\pi\sqrt{-1}/6}$  (en notación compleja) para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  se cumple que la proyección  $\pi_{\vec{\ell}}$  de  $\mathcal{P}$  en la dirección de la recta  $\vec{\ell}$  sobre la recta  $\{x_2 = -\sqrt{3}/2\}$  no está contenida en la arista  $\overline{p_4p_5}$ . En primer lugar, observamos que en caso contrario cumpliría que  $\pi_{\vec{\ell}}(p_0) \in \overline{p_4p_5}$  y entonces la pendiente  $m$  de la recta  $\vec{\ell}$  pertenece al intervalo  $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3})$ . Igualmente, se tendría que cumplir que  $\pi_{\vec{\ell}}(p_3) \in \overline{p_4p_5}$  y entonces la pendiente  $m \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$ . Pero ambas afirmaciones son excluyentes, y llegamos a contradicción.

**Lema IV.3.13 (Poliedros con aristas no acotadas paralelas)** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y no degenerado cuyas aristas no acotadas son paralelas. Entonces,  $\mathcal{K}$  se puede colocar, mediante un cambio afín de coordenadas, en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a cualquiera de sus facetas acotadas  $\mathcal{F}$ .

*Demostración.* Observamos en primer lugar que si  $\mathcal{F}$  es una faceta acotada de  $\mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{F}$  no es paralela a las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  porque en caso contrario, si  $H$  denota el hiperplano generado por  $\mathcal{F}$ , tendríamos que

$$\vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \cap \vec{H} = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \cap H) = \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$$

y  $\mathcal{F}$  sería no acotada, contradicción. De este modo, tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $\mathcal{K} \subset \{x_n \leq 0\}$ ,  $\mathcal{K} \cap \{x_n = 0\}$  es una cara de  $\mathcal{K}$  y las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  son paralelas al vector  $\vec{e}_n$ . De esta manera  $\mathcal{K}$  se encuentra en posición FU con respecto al hiperplano  $\vec{\Pi} := \{x_n = 0\}$  con la orientación opuesta a la usual. Por el Corolario I.4.20(iii) y usando que  $\vec{\pi}_n(\vec{e}_n) = \mathbf{0}$ , deducimos que  $\pi_n(\mathcal{K})$  es un poliedro acotado y por tanto, si elegimos  $M > 0$  tal que  $\pi_n(\mathcal{K}) \subset ]-M, M[^n \cap \{x_n = 0\}$ , deducimos que

$$\pi_n(\mathcal{K} \cup ]-M, M[^n) = ]-M, M[^n \cap \{x_n = 0\} = (\mathcal{K} \cup ]-M, M[^n) \cap \{x_n = 0\}$$

y por el Lema IV.3.9 concluimos que  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema IV.3.14 (Poliedros tridimensionales)** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  un poliedro convexo no acotado y no degenerado tal que  $\dim \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \geq 2$  y sea  $\mathcal{F}$  una faceta de  $\mathcal{K}$  con  $\dim \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = 2$ . Entonces,  $\mathcal{K}$  se puede colocar, mediante un cambio afín de coordenadas, en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $\mathcal{K} \subset \{x_3 \leq 0\}$  y  $\mathcal{K} \cap \{x_3 = 0\} = \mathcal{F}$ . Observamos que  $\mathcal{F}$  es un polígono no acotado y, como consecuencia del Lema I.4.7, tiene exactamente dos aristas no acotadas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  que no son paralelas porque  $\dim \vec{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = 2$ . Sean  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  las facetas (no acotadas) de  $\mathcal{K}$  que cumplen que  $\mathcal{A}_i = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}$ . Sean  $H_1$  y  $H_2$  los planos de  $\mathbb{R}^3$  generados por  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ . Observamos que como  $H_1 \cap \{x_3 = 0\}$  y  $H_2 \cap \{x_3 = 0\}$  son rectas (coplanarias) no paralelas, podemos suponer tras un cambio afín de coordenadas que deja invariante el plano  $\{x_3 = 0\}$  que  $H_1 := \{x_1 = 0\}$  y  $H_2 := \{x_2 = 0\}$ . Además, tras un cambio del tipo  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$  podemos suponer además que  $\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0\}$ . En particular, la recta intersección  $\ell_3 := H_1 \cap H_2$  tiene por dirección la recta  $\vec{\ell}_3$  generada por el vector  $\vec{e}_3$ . Consideramos la proyección afín

$$\pi_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$$

de base  $H_3 := \{x_3 = 0\}$  y dirección la recta  $\vec{\ell}_3$ . Veamos que existe un  $M \geq 0$  tal que  $\mathcal{K}_M := \mathcal{K} \cup ]-M, M[^3$  cumple que  $\pi_3(\mathcal{K}_M) = \mathcal{K}_M \cap \{x_3 = 0\}$  y entonces, por el Lema IV.3.9, tendremos que  $\mathcal{K}$  está en segunda posición de recorte fuerte (y extrema con respecto a su faceta  $\mathcal{F}$ ). Elegimos  $M \geq 0$  tal que los vértices  $p_1$  y  $p_2$  de  $\mathcal{K}$  que son extremos de  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  están contenidos en  $] -M, M[^3$ . Nótese que  $\mathcal{A}_1 \subset \{x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$  y que

$\mathcal{A}_2 \subset \{x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$ . Como el polígono convexo  $\mathcal{P}$  de aristas no acotadas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  y vértices  $p_1, p_2$  está contenido en  $\mathcal{F}$  deducimos que

$$\mathcal{F} \cup (]-M, M[^2 \times \{0\}) = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\} \cup (]-M, M[^2 \times \{0\}).$$

Por tanto, como  $\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0\}$  tenemos

$$\begin{aligned} \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\} \cup (]-M, M[^2 \times \{0\}) &\subset \pi_3(\mathcal{K} \cup ]-M, M[^3) \\ &\subset \pi_3(\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0\}) \cup \pi_3(]-M, M[^2 \times \{0\}) \\ &\subset \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\} \cup ]-M, M[^2 \times \{0\}) \end{aligned}$$

y de este modo

$$\begin{aligned} \pi_3(\mathcal{K}_M) &= \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\} \cup (]-M, M[^2 \times \{0\}) \\ &= \mathcal{F} \cup (]-M, M[^2 \times \{0\}) = \mathcal{K}_M \cap \{x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Observación IV.3.15** Sean  $n \geq 4$ ,  $d := n - 1$  y  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro convexo acotado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  tal que para cada proyección  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  en la dirección de una recta  $\vec{\ell}$  y con base un hiperplano  $W$  de  $\mathbb{R}^d$  se cumple que  $\mathcal{P} \cap W \neq \pi(\mathcal{P})$  (véase el Teorema C.3). Sea  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times [0, +\infty[ \subset \mathbb{R}^n$ ; afirmamos que  $\mathcal{K}$  no se puede situar en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a una de sus facetas no acotadas. En caso contrario, existiría un cambio afín de coordenadas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{K}' := f(\mathcal{K})$  está en segunda posición de recorte con respecto a una de sus facetas no acotadas  $\mathcal{F}$  que está contenida en el hiperplano  $\{x_n = 0\}$ ; en particular, las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$  son paralelas a una recta  $\vec{\ell}$  contenida en el hiperplano  $\{x_n = 0\}$ , y por tanto no son paralelas a la recta vectorial  $\vec{\ell}_n$  generada por  $\vec{e}_n$ . Por la Proposición IV.3.10, existe un hiperplano  $\Pi' \subset \mathbb{R}^n$  tal que: su dirección  $\vec{\Pi}'$  contiene a la recta  $\vec{\ell}_n$ , el hiperplano  $\Pi'$  corta a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$  no paralelas a  $\vec{\ell}_n$  (es decir, a todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}'$ , porque ninguna de ellas es paralela a  $\vec{\ell}_n$ ), las aristas acotadas de  $\mathcal{K}'$  están contenidas en el semiespacio abierto  $\text{Int}(\Pi'^-)$  y  $\pi_n(\mathcal{K}' \cap \Pi') = \mathcal{K}' \cap \Pi' \cap \{x_n = 0\}$ . Procediendo ahora como en IV.1.16.1, llegamos a contradicción. Por consiguiente,  $\mathcal{K}$  no se puede colocar en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a ninguna de sus facetas no acotadas.

## IV.4. Complementario del interior de un poliedro convexo

El objetivo de esta sección es demostrar la parte relativa al complementario del interior de un poliedro convexo recogida en los Teoremas IV.2 y IV.3. Con más precisión, probaremos el siguiente resultado:

**Teorema IV.4.1** Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y  $n$ -dimensional que no es una franja. Se cumple que:

- (i) Si  $\mathcal{K}$  es acotado, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Si  $\mathcal{K}$  no es acotado, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) Si  $\mathcal{K}$  no es acotado y  $n = 2$  ó  $3$ , entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

Antes de ello, necesitamos el siguiente resultado preliminar.

**Lema IV.4.2 (El ortante)** Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional no degenerado y con  $n \geq 2$  facetas. Entonces  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Tras efectuar un cambio afín de coordenadas, es suficiente demostrar, por inducción sobre  $n$ , que  $p(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_n) = n$  para cada  $n \geq 2$ , donde

$$\mathcal{Q}_n := \{x_1 > 0, \dots, x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Para  $n = 2$  aplicamos la Proposición II.3.20, y suponemos probado, por hipótesis de inducción, que  $p(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathcal{Q}_{n-1}) = n - 1$  (si  $n \geq 3$ ), esto es, existe una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  con  $f(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathcal{Q}_{n-1}$ . Definimos

$$f^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

que cumple la igualdad

$$f^{(1)}(\mathbb{R}^n) = f(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R} = (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathcal{Q}_{n-1}) \times \mathbb{R}.$$

Sea  $f^{(2)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un cambio afín de coordenadas tal que  $f^{(2)}((\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathcal{Q}_{n-1}) \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_1)$ , donde

$$\mathcal{K}_1 = \{x_1 \geq 0, \dots, x_{n-3} \geq 0, x_{n-2} + x_n \geq 0, x_{n-2} - x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

es un poliedro situado en primera posición de recorte fuerte como ya vimos en la demostración del Lema IV.2.2. Por el Lema IV.1.8 existe una aplicación polinómica  $f^{(3)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f^{(3)}(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_1)) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}_1) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}).$$

Consideramos ahora el cambio afín de coordenadas

$$f^{(4)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1});$$

y se comprueba directamente que  $\mathcal{K}'_1 = f^{(4)}(\mathcal{K}_1)$  se encuentra en segunda posición de recorte fuerte, óptima y extrema con respecto a la faceta  $\mathcal{F}' := f^{(4)}(\mathcal{K}_1 \cap x_{n-1} = 0) = \mathcal{K}'_1 \cap \{x_n = 0\}$ . Por el Lema IV.3.8 existe una aplicación polinómica  $f^{(5)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f^{(5)}(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}'_1) \cap \{x_n \leq 0\})) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}'_1) \cap \{x_n < 0\}).$$

Además, existe un cambio afín de coordenadas  $f^{(6)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f^{(6)}(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}'_1) \cap \{x_n < 0\})) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_n.$$

Por tanto, la composición  $g := f^{(6)} \circ f^{(5)} \circ f^{(4)} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)} \circ f^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación polinómica que cumple  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Q}_n$ .  $\square$

*Demostración del Teorema IV.4.1(i).* Supongamos en primer lugar que  $\mathcal{K} := \Delta$  es un  $n$ -símplice. Podemos suponer que  $\Delta$  es el  $n$ -símplice cuyos vértices son

$$v_0 := (0, \dots, 0), \quad v_i := (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0), \quad \text{para } i \neq n-1 \text{ y } v_{n-1} := (0, \dots, -1, 0),$$

que por ser acotado está situado en primera posición de recorte fuerte. Escribimos  $\Delta := \bigcap_{i=1}^{n+1} H_i^+$  donde  $\{H'_1, \dots, H'_{n+1}\}$  es la presentación mínima de  $\Delta$ , y ordenamos estos hiperplanos de modo que  $H'_1 = \{x_n = 0\}$ . En consecuencia, el poliedro  $\Delta_{1,\times} := \bigcap_{i=2}^{n+1} H_i^+$  es convexo,  $n$ -dimensional, no degenerado y tiene  $n$  facetas. Por el Lema IV.4.2 existe una aplicación polinómica  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\Delta_{1,\times})$ . Por los Lemmas IV.1.8 y IV.3.8, y usando adecuadamente el cambio de coordenadas afín que intercambia las variables  $\mathbf{x}_{n-1}$  y  $\mathbf{x}_n$ , existe una aplicación polinómica  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\Delta_{1,\times})) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\Delta)$ , y en consecuencia la composición  $f := h \circ g$  es una aplicación polinómica y  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\Delta)$ .

Sea ahora  $\mathcal{K}$  un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos un  $n$ -símplice  $\Delta$  de modo que  $\mathcal{K} \subset \text{Int}(\Delta)$ . Escribimos  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ , donde  $\{H_1, \dots, H_m\}$  es la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ , y consideramos los poliedros  $\{\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_m\}$  definidos por

$$\mathcal{K}_0 := \Delta, \quad \mathcal{K}_j := \mathcal{K}_{j-1} \cap H_j^+ \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

Así  $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}$  y para cada  $1 \leq j \leq m$  el poliedro  $\mathcal{K}_j = \Delta \cap (\bigcap_{i=1}^j H_i^+)$  tiene una faceta  $\mathcal{F}_j$  contenida en el hiperplano  $H_j$ . Además, el conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \Delta$  es, según acabamos de ver, la imagen de una aplicación polinómica  $f^{(0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Para cada índice  $1 \leq j \leq m$  existe un cambio afín de coordenadas  $h^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h^{(j)}(H_j^+) = \{x_{n-1} \leq 0\}$ ; sea

$$\mathcal{K}'_j := h^{(j)}(\mathcal{K}_j) = h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1}) \cap h^{(j)}(H_j^+) = h^{(j)}(\mathcal{K}_{j-1}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}.$$

Por los Lemmas IV.1.8 y IV.3.8, y usando adecuadamente el cambio de coordenadas afín que intercambia las variables  $\mathbf{x}_{n-1}$  y  $\mathbf{x}_n$  (como ya hicimos en la demostración del Lema IV.4.2), existe una aplicación polinómica  $g^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$g^{(j)}(\mathbb{R}^n \setminus h^{(j)}(\text{Int}(\mathcal{K}_{j-1}))) = \mathbb{R}^n \setminus h^{(j)}(\text{Int}(\mathcal{K}_{j-1} \cap \{x_{n-1} \leq 0\})) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}'_j),$$

y por tanto la aplicación polinómica  $f^{(j)} := (h^{(j)})^{-1} \circ g^{(j)} \circ h^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface la igualdad

$$f^{(j)}(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{j-1})) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_j).$$



Así, la composición  $f := f^{(m)} \circ \dots \circ f^{(0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación polinómica que cumple  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_m) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

*Demostración del Teorema IV.4.1(ii) y (iii).* Para simplificar la notación de esta prueba diremos que una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *admisibile* si  $2 \leq n \leq 3$  y  $f$  es polinómica, o  $n > 3$  y  $f$  es regular. Por tanto deberemos demostrar que:

(IV.4.1.1) Sean  $n \geq 2$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no acotado y  $n$ -dimensional que no es una franja. Entonces existe una aplicación admisibile  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Procederemos por inducción sobre el par  $(n, m)$  donde  $n$  denota la dimensión de  $\mathcal{K}$  y  $m$  el número de facetas de  $\mathcal{K}$ . En primer lugar, abordamos el caso  $n = 2$ .

Para  $m = 1$  la imagen de la aplicación  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$  es el semiplano  $\{y \geq 0\}$ , que es el complementario del interior  $\{y < 0\}$  del semiplano  $\{y \leq 0\}$ . Para  $m = 2$ , el complementario del interior  $\{x > 0, y < 0\}$  del ángulo  $\{x \geq 0, y \leq 0\}$  es la imagen de  $\mathbb{R}^2$  por la composición de las aplicaciones

$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2) \quad \text{y} \quad (x, y) \equiv z = x + iy \mapsto z^3 \equiv (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

En ambos casos, obviamente, un cambio afín de coordenadas permite expresar el complementario de cualquier semiplano cerrado y de cualquier ángulo cerrado como imagen de una aplicación admisibile  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Suponemos que el enunciado IV.4.1.1 es cierto para todo polígono convexo que no es una banda y tiene  $m \geq 2$  aristas, y sea  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i^+$ , donde  $\{H_1, \dots, H_{m+1}\}$  es la presentación mínima de un polígono convexo  $\mathcal{K}$  con  $m + 1$  aristas. Por el Lema IV.1.12(ii), si  $H_1$  contiene a una arista no acotada de  $\mathcal{K}$ , podemos suponer que  $\mathcal{K}_{1,\times} = \bigcap_{i=2}^{m+1} H_i^+$  está en segunda posición de recorte fuerte. Por la hipótesis de inducción, y puesto que  $\mathcal{K}_{1,\times}$  no es una banda y tiene  $m$  aristas, existe una aplicación admisibile  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times})$ . Ahora, por el Lema IV.3.8 existe una aplicación admisibile  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times})) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$ . En consecuencia, la imagen de la aplicación admisibile  $h \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es

$$(h \circ g)(\mathbb{R}^2) = h(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times})) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(\mathcal{K}),$$

lo que completa la demostración del caso  $n = 2$ .

Supondremos en lo sucesivo que  $n \geq 3$  y que el resultado es cierto para todo poliedro convexo  $(n - 1)$ -dimensional contenido en  $\mathbb{R}^{n-1}$  que no es una franja. Distinguiremos varios casos:

**Caso 1.**  $\mathcal{K}$  es un poliedro convexo degenerado. Por el Lema I.4.13, existen  $1 \leq k_0 < n$  y un poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^{k_0}$  de dimensión  $k_0$  tales que, tras un cambio afín de coordenadas,  $\mathcal{K} = \mathcal{P}_0 \times \mathbb{R}^{n-k_0}$ . Si  $k_0 = 1$  podemos suponer, puesto que  $\mathcal{K}$  no es una franja, que  $\mathcal{P}_0 = [0, +\infty[$  y reescribimos  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{n-2}$  donde  $\mathcal{P} := \{x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Por otro lado, si  $k_0 \geq 2$  denotamos  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0$ . De este modo, en ambos casos  $\mathcal{K} = \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{n-k}$

donde  $k := 2$  en el primer caso y  $k := k_0$  en el segundo. Ahora por hipótesis de inducción  $\mathbb{R}^k \setminus \text{Int}(\mathcal{P})$  es imagen de  $\mathbb{R}^k$  mediante una aplicación admisible  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y entonces, la imagen de la aplicación admisible  $(f, \text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}}) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  es  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})$ .

**Caso 2.**  $\mathcal{K}$  es un poliedro convexo no degenerado. Si  $\mathcal{K}$  tiene  $n$  facetas (y necesariamente un único vértice), basta aplicar el Lema IV.4.2. Supondremos por tanto que el número  $m$  de facetas de  $\mathcal{K}$  es estrictamente mayor que  $n$  y sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K} := \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ .

(2.1) Si  $n = 3$ , denotamos  $\mathcal{F}_1 := \mathcal{K} \cap H_1^+$  y distinguimos dos subcasos:

(2.1.1) *Todas las aristas no acotadas de  $\mathcal{K}$  son paralelas.* Por el lema IV.1.14, podemos suponer que  $\mathcal{F}_1$  es acotada y que  $\mathcal{K}$  está en primera en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a la faceta  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K} \cap H_1^+$ .

(2.1.2)  *$\mathcal{K}$  tiene aristas no acotadas y no paralelas.* Por el Lema IV.1.15, podemos suponer que  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte fuerte y extrema respecto a la faceta  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K} \cap H_1^+$ , que es además no acotada.

(2.2) Por el contrario, si  $n > 3$ , podemos suponer, por el Lema IV.1.13, que  $\mathcal{K}$  está situado en primera posición de recorte débil y extrema respecto a  $\mathcal{F}_1$ .

Por el Lema IV.1.11 el poliedro convexo  $\mathcal{K}_{1,\times} := \bigcap_{j=2}^m H_j^+$  está situado en primera posición de recorte fuerte si  $n = 3$  y en primera posición de recorte débil si  $n > 3$ . Esto permite aplicar la Proposición IV.1.8 al poliedro convexo  $\mathcal{K}_{1,\times}$ , por lo que existe una aplicación admisible  $f^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f^{(1)}(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times})) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\}).$$

Observamos ahora que

$$\begin{aligned} \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times}) \cap \{x_{n-1} \leq 0\} &= (\text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times}) \cap \{x_{n-1} < 0\}) \cup (\text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times}) \cap \{x_{n-1} = 0\}) \\ &= \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times} \cap \{x_{n-1} \leq 0\}) \cup \Lambda = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup \Lambda, \end{aligned}$$

donde

$$\Lambda := \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times}) \cap \{x_{n-1} = 0\} \subset \mathcal{K}_{1,\times} \cap \{x_{n-1} = 0\} = \mathcal{K} \cap \{x_{n-1} = 0\} = \mathcal{F}_1$$

es un subconjunto del interior de la faceta  $\mathcal{F}_1$  en el plano  $\{x_{n-1} = 0\}$ .

Si  $n = 3$  existe, por el Lema IV.3.13 si estamos en la situación (2.1.1) y por el Lema IV.3.14 si estamos en la situación (2.1.2), un cambio afín de coordenadas  $f^{(2)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathcal{K}' := f^{(2)}(\mathcal{K})$  está en segunda posición de recorte fuerte y extrema con respecto a la faceta  $\mathcal{F}'_1 := f^{(2)}(\mathcal{F}_1)$ . Si  $n \geq 4$ , sea  $f^{(2)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un cambio afín de coordenadas tal que  $\mathcal{K}' := f^{(2)}(\mathcal{K}) \subset \{x_n \leq 0\}$  y  $\mathcal{F}'_1 := f^{(2)}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{K} \cap \{x_n = 0\}$ ; por la Observación IV.3.2,  $\mathcal{K}'$  está en segunda posición de recorte débil y extrema con respecto a la faceta  $\mathcal{F}_1$ . Denotamos  $\Lambda' := f^{(2)}(\Lambda)$ .

Por el Lema IV.3.8, existe una aplicación admisible  $f^{(3)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f^{(3)}(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}') \cup \Lambda')) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}').$$

Además,  $\mathcal{K}_{1,\times}$  es un poliedro con  $m - 1 \geq n$  facetas, por lo que no es una franja, y por hipótesis de inducción existe una aplicación admisible  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}_{1,\times})$ . Concluimos que la aplicación admisible  $h := (f^{(2)})^{-1} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)} \circ f^{(1)} \circ g$  satisface

$$\begin{aligned} h(\mathbb{R}^n) &= (f^{(2)})^{-1} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)} \circ f^{(1)}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_{1,\times}) = (f^{(2)})^{-1} \circ f^{(3)} \circ f^{(2)}(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}) \cup \Lambda)) \\ &= (f^{(2)})^{-1} \circ f^{(3)}(\mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(\mathcal{K}') \cup \Lambda')) = (f^{(2)})^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}')) = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.  $\square$

## IV.5. Aplicación: exterior de la bola $n$ -dimensional

El complementario de una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . En efecto, consideramos la bola cerrada  $n$ -dimensional  $\overline{\mathcal{B}}_n(\mathbf{0}, 1)$  de radio 1 centrada en el origen de  $\mathbb{R}^n$ , y su complementario  $\mathcal{S} := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{B}}_n(\mathbf{0}, 1)$ . Elegimos el conjunto algebraico  $(n - 1)$ -dimensional

$$X := \partial\mathcal{S} = \text{Cl}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Como  $X \cap \text{Cl}(\mathcal{S}) = X$  es un conjunto acotado y  $\dim(X \cap \partial\mathcal{S}) = n - 1$ , se deduce de [FG2, 3.4], véase también I.3.5, que  $\mathcal{S}$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ .

Sin embargo, probaremos en esta sección que el complementario de una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . En el caso bidimensional esto fue probado en [FG2, 4.1], pero no parece posible generalizar esa demostración al caso  $n$ -dimensional. Nuestra prueba se basa en los resultados obtenidos en las secciones precedentes sobre complementarios de poliedros convexos.

**Proposición IV.5.1** *El complementario de una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Por supuesto, basta demostrar que el complementario de la bola abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  de radio 1 centrada en el origen de  $\mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ . Para esto, consideramos el cubo  $n$ -dimensional  $\mathcal{C} := [-1, 1]^n$  y recordamos que, por el Teorema IV.2, existe una aplicación polinómica  $f^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen es  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$ . Observamos también que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, n)$ .

(IV.5.1.1) Construimos ahora un polinomio bicuadrado  $g_n \in \mathbb{R}[\mathbf{t}^2]$  tal que el polinomio  $h_n(\mathbf{t}) := \mathbf{t}g_n(\mathbf{t})$  es una función creciente en el intervalo  $[n, +\infty[$  y satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} h_n(0) = 0, \quad h_n(1) = h_n(n) = 1, \quad h'_n(n) = 0, \\ h_n(]1, n]) \subset [1, +\infty[ \quad \text{y} \quad h_n([0, +\infty]) = [0, +\infty[. \end{aligned}$$

Esto implica, en particular, que  $h_n(]1, +\infty[) = h_n(]n, +\infty[) = [1, +\infty[$  y de aquí se deduce inmediatamente la igualdad que emplearemos más adelante:

$$h_n(]μ, \infty[) = [1, +\infty[ \quad \text{para cada } 1 \leq \mu \leq n. \quad (\text{IV.5.1})$$

Ahora verificamos que el polinomio  $g_n(\mathbf{t}) := a_n \mathbf{t}^4 + b_n \mathbf{t}^2 + c_n$ , donde los valores  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  vienen dados por

$$a_n := \frac{1 + 2n}{2n^3(1 + n)^2}, \quad b_n := -\frac{1 + 2n + 3n^2 + 4n^3}{2n^3(1 + n)^2} \quad \text{y} \quad c_n := \frac{3 + 6n + 4n^2 + 2n^3}{2n(1 + n)^2},$$

cumple las condiciones requeridas. Nótese que los valores  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  se obtienen imponiendo las condiciones  $h(1) = h(n) = 1$  y  $h'(n) = 0$  a un polinomio del tipo  $a_n \mathbf{t}^5 + b_n \mathbf{t}^3 + c_n \mathbf{t}$ .

En efecto,  $h_n(0) = 0$  y la derivada  $h'_n(\mathbf{t}) = 5a_n \mathbf{t}^4 + 3b_n \mathbf{t}^2 + c_n$  de  $h_n$  evaluada en  $\mathbf{t} = 1$  es

$$\frac{n^4 + n^3 - 4n^2 + n + 1}{(1 + n)n^3} = \frac{(n - 1)^2(n^2 + 3n + 1)}{(n + 1)n^3} > 0,$$

por lo que  $h_n$  es creciente en un entorno de  $\mathbf{t} = 1$ . Observamos que  $a_n, c_n > 0$  y  $b_n < 0$ , luego por la regla de los signos de Descartes, véase por ejemplo [BCR, 1.2.14], el número de raíces positivas de  $h'_n(\mathbf{t})$ , contadas con multiplicidad, es a lo sumo 2. Aplicando el Teorema de Rolle se deduce de las igualdades  $h(1) = h(n) = 1$  que existe  $\xi \in ]1, n[$  con  $h'_n(\xi) = 0$ . Como también  $h'_n(n) = 0$ , la derivada  $h'_n(\mathbf{t})$  tiene exactamente dos raíces positivas, que son  $\xi$  y  $n$ . Esto implica, puesto que  $a_n > 0$ , que la derivada  $h'_n(\mathbf{t})$  es estrictamente positiva en el intervalo  $]n, +\infty[$ , luego  $h_n$  es una función creciente en el intervalo  $]n, +\infty[$ .

Vamos a demostrar que  $h_n(]1, n]) \subset [1, +\infty[$ . Como  $h_n$  es creciente en un entorno de  $\mathbf{t} = 1$ ,  $h_n(1) = h_n(n) = 1$  y  $h'_n(\mathbf{t})$  tiene exactamente una raíz en el intervalo  $]1, n[$ , deducimos que  $h_n(\mathbf{t}) > 1$  para todo  $\mathbf{t} \in ]1, n[$ . En caso contrario existiría, por el Teorema de Bolzano,  $\mathbf{t}_0 \in ]1, n[$  tal que  $h_n(\mathbf{t}_0) = 1$  y, por el Teorema de Rolle, existen  $\xi_1 \in ]1, \mathbf{t}_0[$  y  $\xi_2 \in ]\mathbf{t}_0, n[$  tales que  $h'_n(\xi_i) = 0$  para  $i = 1, 2$ , que es una contradicción.

Por último probamos la igualdad  $h_n(]0, +\infty[) = [0, +\infty[$ . En efecto,  $h_n$  es creciente en el intervalo  $]0, \xi[$ , pues  $h'_n(\mathbf{t})$  no tiene raíces en  $]0, \xi[$  y  $h'_n(1) > 0$ . Como  $h_n(\xi) > 1 = h(n)$  y  $h'_n(\mathbf{t})$  no se anula en el intervalo  $]ξ, n[$ , la función  $h_n$  es decreciente en dicho intervalo. Esto implica que  $h_n(]0, n]) = [0, h_n(\xi)]$ . Por otro lado  $h_n(\mathbf{t})$  es creciente en el intervalo  $]n, +\infty[$ , por lo que  $h_n(]n, +\infty[) = [h_n(n), +\infty[$ . En consecuencia, como  $h_n(n) \leq h_n(\xi)$  resulta

$$h_n(]0, +\infty[) = h_n(]0, n]) \cup h_n(]n, +\infty[) = [0, h_n(\xi)] \cup [h_n(n), +\infty[ = [0, +\infty[.$$

(IV.5.1.2) A continuación observamos que, como  $g_n \in \mathbb{R}[\mathbf{t}^2]$ , la aplicación

$$f_n^{(2)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x := (x_1, \dots, x_n) \mapsto g_n(\|x\|)(x_1, \dots, x_n)$$

es polinómica. Además, para cada  $t \in [0, +\infty[$  y cada vector unitario  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$f_n^{(2)}(t\vec{v}) = g_n(\|t\vec{v}\|)t\vec{v} = g_n(t)t\vec{v} = h_n(t)\vec{v} \implies \|f_n^{(2)}(t\vec{v})\| = h_n(t).$$

Por otro lado, para cada rayo cerrado  $L_{\vec{v}}^+ := \{t\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$  desde el origen existe un número real  $\mu_{\vec{v}} \in ]1, n[$  tal que

$$L_{\vec{v}}^+ \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}) = \{t\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \in [\mu_{\vec{v}}, +\infty[),$$

y se deduce de la igualdad (IV.5.1) que  $f^{(2)}(L_{\vec{v}}^+ \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C})) = \{t\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \in [1, +\infty[)$ .

En consecuencia, denotando  $\mathbb{S}^{n-1} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{v}\| = 1\}$  resulta

$$f^{(2)}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}) = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}} f^{(2)}(L_{\vec{v}}^+ \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C})) = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}} \{t\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \in [1, +\infty[) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1).$$

Finalmente, la aplicación polinómica  $f := f^{(2)} \circ f^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface

$$f(\mathbb{R}^n) = f^{(2)}(f^{(1)}(\mathbb{R}^n)) = f^{(2)}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}) = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1),$$

como queríamos demostrar. □

Al comienzo de esta sección vimos que el complementario de una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  no es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ ; probamos a continuación que sí lo es de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Corolario IV.5.2** *El complementario  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$  de una bola cerrada  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demostración.* Es suficiente demostrar que  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$  es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por la Proposición IV.5.1, existe una aplicación polinómica  $g^{(1)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen es  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)$ . Por otra parte, por el Lema II.1.1, véase también [FG1, 1.4 (iv)], la imagen de la aplicación polinómica

$$g^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto ((xy - 1)^2 + x^2, y(xy - 1))$$

es el semiplano abierto  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Consideramos ahora las aplicaciones polinómicas

$$\begin{aligned} f^{(1)} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^n, & (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (1 + x_1)g^{(1)}(x_2, \dots, x_{n+1}), \\ f^{(2)} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, & (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (g^{(2)}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Como  $f^{(2)}(\mathbb{R}^{n+1}) = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n$  la aplicación polinómica  $f := f^{(1)} \circ f^{(2)} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  cumple

$$f(\mathbb{R}^{n+1}) = f^{(1)}(f^{(2)}(\mathbb{R}^{n+1})) = f^{(1)}(]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)},$$

como queríamos probar. □



## Poliedros convexos como imágenes regulares de $\mathbb{R}^n$

Este capítulo se dedica fundamentalmente a demostrar el Teorema V.1, que afirma que los poliedros convexos de  $\mathbb{R}^n$ , acotados o no, y sus interiores, son imagen de  $\mathbb{R}^n$  por una aplicación regular. Como consecuencia se deduce que también las bolas abiertas de  $\mathbb{R}^n$  y sus clausuras son imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ . Como las imágenes polinómicas no constantes de  $\mathbb{R}^n$  son conjuntos no acotados, no es posible expresar los poliedros acotados de  $\mathbb{R}^n$  como imagen polinómica de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que entran en escena las aplicaciones regulares. Existen pocos resultados previos acerca de las imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ ; cabe citar los obtenidos por Fernando–Gamboa en [FG2]. Allí se demuestra que el interior de un polígono convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  con  $e$  lados es imagen polinómica de  $\mathbb{R}^2$  y se puede tomar  $n \leq \max\{2, e - 1\}$  si  $\mathcal{K}$  tiene dos lados paralelos y  $n \leq \max\{2, e\}$  en caso contrario. Obsérvese que para  $n = 2$  el Teorema V.1 afirma que todo polígono convexo y su interior son imágenes regulares del plano euclídeo, que es una afirmación más fuerte que la que acabamos de mencionar. En cuanto a las bolas abiertas y las bolas cerradas, existe un precedente, debido a Fernando–Gamboa [FG2], para  $n = 2$ . En este capítulo asumiremos siempre que trabajamos con un espacio ambiente de dimensión  $n \geq 2$ .

**Teorema V.1** *Un poliedro convexo  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  y su interior son imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ .*

Todo poliedro convexo  $d$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $0 \leq d < n$ , está contenido en un subespacio afín  $d$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  que, tras un cambio afín de coordenadas podemos identificar con  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ . Se deduce del Teorema V.1 que  $\mathcal{K}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^d$ , y por tanto de  $\mathbb{R}^n$ . Por ello estudiamos poliedros  $n$ -dimensionales  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ . Nótese que en estas condiciones  $\text{Int}_v \mathcal{K} = \text{Int}(\mathcal{K})$ , es decir, el interior de  $\mathcal{K}$  como variedad topológica coincide con su interior en  $\mathbb{R}^n$ .

### V.1. Particiones de la frontera de un poliedro convexo

El propósito de esta sección es probar el Teorema V.1.1, resultado que nos permitirá demostrar en la sección segunda la parte del Teorema V.1 relativa a los interiores de los

poliedros. Este teorema, con interés por sí mismo, proporciona, para cada punto  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ , una partición natural, asociada a  $p$ , de la frontera  $\partial\mathcal{K}$  del poliedro convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ .

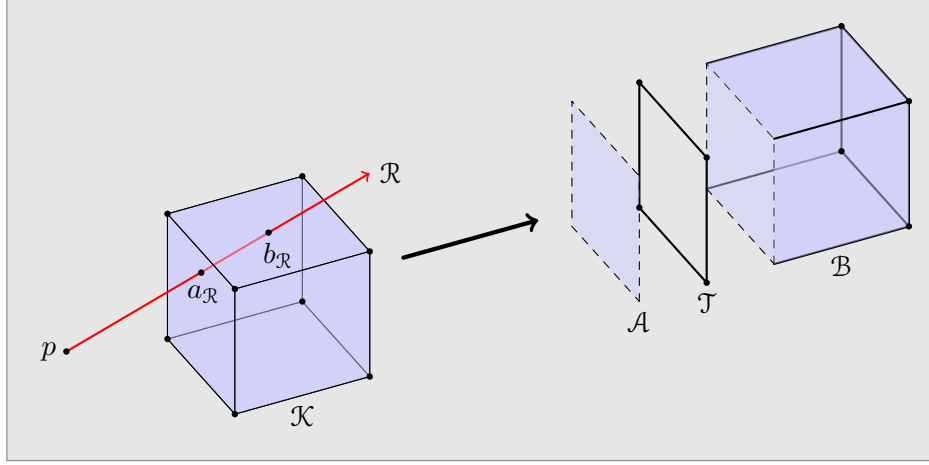


Figura V.1.1: Partición de la frontera de  $\mathcal{K}$  con respecto al punto  $p \notin \mathcal{K}$ .

**Teorema V.1.1** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo y acotado  $n$ -dimensional y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ . Sea  $\mathfrak{R}$  la colección de todos los rayos  $\mathcal{R}$  desde  $p$  que intersecan a  $\text{Int}(\mathcal{K})$  y, para cada  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ , sea  $a_{\mathcal{R}}$  el punto en  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  más próximo a  $p$ . Consideramos los conjuntos  $\mathcal{A} := \{a_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}$ ,  $\mathcal{J} := \text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$  y  $\mathcal{B} := \partial\mathcal{K} \setminus \text{Cl}(\mathcal{A})$ . Entonces:

- (i) Los conjuntos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{J}$  son subconjuntos disjuntos dos a dos de  $\partial\mathcal{K}$  tales que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son abiertos en  $\partial\mathcal{K}$  y conexos,  $\mathcal{J}$  es cerrado en  $\partial\mathcal{K}$  y  $\partial\mathcal{K} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}$ .
- (ii) La frontera  $\partial\mathcal{K}$  es homeomorfa a la esfera  $(n-1)$ -dimensional  $\mathbb{S}^{n-1}$ , y existen homeomorfismos

$$\varphi_1 : \overline{\mathbb{B}_{n-1}}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{J} \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \overline{\mathbb{B}_{n-1}}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}$$

que cumplen  $\varphi_1(\mathbb{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{A}$ ,  $\varphi_2(\mathbb{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{B}$  y  $\varphi_i(\partial\overline{\mathbb{B}_{n-1}}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{J}$  para  $i = 1, 2$ .

- (iii) Si  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  son las facetas del poliedro  $\mathcal{K}$ , existe un índice  $1 \leq k < m$  tal que, tras reordenar los índices en caso necesario,

$$\text{Cl}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i, \quad \text{Cl}(\mathcal{B}) = \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_j \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j.$$

- (iv) Si  $\mathcal{E}$  es una cara de  $\mathcal{K}$  y  $\{\mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_e}\}$  es la colección de todas las facetas de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{E}$ , entonces  $\text{Int}_{\vee} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$  (resp.  $\text{Int}_{\vee} \mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ ) si y sólo si  $\text{Int}_{\vee} \mathcal{F}_{i_r} \subset \mathcal{A}$  (resp.  $\text{Int}_{\vee} \mathcal{F}_{i_r} \subset \mathcal{B}$ ) para cada  $1 \leq r \leq e$ .



Decimos que  $\partial\mathcal{K} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}$  es la *partición de  $\partial\mathcal{K}$  determinada por el punto  $p$* . Efectuaremos la prueba de V.1.1 en dos pasos. Primero demostramos el resultado para un punto  $p$  no contenido en ninguno de los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen las facetas de  $\mathcal{K}$ . A continuación pasamos al caso general, aprovechando el resultado obtenido en el primer paso. En cualquier caso, necesitamos para empezar el siguiente resultado auxiliar, cuya prueba es inmediata y no incluimos aquí.

**Lema V.1.2** *Sean  $p, q \in \mathbb{R}^n$  puntos distintos y  $0 < \delta < d(p, q)$ . Consideramos el hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  que pasa por  $q$  y es perpendicular a la recta que une los puntos  $p$  y  $q$ , y el rayo abierto  $\mathcal{R}$  con origen en  $p$  y pasa por  $q$ . Consideremos los conjuntos semialgebraicos*

$$\mathcal{D} := H \cap \mathcal{B}_n(q, \delta) \quad \text{y} \quad \mathcal{C} := \{p + t(y - p) : t \geq 0, y \in \mathcal{D}\}.$$

*Entonces,  $\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \cup \{p\})$  es un subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  que contiene al segmento  $\mathcal{R} \setminus (\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \cup \{p\})$  y que está contenido en el subconjunto abierto  $\mathbb{R}^n \setminus H$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración de V.1.1 con restricciones sobre el punto exterior.* Como  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo acotado y  $n$ -dimensional se deduce de [Be1, 11.3.4] que  $\mathcal{K}$  es homeomorfo a la bola cerrada  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$  vía cierto homeomorfismo  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$ . Por el Teorema de Invariancia del Dominio se tiene  $\varphi(\partial\mathcal{K}) = \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\varphi(\text{Int}(\mathcal{K})) = \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)$ .

Denotamos por  $H_i$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a la faceta  $\mathcal{F}_i$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Sean  $H_i^+$  el semiespacio cerrado de  $\mathbb{R}^n$  determinado por  $H_i$  que contiene al poliedro  $\mathcal{K}$ , y  $H_i^- = \mathbb{R}^n \setminus (H_i^+ \setminus H_i)$ . Se desprende de [Be2, 12.1.5] que

$$\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^m H_i^+ \quad \text{y} \quad \mathcal{K} \subsetneq \bigcap_{j \neq i} H_j^+ \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m.$$

También se cumple, por el Lema I.4.2, la igualdad  $\partial\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i$ .

(V.1.1.3) A lo largo de esta prueba fijamos un punto  $p \in \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^m H_i \cup \mathcal{K})$  y denotamos por  $\mathfrak{F}$  la familia de todos los rayos desde  $p$  que intersecan al poliedro  $\mathcal{K}$ . Como  $p \notin H_i$ , la intersección  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{R}$  es, para cada  $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}$  vacía o un punto. Además, la intersección  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  es un punto o un segmento compacto  $I_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ .

La distancia al punto  $p$  define una relación de orden natural en el segmento  $I_{\mathcal{R}}$ , de modo que el elemento mínimo  $a_{\mathcal{R}} \in I_{\mathcal{R}}$  es el más cercano a  $p$  y el máximo  $b_{\mathcal{R}} \in I_{\mathcal{R}}$  es el más alejado de  $p$ . Dados dos puntos  $x, y \in I_{\mathcal{R}}$  decimos que  $x \preceq y$  si  $d(x, p) \leq d(y, p)$ , mientras que pondremos  $x \prec y$  si  $x \preceq y$  y  $x \neq y$ . Escribimos, abreviadamente,

$$I_{\mathcal{R}} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}] = \{x \in \mathcal{R} : a_{\mathcal{R}} \preceq x \preceq b_{\mathcal{R}}\} \quad \text{y} \quad ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ = \{x \in \mathcal{R} : a_{\mathcal{R}} \prec x \prec b_{\mathcal{R}}\}.$$

También podemos reescribir

$$I_{\mathcal{R}} = \{(1 - \lambda)a_{\mathcal{R}} + \lambda b_{\mathcal{R}} : \lambda \in [0, 1]\}$$

y así dados dos puntos  $x = (1 - \lambda)a_{\mathcal{R}} + \lambda b_{\mathcal{R}}$  e  $y = (1 - \mu)a_{\mathcal{R}} + \mu b_{\mathcal{R}}$  en  $I_{\mathcal{R}}$ , se cumple  $x \preceq y$  si y sólo si  $\lambda \leq \mu$ .

En el caso extremal en que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  es un único punto, escribimos  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$  donde  $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}}$ , y así  $]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ = \emptyset$ . Mantendremos estas notaciones durante el resto de esta prueba. A continuación presentamos algunas propiedades de los segmentos  $I_{\mathcal{R}}$  y los puntos  $a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}$ .

(V.1.1.4) Sean  $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}$  e  $I_{\mathcal{R}} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}] = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ . Entonces,  $a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$  y  $]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .

La afirmación es obvia cuando  $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}}$ ; suponemos pues que  $a_{\mathcal{R}} \neq b_{\mathcal{R}}$  y denotamos  $d = d(a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}})$  la distancia entre ambos puntos. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que  $a_{\mathcal{R}} \in \text{Int}(\mathcal{K})$ ; entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{B}_n(a_{\mathcal{R}}, \varepsilon) \subset \mathcal{K}$ . En tal caso el punto  $a_{\mathcal{R}} - \frac{\varepsilon}{2d}(b_{\mathcal{R}} - a_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  está más próximo a  $p$  que el punto  $a_{\mathcal{R}}$ , y esto es falso. Por tanto  $a_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$  y, de modo análogo,  $b_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$ .

Para la última parte supongamos, por reducción al absurdo, que existiese un punto  $x \in ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ \cap \partial\mathcal{K}$ . Como  $\mathcal{R}$  interseca cada faceta de  $\mathcal{K}$  en, a lo sumo, un punto, los puntos  $a_{\mathcal{R}}, x$  y  $b_{\mathcal{R}}$  pertenecen a facetas distintas de  $\mathcal{K}$ ; pongamos que  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}_1$ ,  $b_{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}_2$  y  $x \in \mathcal{F}_3$ . Sea  $H_3^+$  el semiespacio de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{K}$  y cuya frontera es  $H_3$ . Observamos que  $x \in H_3 \cap ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[$ , luego  $a_{\mathcal{R}} \notin H_3^+$  o  $b_{\mathcal{R}} \notin H_3^+$ , y esto es una contradicción.  $\square$

(V.1.1.5) Sean  $\mathfrak{G} := \{\mathcal{R} \in \mathfrak{F} : \#(\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{K}) = 2\}$ ,  $A := \{a_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \in \mathfrak{G}\}$ ,  $B := \{b_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \in \mathfrak{G}\}$  y  $T := \{a_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}\}$ . Entonces,  $\partial\mathcal{K} = A \sqcup B \sqcup T$  y tanto  $A$  como  $B$  son subconjuntos abiertos de  $\partial\mathcal{K}$ . En particular,  $T$  es un subconjunto cerrado de  $\partial\mathcal{K}$ .

La igualdad  $\partial\mathcal{K} = A \sqcup B \sqcup T$  es evidente, por lo que  $T = \partial\mathcal{K} \setminus (A \sqcup B)$ . Por tanto, todo se reduce a demostrar que  $A$  y  $B$  son subconjuntos abiertos de  $\partial\mathcal{K}$ . Para ver esto es suficiente probar que dado un rayo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{G}$  con  $I_{\mathcal{R}} := [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$ , los puntos  $a_{\mathcal{R}}$  y  $b_{\mathcal{R}}$  son puntos interiores de los conjuntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Para demostrarlo fijamos un punto cualquiera  $q \in ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  y tomamos  $\delta > 0$  tal que  $\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Sea  $H$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que pasa por  $q$  y es perpendicular a la recta que une  $p$  y  $q$ . Sea  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} := \mathcal{B}_n(q, \delta) \cap H$  y consideremos el conjunto semialgebraico

$$\mathcal{C} := \{p + t(y - p) : t \geq 0, y \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}\}.$$

Por el Lema V.1.2,  $\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \cup \{p\})$  es un entorno abierto en  $\mathbb{R}^n$  de  $\mathcal{R} \setminus (\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \cup \{p\})$  que está contenido en el subconjunto abierto  $\mathbb{R}^n \setminus H$  de  $\mathbb{R}^n$ . Esto implica, en particular, que  $a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}_n(q, \delta)} \cup \{p\})$ . Denotamos por  $H^-$  el semiespacio cerrado determinado por  $H$  que contiene a  $p$ , y sea  $H^+ = (\mathbb{R}^n \setminus H^-) \cup H$ . Nótese que  $\mathbb{R}^n \setminus H = \text{Int}(H^+) \cup \text{Int}(H^-)$ . Sea  $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}} \subset \mathfrak{F}$  la familia de rayos con origen en  $p$  que pasan por un punto de  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ ; por la estructura cónica de  $\mathcal{C}$ , se satisface la igualdad  $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}} \mathcal{R}'$ .

Observamos que si  $\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ , entonces  $\mathcal{R}' \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \neq \emptyset$  y  $\mathcal{R}' \in \mathfrak{G}$ . Por tanto  $T \cap \mathcal{C} = \emptyset$ , ya que  $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}} \mathcal{R}'$ . Es decir,  $\mathcal{C} \cap \partial\mathcal{K} \subset A \sqcup B$ . Consideramos los subconjuntos abiertos

de  $\partial\mathcal{K}$  definidos como

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &:= (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \text{Int}(H^-) \cap \partial\mathcal{K}, \quad y \\ \mathcal{U}_2 &:= (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \text{Int}(H^+) \cap \partial\mathcal{K},\end{aligned}$$

que satisfacen la igualdad  $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\}) \cap \partial\mathcal{K}$ . Para cada  $\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ , sea  $m_{\mathcal{R}'}$  el punto de intersección de  $H$  y  $\mathcal{R}'$ . Observamos que  $\{m_{\mathcal{R}'}\} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{D}_{\mathcal{R}'}$  y que existen puntos  $c_{\mathcal{R}'}, d_{\mathcal{R}'} \in \partial\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  tales que  $m_{\mathcal{R}'} \in ]c_{\mathcal{R}'}, d_{\mathcal{R}'}[$  y  $\mathcal{R}' \cap \overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) = [c_{\mathcal{R}'}, d_{\mathcal{R}'}]$ . Por consiguiente,

$$\mathcal{R}' \cap (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \mathcal{K} = [a_{\mathcal{R}'}, c_{\mathcal{R}'}[ \cup ]d_{\mathcal{R}'}, b_{\mathcal{R}'}].$$

Así, como  $\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\}) \subset \mathbb{R}^n \setminus H$ , deducimos que

$$\begin{aligned}[a_{\mathcal{R}'}, c_{\mathcal{R}'}[ &= \mathcal{R}' \cap (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \mathcal{K} \cap \text{Int}(H^-) \quad y \\ ]d_{\mathcal{R}'}, b_{\mathcal{R}'}] &= \mathcal{R}' \cap (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \mathcal{K} \cap \text{Int}(H^+).\end{aligned}$$

De aquí que para cada rayo  $\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$  se tenga

$$\begin{aligned}\{a_{\mathcal{R}'}\} &= \mathcal{R}' \cap (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \text{Int}(H^-) \cap \partial\mathcal{K} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{U}_1, \quad y \\ \{b_{\mathcal{R}'}\} &= \mathcal{R}' \cap (\mathcal{C} \setminus (\overline{\mathcal{B}}_n(q, \delta) \cup \{p\})) \cap \text{Int}(H^+) \cap \partial\mathcal{K} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{U}_2.\end{aligned}$$

Por tanto,  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_1 = \bigcup_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}} \mathcal{R}' \cap \mathcal{U}_1 \subset A$  y  $b_{\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_2 = \bigcup_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{F}_{\mathcal{C}}} \mathcal{R}' \cap \mathcal{U}_2 \subset B$ , lo que prueba que  $a_{\mathcal{R}}$  es un punto interior de  $A$  y  $b_{\mathcal{R}}$  es un punto interior de  $B$ , como queríamos ver.  $\square$

(V.1.1.6) *Tanto  $A$  como  $B$  son conexos,  $\text{Cl}(A) = A \sqcup T$  y  $\text{Cl}(B) = B \sqcup T$ . Más aún,  $A = \mathcal{A}$ ,  $B = \mathcal{B}$  y  $T = \mathcal{T}$  (ver la afirmación V.1.1 para la definición de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{T}$ ).*

En efecto, como  $p \notin \mathcal{K}$  existe un polinomio  $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  de grado 1 tal que  $f(p) < 0$  y  $\mathcal{K} \subset \{f > 0\}$ . Sea  $H'$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $p$  y es paralelo al hiperplano  $H = \{f = 0\}$ . Consideramos la proyección central  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus H' \rightarrow H$  sobre  $H$  de centro  $p$ . Para cada punto  $q \in \mathcal{K}$  denotamos con  $\mathcal{R}_q$  la semirrecta con origen en  $p$  que pasa por  $q$ . Como  $f(p)f(q) < 0$ , deducimos que  $\pi(q) = \mathcal{R}_q \cap H$ .

Puesto que  $\mathcal{K}$  es un poliedro convexo acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $\pi$  es una proyección central, la imagen  $\mathcal{P} = \pi(\mathcal{K}) \subset H$  es un poliedro convexo acotado contenido en el hiperplano  $H$ . Observamos que  $\pi$  es una aplicación abierta y que  $\text{Int}(\mathcal{K})$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \setminus H'$ . Por consiguiente,  $\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))$  es un subconjunto abierto de  $H$  y también de  $\mathcal{P}$ . Además, al ser  $\text{Int}(\mathcal{K})$  convexo (ver [Be1, 11.2.5]), su imagen  $\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))$  también es convexa.

La aplicación continua  $\pi|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow H$  es propia, porque  $\mathcal{K}$  es compacto, por lo que

$$\text{Cl}_H(\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))) = \pi(\text{Cl}_{\mathcal{K}}(\text{Int}(\mathcal{K}))) = \pi(\mathcal{K}) = \mathcal{P}.$$

Según [Be1, 11.2.5], al ser  $\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))$  convexo, tenemos

$$\pi(\text{Int}(\mathcal{K})) = \text{Int}_H(\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))) = \text{Int}_H(\text{Cl}_H(\pi(\text{Int}(\mathcal{K})))) = \text{Int}_H(\mathcal{P}) = \text{Int}_v \mathcal{P}.$$

Por la definición de la aplicación  $\pi$  y los conjuntos  $A$  y  $B$ , tenemos

$$\pi(A) = \pi(B) = \pi(\text{Int}(\mathcal{K})) = \text{Int}_v \mathcal{P},$$

y las restricciones  $\pi|_T, \pi|_A$  y  $\pi|_B$  son aplicaciones inyectivas. Más aún, la recta que pasa por un punto de  $A \sqcup B$  y un punto de  $T$  no pasa por  $p$ , luego también las restricciones  $\pi|_{A \sqcup T}$  y  $\pi|_{B \sqcup T}$  son inyectivas. Observamos que  $\pi(T) = \partial \mathcal{P}$ , ya que

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{P} \sqcup \text{Int}_v \mathcal{P} = \mathcal{P} &= \pi(\mathcal{K}) = \pi(\partial \mathcal{K} \sqcup \text{Int}(\mathcal{K})) = \pi(A \sqcup B \sqcup T \sqcup \text{Int}(\mathcal{K})) \\ &= \pi(A) \cup \pi(B) \cup \pi(T) \cup \pi(\text{Int}(\mathcal{K})) = \pi(T) \sqcup \text{Int}_v \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Por V.1.1.5 sabemos que  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos de  $\partial \mathcal{K}$ , y por tanto  $\partial \mathcal{K} \setminus B = A \sqcup T$  y  $\partial \mathcal{K} \setminus A = B \sqcup T$  son conjuntos compactos. Esto implica que las aplicaciones biyectivas  $\pi|_{A \sqcup T} : A \sqcup T \rightarrow \mathcal{P}$  y  $\pi|_{B \sqcup T} : B \sqcup T \rightarrow \mathcal{P}$  son de hecho homeomorfismos. En particular,  $A$  y  $B$  son homeomorfos a  $\pi(A) = \pi(B) = \text{Int}_v \mathcal{P}$ , que es conexo.

Comprobamos a continuación las igualdades  $\text{Cl}(A) = A \sqcup T$  y  $\text{Cl}(B) = B \sqcup T$ . La inclusión  $\text{Cl}(A) \subset A \sqcup T$  se cumple porque  $A \subset A \sqcup T = \partial \mathcal{K} \setminus B$  es un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Por otra parte, como la aplicación  $\pi|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow H$  es propia,

$$\pi(\text{Cl}(A)) = \pi(\text{Cl}_{\mathcal{K}}(A)) = \text{Cl}_H(\pi(A)) = \text{Cl}_H(\pi(\text{Int}(\mathcal{K}))) = \mathcal{P} = \pi(A \sqcup T),$$

y esto, junto con la inyectividad de la restricción  $\pi|_{A \sqcup T}$  implica la igualdad  $\text{Cl}(A) = A \sqcup T$ . De modo análogo se demuestra que  $\text{Cl}(B) = B \sqcup T$ .

Ahora advertimos que el rayo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{G}$  (ver V.1.1.5) si y sólo si  $\mathcal{R} \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \neq \emptyset$ , esto es,  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$  (ver V.1.1 para la definición de  $\mathfrak{R}$ ). De aquí que  $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$  y  $A = \mathcal{A}$ . Por tanto,

$$\mathcal{J} = \text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A} = \text{Cl}(A) \setminus A = (A \sqcup T) \setminus A = T \quad y$$

$$\mathcal{B} = \partial \mathcal{K} \setminus \text{Cl}(A) = (A \sqcup T) \sqcup B \setminus \text{Cl}(A) = (A \sqcup T) \sqcup B \setminus (A \sqcup T) = B,$$

como queríamos ver. □

(V.1.1.7) *Existen homeomorfismos  $\varphi_1 : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{J}$  y  $\varphi_2 : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}$  tales que  $\varphi_1(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{A}$ ,  $\varphi_2(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{B}$  y  $\varphi_i(\partial \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{J}$  para  $i = 1, 2$ .*

Utilizamos aquí las notaciones introducidas en la prueba de V.1.1.6. Por [Be1, 11.3.4] existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)$ . Por el Teorema de Invariancia del Dominio, deducimos que  $\varphi(\partial \mathcal{P}) = \partial \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)$  y  $\varphi(\text{Int}_v \mathcal{P}) = \mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)$ . De este modo, los homeomorfismos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  que buscamos son las composiciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\pi|_{\mathcal{A} \sqcup \mathcal{J}})^{-1} \circ \varphi^{-1} : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{J}, \\ \varphi_2 &= (\pi|_{\mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}})^{-1} \circ \varphi^{-1} : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Comprobamos que satisfacen las condiciones requeridas. En primer lugar,

$$\varphi_1(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = (\pi|_{\mathcal{A} \sqcup \mathcal{J}})^{-1}(\text{Int}_v \mathcal{P}) = \mathcal{A} \quad y \quad \varphi_2(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = (\pi|_{\mathcal{B} \sqcup \mathcal{J}})^{-1}(\text{Int}_v \mathcal{P}) = \mathcal{B}.$$

En segundo lugar,

$$\varphi_1(\partial\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = (\pi|_{\mathcal{A}\sqcup\mathcal{T}})^{-1}(\partial\mathcal{P}) = \mathcal{T} = (\pi|_{\mathcal{B}\sqcup\mathcal{T}})^{-1}(\partial\mathcal{P}) = \varphi_2(\partial\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)),$$

y la afirmación V.1.1.7 queda probada.  $\square$

(V.1.1.8) Recordamos que  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  denotan las facetas del poliedro  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  y  $H_1, \dots, H_m$  denotan los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  que estas facetas generan. Entonces tenemos

- (1)  $\text{Int}_{\partial\mathcal{K}}(\mathcal{F}_i) = \text{Int}_v \mathcal{F}_i$  para  $1 \leq i \leq m$ .
- (2) Para cada índice  $1 \leq i \leq m$ ,  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}$  o  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}$ .

Empezamos probando (1). Según [Be2, 12.1.5-7],  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i = \text{Int}_{H_i}(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{F}_j$  y, como cada faceta  $\mathcal{F}_j$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\partial\mathcal{K}}(\mathcal{F}_i) &= \mathcal{F}_i \setminus \text{Cl}_{\partial\mathcal{K}}(\partial\mathcal{K} \setminus \mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \setminus \text{Cl}_{\partial\mathcal{K}}\left(\bigcup_{j \neq i} \mathcal{F}_j \setminus \mathcal{F}_i\right) \\ &= \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \text{Cl}_{\partial\mathcal{K}}(\mathcal{F}_j \setminus \mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{F}_j = \text{Int}_{H_i}(\mathcal{F}_i) = \text{Int}_v \mathcal{F}_i. \end{aligned}$$

A continuación probamos (2). Como los conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son, por V.1.1.5, subconjuntos abiertos y disjuntos de  $\partial\mathcal{K}$ , e  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i$  es conexo, para demostrar la afirmación es suficiente comprobar que  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ . En efecto, sea  $x \in \text{Int}_v \mathcal{F}_i$ . Queremos demostrar que el rayo  $\mathcal{R}$  con origen  $p$  que pasa por  $x$  interseca a  $\text{Int}(\mathcal{K})$  y que  $x$  es uno de los extremos del intervalo  $\mathcal{R} \cap \mathcal{K}$ .

Observamos primero que  $d(x, p) > 0$ , puesto que  $p \notin \mathcal{K}$ . También  $d(x, H_j) > 0$  para cada índice  $j \neq i$ , porque  $x \in \text{Int}_v \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} H_j$ . Por tanto,  $\varepsilon = \min\{d(x, p), d(x, H_j) : j \neq i\}$  es un número real positivo. Comprobamos ahora que  $\mathcal{B}_n(x, \varepsilon) \cap (H_i^+ \setminus H_i) \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ , razonando por contradicción: suponemos que existe un punto

$$y \in (\mathcal{B}_n(x, \varepsilon) \cap (H_i^+ \setminus H_i)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K})).$$

Por el Lema I.4.2,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathcal{K}) = \bigcup_{j=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus (H_j^+ \setminus H_j))$ , luego existe un índice  $j \neq i$  tal que  $y \in \mathbb{R}^n \setminus (H_j^+ \setminus H_j) = H_j^-$  y

$$d(x, H_j) = d(x, H_j^-) \leq d(x, y) < \varepsilon \leq d(x, H_j),$$

que es una contradicción. Por tanto,  $\mathcal{B}_n(x, \varepsilon) \cap (H_i^+ \setminus H_i) \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Observamos que, puesto que  $p$  pertenece al exterior de la bola abierta  $\mathcal{B}_n(x, \varepsilon)$  y, como  $x \in H_i$  pero  $p \notin H_i$ , el rayo  $\mathcal{R}$  con origen en  $p$  que pasa por  $x$  interseca a  $\mathcal{B}_n(x, \varepsilon) \cap (H_i^+ \setminus H_i)$  y  $\mathcal{R} \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \neq \emptyset$ . De aquí deducimos que  $\mathcal{R} \cap \mathcal{K}$  es un intervalo cerrado que no se reduce a un punto y tiene a  $x$  como uno de sus extremos, puesto que  $x \in \mathcal{F}_i \subset \partial\mathcal{K}$ . Concluimos que  $x \in \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ , como queríamos ver.  $\square$

(V.1.1.9) Se deduce de V.1.1.8 (2) que podemos suponer que existe un índice  $k < m$  tal que  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}$  para  $1 \leq i \leq k$  y además  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}$  para  $i = k + 1 \leq i \leq m$ .

Si  $k = m$ , entonces  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}$ , luego  $\mathcal{F}_i = \text{Cl}(\text{Int}_v \mathcal{F}_i) \subset \text{Cl}(\mathcal{A})$ , para cada  $1 \leq i \leq m$ , es decir,  $\partial \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i = \text{Cl}(\mathcal{A})$ , y esto es falso porque  $\partial \mathcal{K}$  es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  y  $\text{Cl}(\mathcal{A})$  es homeomorfo a la bola cerrada  $(n - 1)$ -dimensional.  $\square$

(V.1.1.10) Más aún, con estas notaciones se tiene:

- (1) Dados índices  $i, j$  con  $1 \leq i \leq k$  y  $k + 1 \leq j \leq m$ , la intersección  $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \subset \mathcal{T}$ .
- (2)  $\text{Cl}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i$ ,  $\text{Cl}(\mathcal{B}) = \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_j$  y  $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ .

Primero probamos (1). Como cada faceta es un conjunto convexo cerrado, coincide, por [Be1, 11.2.5], con la clausura de su interior. Así, empleando V.1.1.6,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j &= \text{Cl}_{H_i}(\text{Int}_{H_i}(\mathcal{F}_i)) \cap \text{Cl}_{H_j}(\text{Int}_{H_j}(\mathcal{F}_j)) = \text{Cl}(\text{Int}_{H_i}(\mathcal{F}_i)) \cap \text{Cl}(\text{Int}_{H_j}(\mathcal{F}_j)) \\ &\subset \text{Cl}(\mathcal{A}) \cap \text{Cl}(\mathcal{B}) = (\mathcal{A} \sqcup \mathcal{T}) \cap (\mathcal{B} \sqcup \mathcal{T}) = \mathcal{T}. \end{aligned}$$

A continuación comprobamos (2). Recordamos que  $\text{Cl}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} = (\mathcal{A} \sqcup \mathcal{T}) \cap \mathcal{B} = \emptyset$  y que  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}$  para  $k + 1 \leq i \leq m$ . De aquí se deduce

$$\text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^k \text{Int}_v \mathcal{F}_i = \text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \partial \mathcal{K} \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{Int}_v \mathcal{F}_i = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{Int}_v \mathcal{F}_i.$$

Ahora bien, como  $\mathcal{F}_i \cap \text{Int}_{H_j}(\mathcal{F}_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ , deducimos que

$$\text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^k \text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{F}_i \setminus \text{Int}_v \mathcal{F}_i).$$

En consecuencia, en virtud de [BCR, 2.8.13],

$$\dim \left( \text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \bigcup_{i=1}^k \text{Int}_v \mathcal{F}_i \right) \leq \dim \left( \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{F}_i \setminus \text{Int}_v \mathcal{F}_i) \right) = n - 2.$$

Esto implica, por ser  $\text{Cl}(\mathcal{A})$  un conjunto semialgebraico de dimensión pura  $n - 1$ , que

$$\text{Cl}(\mathcal{A}) = \text{Cl} \left( \bigcup_{i=1}^k \text{Int}_v \mathcal{F}_i \right) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i.$$

Análogamente,  $\text{Cl}(\mathcal{B}) = \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_j$  y, utilizando de nuevo V.1.1.7,

$$\mathcal{T} = (\mathcal{A} \sqcup \mathcal{T}) \cap (\mathcal{B} \sqcup \mathcal{T}) = \text{Cl}(\mathcal{A}) \cap \text{Cl}(\mathcal{B}) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

(V.1.1.11) Sean  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$  y  $\mathfrak{E} := \{\mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_e}\}$  la familia de todas las facetas de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{E}$ . Entonces,  $\text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$  si y sólo si  $\text{Int}_v \mathcal{F}_{i_r} \subset \mathcal{A}$  para todo índice  $1 \leq r \leq e$ .

En efecto, tras reordenar los índices  $1 \leq i \leq k$  podemos suponer que  $\mathfrak{E} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_e\}$  y que  $\text{Int}_v \mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}$  para todo  $1 \leq i \leq e$ . Entonces, por V.1.1.10 (ver también [Gr, 3.1.7]),

$$\text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{E} = \bigcap_{i=1}^e \mathcal{F}_i \subset \bigcap_{i=1}^e \text{Cl}(\text{Int}_v \mathcal{F}_i) \subset \text{Cl}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{T},$$

y todo se reduce a comprobar que  $\text{Int}_v \mathcal{E} \cap \mathcal{T} = \emptyset$ . Suponemos, por el contrario, que existe un punto  $x \in \text{Int}_v \mathcal{E} \cap \mathcal{T}$ . Como  $x \in \mathcal{T}$  existe, por V.1.1.10, una faceta  $\mathcal{F}_s$  de  $\mathcal{K}$ , con  $s \geq k+1$ , tal que  $x \in \mathcal{F}_s$ . Puesto que  $x \in \text{Int}_v \mathcal{E} \cap \mathcal{F}_s$ , deducimos que  $\mathcal{E} = \text{Cl}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_s$ . Pero  $\mathcal{F}_s \in \mathfrak{E}$  e  $\text{Int}_v \mathcal{F}_s \subset \mathcal{B}$ , que es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $\text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ , pero  $\text{Int}_v \mathcal{F}_{i_j} \not\subset \mathcal{A}$  para algún  $1 \leq j \leq e$ . En virtud de V.1.1.8,  $\text{Int}_v \mathcal{F}_{i_j} \subset \mathcal{B}$ , y comprobamos que podemos elegir algún índice  $1 \leq s \leq e$  de modo que  $\text{Int}_v \mathcal{F}_{i_s} \subset \mathcal{A}$ . En caso contrario, para cada faceta  $\mathcal{F}_{i_j} \in \mathfrak{E}$  se tiene  $\text{Int}_v \mathcal{F}_{i_j} \subset \mathcal{B}$ , y si procedemos como en la implicación anterior, cambiando  $\mathcal{A}$  por  $\mathcal{B}$ , deducimos que  $\text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ , y llegamos de nuevo a una contradicción. Por tanto, por V.1.1.10 (1),  $\text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}_{i_j} \cap \mathcal{F}_{i_s} \subset \mathcal{T}$ , y esto no es posible.  $\square$

(V.1.1.12) Suponiendo que  $p \notin \bigcup_{i=1}^m H_i$ , es ya clara la demostración del Teorema V.1.1. En efecto, el apartado (i) se sigue de V.1.1.5 y V.1.1.6; la afirmación V.1.1.7 prueba (ii), mientras que V.1.1.10 (2) implica (iii) y (iv) ha quedado probado en V.1.1.11 puesto que V.1.1.11 también es válido si sustituimos  $\mathcal{A}$  por  $\mathcal{B}$ .  $\square$

A continuación procedemos a demostrar V.1.1 en el caso en que  $p$  es un punto arbitrario en el exterior de  $\mathcal{K}$ . Antes necesitamos un lema previo.

**Lema V.1.3** Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de un poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ . Sean  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  polinomios de grado uno tales que cada  $H_i^+ = \{f_i \geq 0\}$  y sea  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$  tal que

$$f_1(p) \geq 0, \dots, f_s(p) \geq 0 \quad \text{y} \quad f_{s+1}(p) < 0, \dots, f_m(p) < 0$$

para algún índice  $0 \leq s < m$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un punto  $q \in \mathcal{B}_n(p, \varepsilon)$ , tal que  $f_1(q) > 0, \dots, f_s(q) > 0$  y  $f_{s+1}(q) < 0, \dots, f_m(q) < 0$ .

*Demostración.* Observamos primero que si  $f_1(p) > 0, \dots, f_s(p) > 0$ , basta tomar  $q = p$ . Así, tras reordenar los índices  $1, \dots, s$ , podemos suponer que existe  $1 \leq k \leq s$  tal que

$$f_1(p) = 0, \dots, f_k(p) = 0 \quad \text{y} \quad f_{k+1}(p) > 0, \dots, f_s(p) > 0.$$

El poliedro  $\mathcal{K}' = \bigcap_{i=1}^k H_i^+$  contiene al poliedro  $\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ . Nótese que  $\{H_1, \dots, H_k\}$  es la presentación mínima de  $\mathcal{K}'$ , puesto que  $\{H_1, \dots, H_m\}$  es la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Observamos también que  $p \in \mathcal{K}'$  y, por el Lema 1.4.2,  $p \notin \mathcal{K}' \setminus \bigcup_{i=1}^k H_i = \text{Int}(\mathcal{K}')$ , es decir,  $p \in \partial\mathcal{K}'$ . Como  $p \notin \bigcup_{i=k+1}^m H_i$  el número real  $\delta = \min\{\varepsilon, d(p, H_i) : k+1 \leq i \leq m\}$  es positivo. Para cada punto  $y \in \mathcal{B}_n(p, \delta)$  tenemos

$$f_{k+1}(y) > 0, \dots, f_s(y) > 0 \quad \text{y} \quad f_{s+1}(y) < 0, \dots, f_m(y) < 0.$$

Por otra parte, como  $p \in \mathcal{K}' = \text{Cl}(\text{Int}(\mathcal{K}'))$ , existe un punto  $q \in \text{Int}(\mathcal{K}') \cap \mathcal{B}_n(p, \delta)$ , por lo que  $q \in \mathcal{B}_n(p, \varepsilon)$ , y este punto satisface las desigualdades

$$f_1(q) > 0, \dots, f_s(q) > 0 \quad \text{y} \quad f_{s+1}(q) < 0, \dots, f_m(q) < 0,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

*Demostración de V.1.1 sin restricciones sobre el punto exterior.* Recordamos que hemos denotado  $H_1, \dots, H_m$  los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a las facetas  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  de  $\mathcal{K}$ , respectivamente. Como ya hemos demostrado el Teorema V.1.1 si  $p \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{K} \cup \bigcup_{i=1}^m H_i)$ , basta considerar el caso en que  $p \in \bigcup_{i=1}^m H_i \setminus \mathcal{K}$ . Suponemos que el punto  $p$  se encuentra en esta situación y, reordenando los índices en caso necesario, consideramos  $1 \leq r_1 \leq r_2 < m$  tales que

$$p \in \bigcap_{i=1}^{r_1} H_i \cap \bigcap_{i=r_1+1}^{r_2} (H_i^+ \setminus H_i) \cap \bigcap_{i=r_2+1}^m (\mathbb{R}^n \setminus H_i^+).$$

(V.1.1.13) Repetimos para este punto  $p$  la construcción realizada en V.1.1.3 para un punto en  $\mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^m H_i \cup \mathcal{K})$ . Denotamos por  $\mathfrak{F}$  la familia de todos los rayos  $\mathcal{R}$  desde  $p$  que intersecan al poliedro  $\mathcal{K}$ . Fijamos un rayo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}$  y observamos que la intersección  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  es un punto o un segmento compacto  $I_{\mathcal{R}} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$ , donde  $a_{\mathcal{R}}$  es el punto en  $I_{\mathcal{R}}$  más próximo a  $p$  y  $b_{\mathcal{R}}$  es el más alejado. Consideramos en  $I_{\mathcal{R}}$  la misma relación de orden introducida en V.1.1.3. En el caso extremo en el que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R}$  es un punto, escribimos  $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$ , con  $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}}$ , de modo que  $]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ = \emptyset$ . Recordamos también las notaciones

$$\mathfrak{A} := \{\mathcal{R} \in \mathfrak{F} : I_{\mathcal{R}} \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A} := \{a_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \in \mathfrak{A}\}.$$

También denotamos  $\mathcal{T} := \text{Cl}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$  y  $\mathcal{B} := \partial\mathcal{K} \setminus \text{Cl}(\mathcal{A})$ . La misma prueba realizada en V.1.1.4 nos proporciona el siguiente resultado:

(V.1.1.14) Sean  $\mathcal{R} \in \mathfrak{F}$  e  $I_{\mathcal{R}} := [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}] = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ . Entonces  $a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$ . Más aún, si  $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}$  entonces  $]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Ahora, por el Lema V.1.3, existe un punto  $q \in \bigcap_{i=1}^{r_2} (H_i^+ \setminus H_i) \cap \bigcap_{i=r_2+1}^m (\mathbb{R}^n \setminus H_i^+)$ . Observamos que  $q \notin \mathcal{K} \cup \bigcup_{i=1}^m H_i$ , y nuestro próximo objetivo es comparar los conjuntos  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  y  $\mathcal{T}$  determinados por el punto  $p$ , con los conjuntos  $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{T}'$  determinados por el punto  $q$ , cuyas propiedades han sido estudiadas en la primera parte de la demostración de la Proposición V.1.1. Veremos a continuación que obtenemos la mejor respuesta posible.



(V.1.1.15) Con las notaciones anteriores,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  y por tanto  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ .

Efectivamente, sea  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}$  para algún rayo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$  desde  $p$ . La estrategia que seguimos es la siguiente. Probamos primero que el rayo  $\mathcal{R}_1$  desde  $q$  que pasa por  $a_{\mathcal{R}}$  interseca  $\text{Int}(\mathcal{K})$ . Consecuentemente,  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}_1 = [a_{\mathcal{R}_1}, b_{\mathcal{R}_1}]$  y, por V.1.1.4 y V.1.1.14,  $]a_{\mathcal{R}_1}, b_{\mathcal{R}_1}[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  y  $a_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$ . Por tanto,  $a_{\mathcal{R}} \in \{a_{\mathcal{R}_1}, b_{\mathcal{R}_1}\}$ . Veremos a continuación que, de hecho,  $a_{\mathcal{R}} \neq b_{\mathcal{R}_1}$ , de donde  $a_{\mathcal{R}} = a_{\mathcal{R}_1} \in \mathcal{A}'$  y queda probada la inclusión  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ . La inclusión en sentido contrario se deduce de modo análogo, aunque la situación no es exactamente simétrica, intercambiando los papeles de las cuaternas  $(p, \mathcal{R}, a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}})$  y  $(q, \mathcal{R}_1, a_{\mathcal{R}_1}, b_{\mathcal{R}_1})$ , por lo que no añadimos más detalles.

Comenzamos probando que el rayo  $\mathcal{R}_1$  desde  $q$  que pasa por  $a_{\mathcal{R}}$  interseca a  $\text{Int}(\mathcal{K})$ . Para ver esto, sean  $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  polinomios de grado uno tales que  $H_i^+ = \{f_i \geq 0\}$ . Comprobamos primero que  $f_i(a_{\mathcal{R}}) > 0$  para  $1 \leq i \leq r_2$ . Como  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}$ , existe un punto  $x \in \text{Int}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{R}$  que cumple  $a_{\mathcal{R}} \prec x$ . Por tanto, existe  $\rho > 1$  tal que  $x = \rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)p$ , y puesto que  $x \in \text{Int}(\mathcal{K})$ , resulta

$$0 < f_i(x) = \rho f_i(a_{\mathcal{R}}) + (1 - \rho)f_i(p).$$

Pero  $f_i(p) \geq 0$ , y por consiguiente  $f_i(a_{\mathcal{R}}) > 0$ .

Ahora recordamos que, por I.4.2,  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \bigcap_{i=1}^m (H_i^+ \setminus H_i) = \bigcap_{i=1}^m \{f_i > 0\}$ , luego debemos comprobar que  $\mathcal{R}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m \{f_i > 0\} \neq \emptyset$ . Si  $r_2 + 1 \leq i \leq m$  tenemos  $f_i(q) < 0$  y para cada  $\rho > 1$  el punto  $z := \rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q \in \mathcal{R}_1 \cap \{f_i > 0\}$ , ya que

$$f_i(z) = f_i(\rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q) = \rho f_i(a_{\mathcal{R}}) + (1 - \rho)f_i(q) > 0.$$

Sea  $1 \leq i \leq r_2$  y recordemos que  $f_i(q) > 0$ . Si  $f_i(a_{\mathcal{R}}) - f_i(q) \geq 0$ , para cada número real positivo  $\rho > 0$  el punto  $z := \rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q \in \mathcal{R}_1 \cap \{f_i > 0\}$ , porque

$$f_i(z) = \rho f_i(a_{\mathcal{R}}) + (1 - \rho)f_i(q) = f_i(q) + \rho(f_i(a_{\mathcal{R}}) - f_i(q)) > 0.$$

Por otra parte, si  $f_i(a_{\mathcal{R}}) - f_i(q) < 0$  el cociente  $\lambda_i := f_i(q)/(f_i(q) - f_i(a_{\mathcal{R}})) > 1$ , puesto que tanto  $f_i(q)$  como  $f_i(a_{\mathcal{R}})$  son positivos, ya que  $1 \leq i \leq r_2$ . Observamos que si  $1 < \rho < \lambda_i$  el punto  $z := \rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q \in \mathcal{R}_1$  satisface

$$f_i(z) = f_i(\rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q) = \rho f_i(a_{\mathcal{R}}) + (1 - \rho)f_i(q) = f_i(q) + \rho(f_i(a_{\mathcal{R}}) - f_i(q)) > 0.$$

Así, si elegimos  $1 < \rho < \lambda_i$  para todo  $1 \leq i \leq r_2$  tal que  $f_i(a_{\mathcal{R}}) - f_i(q) < 0$ , el punto

$$z = \rho a_{\mathcal{R}} + (1 - \rho)q \in \mathcal{R}_1 \cap \bigcap_{i=1}^m \{f_i > 0\} = \mathcal{R}_1 \cap \text{Int}(\mathcal{K}).$$

Por último, todo se reduce a comprobar que  $a_{\mathcal{R}} \neq b_{\mathcal{R}_1}$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}_1}$ . Como  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}$  se tiene  $I_{\mathcal{R}} = \mathcal{K} \cap \mathcal{R} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$  donde  $a_{\mathcal{R}} < b_{\mathcal{R}}$ . Más aún,  $a_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}$  y  $f_i(a_{\mathcal{R}}) > 0$  para  $1 \leq i \leq r_2$ , y esto implica que existe  $r_2 + 1 \leq j \leq m$  tal

que  $f_j(a_{\mathcal{R}}) = 0$ . Por otra parte, existe  $\rho > 1$  tal que  $a_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}_1} = \rho a_{\mathcal{R}_1} + (1 - \rho)q$  o, de modo equivalente,  $q = \frac{1}{1-\rho}a_{\mathcal{R}} + (\frac{-\rho}{1-\rho})b_{\mathcal{R}_1}$ . Esto nos conduce a una contradicción:

$$0 > f_j(q) = f_j\left(\frac{1}{(1-\rho)}(a_{\mathcal{R}} - \rho a_{\mathcal{R}_1})\right) = \frac{1}{(1-\rho)}(f_j(a_{\mathcal{R}}) - \rho f_j(a_{\mathcal{R}_1})) = \frac{\rho}{(\rho-1)}f_j(a_{\mathcal{R}_1}) \geq 0.$$

Para terminar, observamos que ya hemos visto en V.1.1.12 que  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$  y  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$  satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) en el enunciado de V.1.1, como queríamos demostrar.  $\square$

**Observación V.1.4** La proposición V.1.1 puede generalizarse a un poliedro convexo no acotado  $n$ -dimensional mediante I.4.17 y I.4.18. En este caso,  $\partial\mathcal{K}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n-1}$  (véase [Be1, 11.3.8]) y, aunque  $\mathcal{A}$  es siempre homeomorfo a la bola abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)$ , existen varias posibilidades para la topología de los conjuntos  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{T}$ . Con más precisión, dependiendo de la posición del punto  $p$ , podemos tener:

- (i)  $\mathcal{B} = \mathcal{T} = \emptyset$ ; o
- (ii) Existen homeomorfismos

$$\varphi_1 : \{x_{n-1} \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{T} \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \{x_{n-1} \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{T}$$

tales que  $\varphi_1(\{x_{n-1} > 0\}) = \mathcal{A}$ ,  $\varphi_2(\{x_{n-1} > 0\}) = \mathcal{B}$  y  $\varphi_i(\{x_{n-1} = 0\}) = \mathcal{T}$  para  $i = 1, 2$ ; o

- (iii) Existen homeomorfismos

$$\varphi_1 : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{T} \quad \text{y} \quad \varphi_2 : \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \mathcal{T}$$

tales que  $\varphi_1(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{A}$ ,  $\varphi_2(\mathcal{B}_{n-1}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\}) = \mathcal{B}$  y  $\varphi_i(\partial\overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)) = \mathcal{T}$  para  $i = 1, 2$ .

Para demostrar estas afirmaciones se puede usar I.4.17, I.4.18, V.1.1 y el teorema clásico de Schönflies, véase [B]. Como esta generalización de V.1.1 no es necesaria para el desarrollo de nuestros resultados y su prueba resulta intrincada, no incluimos sus detalles.

## V.2. El interior de un poliedro convexo $n$ -dimensional

El objetivo de esta sección es demostrar que el interior de un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^n$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ . Primero nos centramos en el ejemplo más sencillo de poliedro convexo acotado: el  $n$ -símplice.

**Lema V.2.1** *El interior de un  $n$ -símplice  $\Delta$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Primero observamos que, tras un cambio de coordenadas, podemos suponer que  $\Delta$  es el  $n$ -símplice de vértices  $(1, \binom{k}{\cdot}, 1, 0, \binom{n-k}{\cdot}, 0)$ , donde  $k = 0, \dots, n$ . Un cálculo inmediato muestra que

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0, 1 - x_1 \geq 0, x_{k-1} - x_k \geq 0, 2 \leq k \leq n\} \quad \text{e}$$

$$\text{Int}(\Delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, 1 - x_1 > 0, x_{k-1} - x_k > 0, 2 \leq k \leq n\}.$$

Hemos recordado en la Proposición II.3.21 un resultado obtenido por Fernando–Gamboa [FG1, 1.6]: existe una aplicación polinómica  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen es el ortante abierto  $n$ -dimensional  $\mathcal{Q}_n := \{x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ . Si componemos  $f_1$  con la aplicación racional

$$f_2 : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{1}{x_1 + 1}, \dots, \frac{1}{x_n + 1} \right),$$

obtenemos una aplicación regular  $f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen es el interior  $\mathcal{C} := ]0, 1[^n$  del cubo cerrado  $[0, 1]^n$ . Consideremos los polinomios

$$g_k = \prod_{j=1}^k x_j \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n,$$

y la aplicación polinómica  $f_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto (g_1(x), \dots, g_n(x))$ . Comprobemos la igualdad  $f_3(\mathcal{C}) = \text{Int}(\Delta)$ . En efecto, dado un punto  $x \in \mathcal{C}$  denotamos  $f_3(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$  y observamos que  $1 - y_1 = 1 - x_1 > 0$  e

$$y_n = \prod_{j=1}^n x_j > 0 \quad \text{e} \quad y_{k-1} - y_k = (1 - x_k) \prod_{j=1}^{k-1} x_j > 0, \quad \text{para cada } 2 \leq k \leq n.$$

Esto demuestra que  $y = f_3(x) \in \text{Int}(\Delta)$ . Recíprocamente, sea  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \text{Int}(\Delta)$  y consideramos el punto  $x = (y_1, y_2/y_1, \dots, y_k/y_{k-1}, \dots, y_n/y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , que satisface la igualdad  $f_3(x) = y$ . Además, como

$$0 < y_n \leq y_k < y_{k-1} \leq y_1 < 1 \quad \text{para todo } 2 \leq k \leq n,$$

se tiene  $0 < y_1 < 1$  y  $0 < y_k/y_{k-1} < 1$  para cada  $2 \leq k \leq n$ . Por consiguiente  $x \in \mathcal{C}$ , lo que demuestra la igualdad  $f_3(\mathcal{C}) = \text{Int}(\Delta)$ .

Finalmente concluimos que la imagen de la aplicación regular  $f_3 \circ f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el interior del  $n$ -símplice  $\Delta$ .  $\square$

**Lema V.2.2** Sean  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  las facetas de un poliedro  $n$ -dimensional convexo y acotado  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  y para algún  $1 \leq k < m$  las uniones  $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i$  y  $\mathbf{B} = \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}_j$ . Sea  $H_i$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{F}_i$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Entonces, existe una función racional  $h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$ , regular en  $\mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^k H_i \cap \bigcup_{j=k+1}^m H_j)$ , tal que:

- (i) La función  $h$  toma el valor 0 en  $A \setminus B$  y el valor 1 en  $B \setminus A$ .  
(ii) Para cada punto  $p \in \text{Int}(\mathcal{K})$  se cumplen las desigualdades  $0 < h(p) < 1$ .

*Demostración.* Para cada índice  $1 \leq i \leq m$ , sea  $f_i \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  un polinomio de grado uno tal que  $H_i = \{f_i = 0\}$ . La función racional definida por

$$h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\prod_{i=1}^k f_i^2(x)}{\prod_{i=1}^k f_i^2(x) + \prod_{j=k+1}^m f_j^2(x)}$$

satisface las condiciones del enunciado.  $\square$

**Observación V.2.3** Es claro que se satisface  $\mathcal{K} \setminus (A \cap B) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^k H_i \cap \bigcup_{j=k+1}^m H_j)$ .

Ya estamos en condiciones de demostrar la segunda parte de la proposición V.1 en el caso en que  $\mathcal{K}$  es acotado.

**Proposición V.2.4** *El interior de un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* El conjunto  $\mathfrak{V}$  formado por los vértices de  $\mathcal{K}$  contiene  $1 + \dim \mathcal{K} = n + 1$  puntos afínmente independientes ya que, por [Be1, 11.6.8] y [Be2, 12.1.9],  $\mathcal{K}$  es la envoltura convexa de  $\mathfrak{V}$ . Procedemos ahora por inducción sobre el cardinal de  $\mathfrak{V}$ . Si  $\#\mathfrak{V} = n + 1$  entonces  $\mathcal{K}$  es un  $n$ -símplice y, por V.2.1,  $\text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea ahora  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional cuyo conjunto de vértices  $\mathfrak{V} := \{v_1, \dots, v_s\}$  tiene  $s > n + 1$  puntos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que su subconjunto  $\mathfrak{V}' := \{v_2, \dots, v_s\}$  no está contenido en un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ . Tras un cambio de coordenadas también podemos asumir que  $v_1$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos el poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional  $\mathcal{K}'$  cuyo conjunto de vértices es  $\mathfrak{V}'$ .

Por la hipótesis de inducción  $\text{Int}(\mathcal{K}') = f_2(\mathbb{R}^n)$  donde  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es cierta aplicación regular, luego basta probar que existe una aplicación regular  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f_1(\text{Int}(\mathcal{K}')) = \text{Int}(\mathcal{K})$ . Hecho esto, la composición  $f = f_1 \circ f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  también es regular y  $f(\mathbb{R}^n) = \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Nótese que  $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}'$ . Como  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$  son, respectivamente, las envolturas convexas de  $\mathfrak{V}$  y  $\mathfrak{V}'$ , se deducen de [Be1, 11.1.8.6] las igualdades

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}' = \left\{ \sum_{i=2}^s \mu_i v_i : \mu_i \geq 0, \sum_{i=2}^s \mu_i = 1 \right\}.$$

Observamos que  $\mathcal{K} = \{\lambda p : p \in \mathcal{K}', 0 \leq \lambda \leq 1\}$  porque  $v_1$  es el origen. Más aún, es fácil comprobar que

$$\text{Int}(\mathcal{K}) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i : \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\} \quad \text{e} \quad \text{Int}(\mathcal{K}') = \left\{ \sum_{i=2}^s \mu_i v_i : \mu_i > 0, \sum_{i=2}^s \mu_i = 1 \right\}.$$

En particular,  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \{\lambda p : p \in \text{Int}(\mathcal{K}'), 0 < \lambda < 1\}$ . En lo que sigue utilizaremos las notaciones introducidas en V.1.1.13. Sea  $\mathfrak{R}$  la familia de todos los rayos  $\mathcal{R}$  que intersecan  $\text{Int}(\mathcal{K}')$  y sea  $I_{\mathcal{R}} := \mathcal{K}' \cap \mathcal{R} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$ , donde  $a_{\mathcal{R}}$  es el punto de  $I_{\mathcal{R}}$  más próximo a  $v_1$  y  $b_{\mathcal{R}}$  el más distante. Por V.1.1.14,  $a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}} \in \partial\mathcal{K}'$  y  $]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[ \subset \text{Int}(\mathcal{K}')$  para todo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ . Advertimos que  $\text{Int}(\mathcal{K}') = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[$ , y por tanto  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} ]\mathbf{0}, b_{\mathcal{R}}[$ , donde  $]\mathbf{0}, b_{\mathcal{R}}[ = \{\lambda b_{\mathcal{R}} : \lambda \in ]0, 1[\}$ .

Sean  $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{T}'$  los conjuntos definidos en el Teorema V.1.1 correspondientes al punto  $v_1$  y el poliedro  $\mathcal{K}'$ , y sean  $\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_m$  las facetas de  $\mathcal{K}'$ . Por V.1.1 (iii), podemos suponer que existe un índice  $1 \leq k < m$  tal que  $\text{Cl}(\mathcal{A}') = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}'_i$ ,  $\text{Cl}(\mathcal{B}') = \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}'_j$  y

$$\mathcal{T}' = \text{Cl}(\mathcal{A}') \cap \text{Cl}(\mathcal{B}') = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=k+1}^m \mathcal{F}'_i \cap \mathcal{F}'_j.$$

Por el Lema V.2.2 y la Observación V.2.3, existe una función racional  $h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$ , regular en  $\mathcal{K}' \setminus \mathcal{T}'$ , tal que  $h|_{\mathcal{A}'} \equiv 0$ ,  $h|_{\mathcal{B}'} \equiv 1$  y  $0 < h(p) < 1$  para cualquier punto  $p \in \text{Int}(\mathcal{K}')$ . La restricción al conjunto  $\mathcal{K}' \setminus \mathcal{T}'$ , que contiene a  $\text{Int}(\mathcal{K}')$ , de la aplicación racional

$$f_1 : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 h(x), \dots, x_n h(x)),$$

es regular y cumple que  $f_1(\text{Int}(\mathcal{K}')) = \text{Int}(\mathcal{K})$ . Para probar esto consideramos un rayo  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$  y recordamos que  $\mathcal{K}' \cap \mathcal{R} = [a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}]$ , donde  $a_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}'$  y  $b_{\mathcal{R}} \in \mathcal{B}'$  (véase V.1.1.5 y V.1.1.15). Como  $f_1(a_{\mathcal{R}}) = v_1$ ,  $f_1(b_{\mathcal{R}}) = b_{\mathcal{R}}$  y  $h(\text{Int}(\mathcal{K}')) \subset ]0, 1[$ , se deduce que  $f_1(]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[) = ]\mathbf{0}, b_{\mathcal{R}}[$ . En consecuencia,

$$f_1(\text{Int}(\mathcal{K}')) = f_1\left(\bigcup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} ]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[\right) = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} f_1(]a_{\mathcal{R}}, b_{\mathcal{R}}[) = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} ]\mathbf{0}, b_{\mathcal{R}}[ = \text{Int}(\mathcal{K}),$$

lo que completa la demostración. □

El Lema I.4.18 junto con la Proposición V.2.4 nos permiten probar la segunda parte del Teorema V.1, suprimiendo la condición de acotación del poliedro.

**Corolario V.2.5** *Sea  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional. Entonces  $\text{Int}(\mathcal{K})$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Suponemos primero que  $\mathcal{K}$  es no degenerado. Entonces, en virtud del Lema I.4.18, existen un poliedro convexo acotado y no-degenerado  $\mathcal{K}'$  y una aplicación racional  $h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  que es regular en  $\text{Int}(\mathcal{K}')$  tal que  $h(\text{Int}(\mathcal{K}')) = \text{Int}(\mathcal{K})$ . Por la Proposición V.2.4, existe una aplicación regular  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $g(\mathbb{R}^n) = \text{Int}(\mathcal{K}')$  y deducimos que  $f = h \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación regular cuya imagen es  $\text{Int}(\mathcal{K})$ .

A continuación suponemos que  $\mathcal{K}$  es degenerado. Entonces, por el Lema I.4.13,  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ , y en tal caso  $\mathcal{K}$  es trivialmente imagen regular de  $\mathbb{R}^n$  o, tras un cambio afín de coordenadas,

existen un índice  $1 \leq k \leq n-1$  y un poliedro convexo no-degenerado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  tales que  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ . Observamos que  $n = \dim(\mathcal{K}) = \dim(\mathbb{R}^k) + \dim(\mathcal{P})$ , es decir,  $\dim(\mathcal{P}) = n - k$ . Notamos también que  $\text{Int}(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^k \times \text{Int}(\mathcal{P})$ . Aplicamos ahora lo que acabamos de probar al poliedro convexo no-degenerado  $(n-k)$ -dimensional  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ , y deducimos que existe una aplicación regular  $h_1 : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  cuya imagen es  $\text{Int}(\mathcal{P})$ . Por consiguiente, la aplicación regular

$$f_1 : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (y, z) \rightarrow (y, h_1(z))$$

satisface la igualdad  $f_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^k \times \text{Int}(\mathcal{P}) = \text{Int}(\mathcal{K})$ .  $\square$

### V.3. Poliedros convexos $n$ -dimensionales.

El objetivo de esta sección es demostrar la parte que falta por probar del Teorema V.1, es decir, que *un poliedro convexo  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$* . Para demostrar esto, el resultado clave, junto con el Corolario V.2.5, es el siguiente:

**Lema V.3.1** *Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional y  $\mathcal{E}$  una cara de  $\mathcal{K}$ . Sea  $Y \subset \partial\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{E} \cap Y = \emptyset$ . Entonces, existen una aplicación racional  $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  y un conjunto algebraico  $Z \subset \mathbb{R}^n$  tales que  $Z \cap \mathcal{K} = \partial\mathcal{E}$ , que es vacío si  $\dim(\mathcal{E}) = 0$ , y*

- (i) *La aplicación  $f$  es regular en  $\mathbb{R}^n \setminus Z$ .*
- (ii) *Se cumple la igualdad  $f(\text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y) = \mathcal{K} \cup Y \cup \text{Int}_v \mathcal{E}$ .*

Supongamos que ya hemos demostrado el Lema V.3.1 y probemos la siguiente

**Proposición V.3.2** *Todo poliedro convexo no degenerado  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Suponemos primero que  $\mathcal{K}$  no es acotado. Tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer, por el Lema I.4.17, que  $\mathcal{K}$  está en posición FU. Por el Lema I.4.18, existen un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional  $\mathcal{K}' \subset \mathbb{R}^n$ , una cara  $\mathcal{E}'$  de  $\mathcal{K}'$  y una aplicación racional  $h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  cuya restricción a  $\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}'$  es regular y satisface  $h(\mathcal{K}' \setminus \mathcal{E}') = \mathcal{K}$ .

(V.3.2.1) Así, para probar la proposición es suficiente demostrar: *Si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional y  $\mathcal{E}_0$  es el conjunto vacío o una cara de  $\mathcal{K}$ , entonces existe una aplicación regular  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen es  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}_0$ .*

En efecto, para cada  $0 \leq d \leq n-1$  sea  $\mathfrak{C}_d$  la familia formada por aquellas caras de  $\mathcal{K}$  de dimensión  $\leq d$  no contenidas en  $\mathcal{E}_0$  y  $\mathfrak{C}_{-1} = \emptyset$ . Recordamos que si  $\mathcal{E}$  es una cara de  $\mathcal{K}$  entonces  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0$  o  $\mathcal{E}_0 \cap \text{Int}_v \mathcal{E} = \emptyset$ .

Definimos ahora, para  $0 \leq d \leq n-1$ , el conjunto semialgebraico

$$\mathcal{K}_{(d)} := (\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}_0) \setminus \left( \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathfrak{E}_{d-1}} \mathcal{E} \right) = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup \bigcup_{d \leq k \leq n-1} \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathfrak{E}_k \setminus \mathfrak{E}_{k-1}} \text{Int}_v \mathcal{E}.$$

Obsérvese que  $\mathcal{K}_{(0)} = \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}_0$ . En virtud de la Proposición V.2.4, existe una aplicación regular  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f_n(\mathbb{R}^n) = \text{Int}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_{(n)}$ . Probaremos que para cada entero  $0 \leq d \leq n-1$  existe una aplicación racional  $f_d : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  cuya restricción a  $\mathcal{K}_{(d+1)}$  es regular, tal que  $f_d(\mathcal{K}_{(d+1)}) = \mathcal{K}_{(d)}$ . Visto esto, la composición  $f = f_0 \circ \dots \circ f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación regular cuya imagen es  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}_0$ , y habremos terminado la demostración.

Primero fijamos  $0 \leq d \leq n-1$  y observamos que  $\mathcal{K}_{(d)} \setminus \mathcal{K}_{(d+1)} = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathfrak{E}_d \setminus \mathfrak{E}_{d-1}} \text{Int}_v \mathcal{E}$ . Escribimos  $\mathfrak{E}_{d+1} \setminus \mathfrak{E}_d = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r\}$ , y sabemos que  $\text{Int}_v \mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Más aún,  $\mathcal{K}_{(d+1)} \cap \mathcal{E}_i = Y_i \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, r$ , donde

$$Y_i = (\mathcal{K}_{(d+1)} \setminus \text{Int}(\mathcal{K})) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \text{Int}_v \mathcal{E}_j \subset \partial \mathcal{K}.$$

Ahora, para cada  $1 \leq i \leq r$  existen, por el Lema V.3.1, un conjunto algebraico  $Z_i \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $Z_i \cap \mathcal{K} = \partial \mathcal{E}_i \subset \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{(d)}$ , y una aplicación racional  $g_i : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  cuya restricción a  $\mathbb{R}^n \setminus Z_i$  es regular y satisface  $g_i(\text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y_i) = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y_i \cup \text{Int}_v \mathcal{E}_i$ . Por tanto, la composición  $f_d = g_r \circ \dots \circ g_1 : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación racional cuya restricción a  $\mathcal{K}_{(d+1)}$  es regular y satisface

$$f_d(\mathcal{K}_{(d+1)}) = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y_r \cup \text{Int}_v \mathcal{E}_r = \mathcal{K}_{(d+1)} \cup \bigcup_{i=1}^r \text{Int}_v \mathcal{E}_i = \mathcal{K}_{(d)},$$

como queríamos ver. □

Una consecuencia inmediata de la Proposición V.3.2 es la demostración de la parte que falta por probar del Teorema V.1:

**Corolario V.3.3** *Todo poliedro convexo  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* A la vista de la Proposición V.3.2 podemos suponer que  $\mathcal{K}$  es degenerado. Así, por el Lema I.4.13,  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ , y en tal caso  $\mathcal{K}$  es trivialmente imagen regular de  $\mathbb{R}^n$  o, tras un cambio afín de coordenadas, existen  $1 \leq k \leq n-1$  y un poliedro convexo no degenerado  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  tales que  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^k \times \mathcal{P}$ . Por la Proposición V.3.2, existe una aplicación regular  $g : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  cuya imagen es  $\mathcal{P}$ . En consecuencia, la imagen de la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (y, z) \rightarrow (y, g(z))$$

es  $\mathbb{R}^k \times \mathcal{P} = \mathcal{K}$ . □

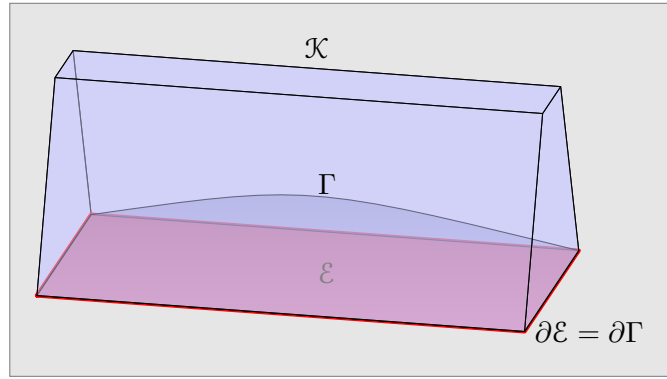


Figura V.3.1: Un 2-andamio de la faceta  $\mathcal{E}$  en un poliedro tridimensional.

Por consiguiente, para completar la demostración del Teorema V.1 sólo falta demostrar el Lema V.3.1. Para ello, necesitamos introducir algunos conceptos y resultados nuevos. Un  $d$ -andamio de una  $d$ -cara  $\mathcal{E}$  de un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es una variedad topológica con borde semialgebraica  $\Gamma$ , semialgebraicamente homeomorfa a  $\mathcal{E}$ , tal que  $\text{Int}_v \Gamma \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  y  $\partial\Gamma = \partial\mathcal{E}$ .

**Lema V.3.4** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo acotado  $n$ -dimensional y  $\mathcal{E}$  una de sus  $d$ -caras. Denotamos  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ ,  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_{d+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ , y suponemos que:

(i) El poliedro  $\mathcal{K}$  está contenido en el semiespacio  $\{x_n \geq 0\}$ , y el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  contiene una faceta de  $\mathcal{K}$ .

(ii) El subespacio afín que contiene a  $\mathcal{E}$  es  $W := \{x_{d+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ .

Sean ahora  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \text{Int}(\mathcal{K})$  y  $\alpha_i := q_i/q_n$  para cada  $d+1 \leq i \leq n$ . Entonces, existen una función racional  $f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$  y un polinomio  $P \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d] := \mathbb{R}[\mathbf{y}]$  positivo sobre  $\text{Int}_v \mathcal{E}$  e idénticamente nulo en  $\partial\mathcal{E}$ , tales que:

(iii.1) El conjunto semialgebraico

$$\Gamma := \{(y, \alpha_{d+1}P(y), \dots, \alpha_{n-1}P(y), P(y)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} : (y, \mathbf{0}) \in \mathcal{E}\}$$

es un  $d$ -andamio de la  $d$ -cara  $\mathcal{E}$  contenida en el subespacio afín generado por  $\mathcal{E} \cup \{q\}$ . Además, la restricción a  $\Gamma$  de la proyección

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0) = (y, \mathbf{0})$$

es un homeomorfismo semialgebraico entre  $\Gamma$  y  $\mathcal{E}$ .

(iii.2) Existe un conjunto algebraico  $Z \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{K} \cap Z = \partial\mathcal{E}$  y restricción  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus Z}$  es regular.

(iii.3) La función  $f$  satisface las igualdades  $f|_{\partial\mathcal{K} \setminus \partial\mathcal{E}} \equiv 1$  y  $f|_{\text{Int}_v \Gamma} \equiv 0$ .



(iii.4) Para cada punto  $p \in \text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \text{Int}_v \Gamma$  se cumple  $0 < f(p) < 1$ .

(iii.5) Si  $\dim(\mathcal{E}) = 0$ , entonces  $Z = \emptyset$ .

*Demostración.* Nótese en primer lugar que los cocientes  $\alpha_i = q_i/q_n$  están bien definidos para cada  $d+1 \leq i \leq n$ , pues  $q \in \text{Int}(\mathcal{K}) \subset \{x_n > 0\}$ . Observamos también que  $W$  puede escribirse como

$$W = \{x_{d+1} - \alpha_{d+1}x_n = 0, \dots, x_{n-1} - \alpha_{n-1}x_n = 0, x_n = 0\}.$$

Sea  $\mathfrak{H} := \{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$  y sean  $f_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , para  $1 \leq i \leq m$ , polinomios de grado uno tales que  $H_i^+ = \{f_i \geq 0\}$ . Observamos que

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} \cap W = \{(y, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n : f_i(y, \mathbf{0}) \geq 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

(iii.1) Tras reordenar los índices  $\{1, \dots, m\}$  en caso necesario podemos suponer la existencia de un índice  $1 \leq r \leq m$  tal que los polinomios  $a_k(x_1, \dots, x_d) = f_k(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$  no son idénticamente nulos exactamente para  $1 \leq k \leq r$ . Más aún, como  $\mathcal{K}$  es acotado,  $\mathbf{0}$  no pertenece a todas las facetas de  $\mathcal{K}$  y por tanto existe al menos un índice  $1 \leq j \leq m$  tal que  $f_j(\mathbf{0}) > 0$ . En consecuencia,

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} \cap W = \{(y, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n : a_k(y) \geq 0, 1 \leq k \leq r\}.$$

Hacemos ahora  $\alpha = (\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n)$  y para cada entero  $M > 0$  consideramos el polinomio

$$P_M(x_1, \dots, x_d) = \frac{\prod_{k=1}^r a_k(x_1, \dots, x_d)}{M}$$

y el conjunto semialgebraico

$$\Gamma_M = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} : a_k(y) \geq 0, z_i = \alpha_i P_M(y), \\ 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n\} = \{(y, \alpha P_M(y)) \in \mathbb{R}^n : (y, \mathbf{0}) \in \mathcal{E}\}.$$

Afirmamos que:

(V.3.4.1)  $\Gamma := \Gamma_M$  es, para  $M$  suficientemente grande, el  $d$ -andamio de  $\mathcal{E}$  que buscamos.

En efecto, la restricción a  $\Gamma_M$  de la proyección

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0) = (y, \mathbf{0})$$

induce, para cada  $M > 0$ , un homeomorfismo semialgebraico entre  $\Gamma_M$  y  $\mathcal{E}$ . Por tanto,  $\partial\Gamma_M = \{(y, \alpha P_M(y)) \in \mathbb{R}^n : (y, \mathbf{0}) \in \partial\mathcal{E}\}$ , y como  $\partial\mathcal{E} = \mathcal{E} \cap \bigcup_{k=1}^r \{a_k = 0\}$ , la restricción  $P_M|_{\partial\mathcal{E}} \equiv 0$ . Por consiguiente, al ser  $\mathcal{E} \subset \{x_{d+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ , deducimos que  $\partial\Gamma_M = \partial\mathcal{E}$ .

Para demostrar que  $\Gamma$  es un  $d$ -andamio de  $\mathcal{E}$  hemos de comprobar que:

(V.3.4.1.3)  $\text{Int}_v \Gamma_M \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  para  $M$  suficientemente grande.

Observamos inicialmente que

$$\text{Int}_v \Gamma_M = \Gamma_M \setminus \partial \Gamma_M = \Gamma_M \setminus \partial \mathcal{E} = \{(y, \alpha P_M(y)) \in \mathbb{R}^n : (y, \mathbf{0}) \in \text{Int}_v \mathcal{E}\} \subset \{x_n > 0\}.$$

La última inclusión se debe a que para cada punto  $(y, \mathbf{0}) \in \text{Int}_v \mathcal{E}$  el producto  $a_1(y) \cdots a_r(y)$  es positivo, y por tanto la  $n$ -ésima coordenada  $x_n$  de  $x \in \text{Int}_v \Gamma_M$  es también positiva. Para todo  $1 \leq i \leq m$  definimos

$$A_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_n) = f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d, \alpha_{d+1} \mathbf{x}_n, \dots, \alpha_{n-1} \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d, \mathbf{x}_n],$$

y observamos que para cada  $1 \leq k \leq r$  existe  $b_{kn} \in \mathbb{R}$  tal que  $A_k(y, \mathbf{x}_n) = a_k(y) + b_{kn} \mathbf{x}_n$ . Por otra parte,  $f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d, 0, \dots, 0) \equiv 0$  para  $r+1 \leq i \leq m$ , y así  $A_i(y, \mathbf{x}_n) = b_{in} \mathbf{x}_n$  para algún  $b_{in} \in \mathbb{R}$ . De hecho,  $b_{in} > 0$  para  $r+1 \leq i \leq m$ . Para comprobar esto observamos que  $q_n > 0$  puesto que  $q \in \text{Int}(\mathcal{K})$ , y también que

$$b_{in} q_n = A_i(q_1, \dots, q_d, q_n) = f_i(q) > 0.$$

El subespacio afín  $V$  generado por  $\mathcal{E} \cup \{q\}$  es

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \alpha_i x_n, \text{ para todo } d+1 \leq i \leq n-1\},$$

Como el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  contiene una faceta de  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$ , deducimos que

$$V \cap \mathcal{K} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0, A_k(y, x_n) = a_k(y) + b_{kn} x_n \geq 0, \\ x_i = \alpha_i x_n, 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n-1\}.$$

Es más, un cálculo sencillo muestra que

$$V \cap \text{Int}(\mathcal{K}) = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0, A_k(y, x_n) = a_k(y) + b_{kn} x_n > 0, \\ x_i = \alpha_i x_n, 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n-1\}.$$

Observamos ahora que si  $x = (y, z) \in \{x_n = P_M(y)\}$ , entonces

$$A_k(y, x_n) = a_k(y) + b_{kn} x_n = a_k(y) + \frac{b_{kn} \prod_{i=1}^r a_i(y)}{M} = a_k(y) \left( 1 + \frac{b_{kn} \prod_{i \neq k} a_i(y)}{M} \right).$$

Como  $\mathcal{K}$  es acotado también es compacto, luego existe  $M_0 > 0$  tal que si  $M \geq M_0$ , entonces

$$1 + \frac{b_{kn} \prod_{i \neq k} a_i(y)}{M} > 0 \text{ para cada punto } x = (y, z) \in \mathcal{K} \text{ y cada } 1 \leq k \leq r.$$

Fijamos  $M \geq M_0$  y observamos que si  $x = (y, z) \in \mathcal{K} \cap \{x_n = P_M(y)\}$  tenemos

$$A_k(y, x_n) \geq 0 \text{ (resp. } A_k(x) > 0) \text{ si y sólo si } a_k(y) \geq 0 \text{ (resp. } a_k(y) > 0).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} V \cap \mathcal{K} \cap \{x_n = P_M(y)\} &= \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : P_M(y) \geq 0, \\ A_k(y, x_n) &= a_k(y) + b_{kn}P_M(y) \geq 0, x_i = \alpha_i P_M(y), 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n\} \\ &= \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : a_k(y) \geq 0, x_i = \alpha_i P_M(y), 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n\}, \end{aligned}$$

es decir  $V \cap \mathcal{K} \cap \{x_n = P_M(y)\} = \Gamma_M$ , y esto en particular implica que  $\Gamma_M \subset V$ . Más aún,

$$\begin{aligned} V \cap \text{Int}(\mathcal{K}) \cap \{x_n = P_M(y)\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : P_M(y) > 0, \\ A_k(y, x_n) &= a_k(y) + b_{kn}P_M(y) > 0, x_i = \alpha_i P_M(y), 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_k(y) > 0, x_i = \alpha_i P_M(y), 1 \leq k \leq r, d+1 \leq i \leq n\} = \text{Int}_v \Gamma_M, \end{aligned}$$

y así  $\text{Int}_v \Gamma_M \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Recordemos que  $\partial \Gamma_M = \partial \mathcal{E} \subset \partial \mathcal{K}$  y por tanto  $\Gamma_M \cap \partial \mathcal{K} = \partial \mathcal{E}$ .

(V.3.4.1.4) Finalmente, denotando  $\mathbf{x} = (y, \mathbf{z})$  consideramos el polinomio

$$g(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m f_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=d+1}^n (\mathbf{x}_j - \alpha_j P_M(y))^2 \in \mathbb{R}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n].$$

La función racional cuya existencia asegura el enunciado es,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=d+1}^n (\mathbf{x}_j - \alpha_j P_M(y))^2}{g(\mathbf{x})} \in \mathbb{R}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

mientras que  $Z := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$  es el conjunto algebraico cuya existencia se afirma en el apartado (iii.2). Evidentemente la restricción  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus Z}$  es regular.

Recordemos que  $\partial \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^m f_i(x) = 0\}$ . Por tanto, como  $\text{Int}_v \Gamma_M \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  y  $\partial \Gamma_M = \partial \mathcal{E} \subset \partial \mathcal{K}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cap Z &= \mathcal{K} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^m f_i(x) = 0 \right\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = \alpha_j P_M(y), d+1 \leq j \leq n\} \\ &= \partial \mathcal{K} \cap V \cap \{x_n = P_M(y)\} = \partial \mathcal{K} \cap \Gamma_M = \partial \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Una comprobación inmediata muestra que esta función  $f$  y el conjunto algebraico  $Z$  satisfacen las condiciones (iii.2), (iii.3) y (iii.4) del lema.

(iii.5) Por último, si  $\dim(\mathcal{E}) = 0$  entonces  $\mathcal{E} = \{0\}$  y  $\Gamma_M = \text{Int}_v \Gamma_M = \{p\}$  es un punto contenido en  $\text{Int}(\mathcal{K})$ . Por ello,

$$Z = \{p\} \cap \bigcap_{i=1}^m H_i \subset \text{Int}(\mathcal{K}) \cap \bigcap_{i=1}^m H_i = \emptyset,$$

como queríamos demostrar. □

**Lema V.3.5** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo no degenerado  $n$ -dimensional y  $v$  un vértice de  $\mathcal{K}$ . Entonces, tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que:

- (i) El vértice  $v$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Las intersecciones  $\mathcal{F}_i := \mathcal{K} \cap \{x_i = 0\}$  son facetas de  $\mathcal{K}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ .
- (iii) Para cada  $1 \leq k \leq n-1$ , la intersección  $\mathcal{E}_k := \mathcal{K} \cap \{x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$  es una cara de  $\mathcal{K}$ , y para cada  $1 \leq j \leq k$  las intersecciones

$$\mathcal{K} \cap \{x_j = 0, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$$

son facetas de  $\mathcal{E}_k$ .

- (iv)  $\mathcal{K} \subset \bigcap_{i=1}^n \{x_i \geq 0\}$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$  podemos suponer, tras un cambio afín de coordenadas, que  $v = 0 \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{K}$  es  $[0, 1]$  o  $[0, +\infty[$ , y las afirmaciones se cumplen trivialmente. Suponemos el resultado cierto para  $n-1$  y comprobamos que también lo es para  $n$ . Sea  $\mathcal{F}$  una faceta de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $v$ . Tras un cambio afín de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  podemos suponer que el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{F}$  es  $H := \{x_n = 0\}$ . Observamos que  $\mathcal{P} := \mathcal{K} \cap \{x_n = 0\}$  es un poliedro convexo y no degenerado  $(n-1)$ -dimensional contenido en  $H \equiv \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  y que tiene a  $v$  como uno de sus vértices. Por la hipótesis de inducción, existe un cambio afín de coordenadas en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  tal que

- (i) El vértice  $v$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Las intersecciones  $\mathcal{G}_i := \mathcal{P} \cap \{x_i = 0\}$  son facetas de  $\mathcal{P}$  para cada  $1 \leq i \leq n-1$ .
- (iii) Para cada  $1 \leq k \leq n-2$ , la intersección  $\mathcal{E}'_k := \mathcal{P} \cap \{x_{k+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0\}$  es una cara de  $\mathcal{P}$ , y las intersecciones  $\{x_j = 0, x_{k+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0\} \cap \mathcal{P}$  son facetas de  $\mathcal{E}'_k$  para  $j = 1, \dots, k$ .
- (iv)  $\mathcal{P} \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} \{x_i \geq 0\}$ .

Por [Be2, 12.1.5], las facetas de  $\mathcal{P}$  son intersecciones con el hiperplano  $H$  de aquellas facetas de  $\mathcal{K}$  que intersecan  $H$ . Por tanto, existen hiperplanos  $H_i$  de  $\mathbb{R}^n$  generados por las facetas  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathcal{K}$  tales que cada faceta  $\mathcal{G}_i$  de  $\mathcal{P}$  es de la forma  $\mathcal{P} \cap H_i$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . De aquí que

$$\mathcal{K} \cap \{x_n = 0\} \cap H_i = \mathcal{P} \cap H_i = \mathcal{G}_i = \mathcal{P} \cap \{x_i = 0\} = \mathcal{K} \cap \{x_i = 0, x_n = 0\}.$$

Como  $\mathcal{K} \cap \{x_i = 0, x_n = 0\}$  es una faceta de  $\mathcal{P}$  su dimensión es  $n-2$ , luego la intersección  $H_i \cap \{x_n = 0\} = \{x_i = 0, x_n = 0\}$  y existen números reales  $a_i \in \mathbb{R}$  tales que los hiperplanos  $H_i = \{x_i - a_i x_n = 0\}$  para  $1 \leq i \leq n-1$ .

Deducimos que  $\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i = \{t(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ . Tras un cambio afín de coordenadas que deja fijo el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  y transforma el vector  $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$  en el vector  $(0, \dots, 0, 1)$ , podemos suponer que  $H_i = \{x_i = 0\}$  para cada  $1 \leq i \leq n-1$ . Es más, tras cambiar el signo de la variable  $x_n$  si es necesario, podemos suponer, además, que  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$ . Se cumplen por tanto las cuatro condiciones del lema.  $\square$

**Lema V.3.6** Sean  $\varepsilon > 0$  un número real y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional no degenerado tal que:

- (i) El origen es un vértice de  $\mathcal{K}$ .
- (ii) Las intersecciones  $\mathcal{F}_i := \mathcal{K} \cap \{x_i = 0\}$  son facetas de  $\mathcal{K}$  para  $1 \leq i \leq n$ .
- (iii) Para cada  $1 \leq k = 1 \leq n - 1$ , la intersección  $\mathcal{E}_k := \mathcal{K} \cap \{x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$  es una cara de  $\mathcal{K}$  y las intersecciones  $\{x_j = 0, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0\} \cap \mathcal{K}$  son facetas de  $\mathcal{E}_k$  para  $j = 1, \dots, k$ .
- (iv)  $\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ .

Entonces, para cada  $i = 1, \dots, n$  existe un punto

$$p_i \in (\mathcal{K}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_n = 0\} \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon)) \setminus \mathcal{K}$$

tal que el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $p_1, \dots, p_n$  tiene dimensión  $n-1$  y no interseca al ortante cerrado  $n$ -dimensional  $\{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ .

*Demostración.* Argumentamos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ ,  $\mathcal{K} = [0, a]$  para cierto  $a > 0$  o  $\mathcal{K} = [0, +\infty[$ , y basta emplear el punto  $p_1 = -\varepsilon/2$  para conseguir lo propuesto. Suponemos probado el resultado para  $n-1$  y comprobamos que también lo es para  $n$ . Para ver esto, consideramos el poliedro  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap \{x_n = 0\}$ , que satisface condiciones análogas a (i), (ii), (iii) y (iv) en el caso  $(n-1)$ -dimensional, y definimos  $\mathcal{F}'_i := \mathcal{P} \cap \{x_i = 0\} = \mathcal{K} \cap \{x_i = 0, x_n = 0\}$  para todo  $1 \leq i \leq n-1$ . Por la hipótesis de inducción, para cada  $1 \leq i \leq n-1$  existe un punto

$$p_i \in (\mathcal{P}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0\} \cap (\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon) \cap \{x_n = 0\})) \setminus \mathcal{P},$$

tal que el subespacio afín  $L_{n-1}$  de  $\{x_n = 0\}$  generado por  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  tiene dimensión  $n-2$ , y  $L_{n-1}$  no interseca al conjunto semialgebraico  $\{x_1 \geq 0, \dots, x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ . Observamos que

$$\mathcal{P}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0\} = \mathcal{K}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 0\}$$

y, por consiguiente, para  $1 \leq i \leq n-1$  tenemos

$$p_i \in (\mathcal{K}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 0\} \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon)) \setminus \mathcal{K}.$$

Como  $\{x_n = 0\} \cap \mathcal{K}$  es una faceta de  $\mathcal{K}$  que contiene el vértice  $v = \mathbf{0}$  y  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$ , existe un punto  $p_n \in \mathcal{K}_{n,\times} \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \mathcal{K} = \mathcal{K}_{n,\times} \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon) \cap \{x_n < 0\}$ . Las coordenadas del punto  $p_n = (p_{1n}, \dots, p_{nn})$  satisfacen  $p_{1n} \geq 0, \dots, p_{n-1,n} \geq 0$  y  $p_{nn} < 0$ , puesto que

$$\mathcal{K}_{n,\times} \cap \{x_n < 0\} \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} \{x_i \geq 0\} \cap \{x_n < 0\}.$$

Como los puntos  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\} \subset \{x_n = 0\}$  son afinmente independientes, el subespacio afín  $L_n$  de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\{p_1, \dots, p_n\}$  tiene dimensión  $n - 1$ . Para concluir solo falta comprobar que  $L_n \cap \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} = \emptyset$ . En efecto, nótese que

$$L_n = \{(1 - \lambda)q + \lambda p_n : q \in L_{n-1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

y suponemos que existe  $z \in L_n \cap \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ . Así  $z = (z_1, \dots, z_n) = (1 - \lambda)q + \lambda p_n$  para cierto punto  $q := (q_1, \dots, q_{n-1}, 0) \in L_{n-1}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De hecho  $\lambda \leq 0$  pues  $0 \leq z_n = \lambda p_{nn}$  y  $p_{nn} < 0$ . Por otro lado, como  $L_{n-1}$  es un subespacio afín que contiene a  $q$  y no interseca al conjunto  $\{x_1 \geq 0, \dots, x_{n-1} \geq 0, x_n = 0\}$ , existe  $1 \leq i \leq n - 1$  tal que  $q_i < 0$ . Por ello  $z_i = (1 - \lambda)q_i + \lambda p_{in} < 0$ , pues  $\lambda \leq 0$ ,  $p_{in} \geq 0$  y  $q_i < 0$ . Así,  $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ , que es una contradicción. De aquí  $L_n \cap \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} = \emptyset$ , lo que termina la demostración.  $\square$

En lo que sigue denotamos por  $\vec{W}$  la *dirección* del subespacio afín  $W \subset \mathbb{R}^n$ , es decir, el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  paralelo a  $W$ .

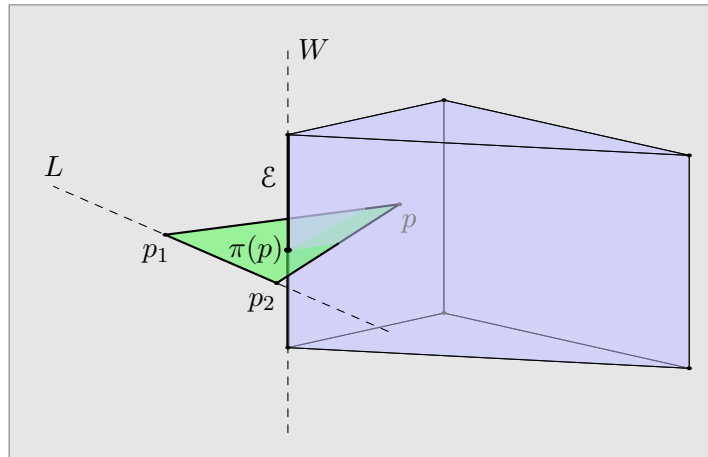


Figura V.3.2: Proyección  $\pi(p)$  del punto  $p \in \mathcal{K}$  sobre la cara  $\mathcal{E}$ .

**Lema V.3.7** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $\mathcal{E}$  una cara  $d$ -dimensional de  $\mathcal{K}$  para algún  $0 \leq d \leq n - 1$ . Denotamos  $W$  el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathcal{E}$ . Entonces, existen  $n - d$  puntos afinmente independientes  $p_1, \dots, p_{n-d} \in \mathbb{R}^n$  tales que:

- (i) El subespacio afín  $L$  generado por los puntos  $\{p_1, \dots, p_{n-d}\}$  satisface  $\vec{W} \cap \vec{L} = \{0\}$ ,  $W \cap L = \emptyset$  y  $(L + \vec{W}) \cap \mathcal{K} = \emptyset$ .
- (ii) Para cada punto  $p \in \mathcal{K}$ , el  $(n - d)$ -símplice  $[p, p_1, \dots, p_{n-d}]$  interseca a  $\mathcal{E}$  exactamente en un punto.

(iii)  $[p, p_1, \dots, p_{n-d}] \cap \mathcal{E} \subset \text{Int}_v \mathcal{E}$  si y sólo si  $p \in \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}$ .

*Demostración.* Observamos en primer lugar que, aplicando [Be2, 12.1.5] recursivamente, existen facetas  $\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_s$  de  $\mathcal{K}$  tales que  $\partial \mathcal{E} = \mathcal{E} \cap \bigcup_{i=1}^s \mathcal{F}'_i$ .

(V.3.7.1) Para cada  $1 \leq i \leq s$  denotamos por  $H'_i$  el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{F}'_i$ , y por  $H'^+_i$  el semiespacio cerrado de  $\mathbb{R}^n$  determinado por  $H'_i$  que contiene a  $\mathcal{K}$ . Sean  $q_0 \in \text{Int}_v \mathcal{E}$  y  $\varepsilon = \min\{d(q_0, H'_i) : 1 \leq i \leq s\}$ , que es positivo pues  $q_0 \notin \bigcup_{i=1}^s H'_i$ . Al ser  $\dim(\mathcal{K}) = n$ , existen  $q_1, \dots, q_{n-d} \in \text{Int}(\mathcal{K})$  tales que el subespacio afín  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $q_0, q_1, \dots, q_{n-d}$  tiene dimensión  $r = n - d$  y  $\mathcal{E} \cap V = \{q_0\}$ . Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que  $V = \{x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$ . Sea  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap V$  y advertimos que  $\text{Int}_v[q_0, q_1, \dots, q_{n-d}] \subset \text{Int}_v \mathcal{P}$  es un subconjunto abierto de  $V$ . Por tanto,  $V$  es el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathcal{P}$  e  $\text{Int}_v \mathcal{P} = \text{Int}_V(\mathcal{P})$ . Más aún,  $\mathcal{E} \cap V = \{q_0\}$  es una cara de  $\mathcal{P}$ , y  $q_0$  es uno de sus vértices. Además

$$\text{Int}_v \mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \partial \mathcal{P} = \mathcal{P} \setminus \partial \mathcal{K} \subset \text{Int}(\mathcal{K}).$$

Para comprobar estas últimas afirmaciones, basta observar que  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap V$  y aplicar [Be2, 12.1.5-7] recursivamente.

(V.3.7.2) Para simplificar la notación, en lo que sigue identificamos  $V = \mathbb{R}^r \times \{\mathbf{0}\} \equiv \mathbb{R}^r$ . Por el Lema V.3.5, tras un cambio afín de coordenadas en  $\mathbb{R}^r \times \{\mathbf{0}\}$  podemos suponer que

- (1) El punto  $q_0$  es el origen de  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Las intersecciones  $\mathcal{G}_i := \mathcal{P} \cap \{x_i = 0\}$  son facetas de  $\mathcal{P}$  para cada  $1 \leq i \leq r$ .
- (3) Para cada  $1 \leq k \leq r - 1$ , la intersección  $\mathcal{E}_k := \mathcal{P} \cap \{x_{k+1} = 0, \dots, x_r = 0\}$  es una cara de  $\mathcal{P}$  y las intersecciones  $\mathcal{R}_j = \{x_j = 0\} \cap \mathcal{E}_k \cap \mathcal{P}$  son facetas de  $\mathcal{E}_k$  para todo  $1 \leq j \leq k$ .
- (4)  $\mathcal{P} \subset \bigcap_{i=1}^r \{x_i \geq 0\}$ .

Observamos que, por [Be2, 12.1.5], las facetas de  $\mathcal{P}$  son intersecciones de las facetas de  $\mathcal{K}$  con  $V$ . Además, todas las facetas de  $\mathcal{K}$  que contienen el punto  $q_0 \in \text{Int}_v \mathcal{E}$  también contienen a  $\mathcal{E}$ , puesto que  $\mathcal{E}$  es una cara de  $\mathcal{K}$ . Así, las facetas  $\mathcal{G}_i$  de  $\mathcal{P}$  consideradas anteriormente son intersecciones de  $\mathcal{P}$  con facetas  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{E}$ . Además, el hiperplano de  $V$  generado por  $\mathcal{G}_i$  es  $\{x_i = 0\} \cap V$ .

Podemos suponer, tras un cambio de coordenadas que deja fijo  $V$ , que el subespacio afín  $d$ -dimensional  $W$  viene dado por  $W := \{x_1 = 0, \dots, x_r = 0\}$ . De este modo, como la unión  $W \cup (\{x_i = 0\} \cap V)$  está contenida en el hiperplano  $H_i$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{F}_i$  para cada  $1 \leq i \leq r$  se tiene  $W + (\{x_i = 0\} \cap V) \subset H_i$ , y esto implica que  $H_i = \{x_i = 0\}$  para  $1 \leq i \leq r$ . Es más,  $\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\}$  puesto que  $\mathcal{K}$  está contenido en  $\{x_i \geq 0\}$  o en  $\{x_i \leq 0\}$  para  $1 \leq i \leq r$ , y  $\emptyset \neq \mathcal{P} \subset \mathcal{K} \cap \{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\}$ .

(V.3.7.3) Por el Lema V.3.6 existe, para cada  $1 \leq i \leq r$ , un punto<sup>1</sup>

$$p_i \in (\mathcal{P}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_r = 0\}) \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, \varepsilon) \cap V \setminus \mathcal{P} \subset V$$

tal que el subespacio afín  $L \subset V$  generado por  $p_1, \dots, p_r$  tiene dimensión  $r - 1 = n - d - 1$  y no interseca el conjunto semialgebraico  $\{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\} \cap V$ . Observamos que  $\mathcal{P}_{i,\times} = \mathcal{K}_{i,\times} \cap V$ , y por tanto,

$$p_i \in (\mathcal{K}_{i,\times} \cap V \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_r = 0\}) \setminus (\mathcal{K} \cap V) \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq r.$$

Más aún, como  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap V \subset \{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\} \cap V$  y  $L \subset V$  no interseca al poliedro  $\mathcal{P}$ , deducimos que  $L \cap \mathcal{K} = \emptyset$ . Además, dado que  $d(p_i, q_0) < \varepsilon$  para  $1 \leq i \leq r$ , el punto  $q_0 \in \bigcap_{i=1}^s (H_i'^+ \setminus H_i')$  y

$$\varepsilon = \min\{d(q_0, H_i') : 1 \leq i \leq s\} = \min\{d(q_0, (\mathbb{R}^n \setminus H_i'^+) \cup H_i') : 1 \leq i \leq s\},$$

se sigue que  $\{p_1, \dots, p_r\} \subset \bigcap_{i=1}^s (H_i'^+ \setminus H_i')$ . Observando también que

$$V = \{x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0\} \quad \text{y} \quad p_i \in (\mathcal{P}_{i,\times} \cap \{x_{i+1} = 0, \dots, x_r = 0\}) \setminus \mathcal{P} \subset V,$$

tenemos  $p_i = (p_{1i}, \dots, p_{i-1,i}, -p_{ii}, 0, \dots, 0)$ , donde  $p_{ji} \geq 0$  para  $1 \leq j \leq i - 1$  y  $p_{ii} > 0$ .

Nótese que  $L$  no interseca a  $W = \{x_1 = 0, \dots, x_r = 0\}$  y  $\vec{L} \cap \vec{W} = \{\mathbf{0}\}$  porque  $\vec{L} \subset \vec{V}$  y  $\vec{V} \cap \vec{W} = \{\mathbf{0}\}$ . Además,  $L + \vec{W}$  no interseca a  $\mathcal{K}$ , puesto que  $\mathcal{K} \subset \{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\}$ ,  $W = \{x_1 = 0, \dots, x_r = 0\}$  y  $L \cap \{x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\} = \emptyset$ . Así, el subespacio afín  $L$  satisface la condición (i) del enunciado del lema.

(V.3.7.4) Comprobamos ahora que para cada punto  $p := (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{K}$ , el símplice  $[p, p_1, \dots, p_r]$  interseca a  $\mathcal{E}$  exactamente en un punto. En efecto, consideramos la ecuación

$$\begin{aligned} -(y_1, \dots, y_n) = -p &= \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i - q \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i (p_{1i}, \dots, p_{i-1,i}, -p_{ii}, 0, \dots, 0) + (0, \overset{(r)}{\cdot}, 0, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n), \end{aligned} \tag{V.3.1}$$

donde  $q := (0, \overset{(r)}{\cdot}, 0, -\beta_{r+1}, \dots, -\beta_n)$  es un punto genérico de  $W$ . La ecuación anterior es equivalente a un sistema triangular de ecuaciones lineales, con una única solución que denominamos  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$ , ya que la matriz de coeficientes tiene rango máximo  $n$ . Como además  $p_{ii} > 0$  y cada  $p_{ji} \geq 0$  para  $1 \leq j \leq i - 1$ , se sigue que  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0$ . Por tanto  $\mu = 1 + \sum_{i=1}^r \lambda_i > 0$ . Si escribimos  $\mu_0 = 1/\mu$  y  $\mu_i = \lambda_i/\mu$  para  $1 \leq i \leq r$ , obtenemos

$$q' = \frac{q}{\mu} = \mu_0 p + \sum_{i=1}^r \mu_i p_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^r \mu_i = 1 \quad \text{y} \quad \text{cada } \mu_i \geq 0.$$

<sup>1</sup>Ver V.3.7.1 para la definición de  $\varepsilon > 0$  y  $H_i'$  para  $i = 1, \dots, s$ .



Así,  $q' \in [p, p_1, \dots, p_r] \cap W$ .

Sea  $\{H_1, \dots, H_m\}$  la presentación mínima de  $\mathcal{K}$ . Como  $p \in \mathcal{K}$  y  $p_i \in \bigcap_{j=r+1}^m H_j^+$  para  $1 \leq i \leq r$ , deducimos que  $q' \in [p, p_1, \dots, p_r] \subset \bigcap_{j=r+1}^m H_j^+$ . Por tanto,

$$q' \in W \cap \bigcap_{j=r+1}^m H_j^+ \subset \bigcap_{i=1}^r \{x_i \geq 0\} \cap \bigcap_{j=r+1}^m H_j^+ = \mathcal{K},$$

y  $q' \in W \cap \mathcal{K} = \mathcal{E}$ . Así pues,  $[p, p_1, \dots, p_r] \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ ; y, de hecho, esta intersección es un único punto puesto que el sistema formado por las ecuaciones (V.3.1) tiene una única solución, como ya hemos observado previamente. Esto demuestra la afirmación (ii) del enunciado.

(V.3.7.5) Para terminar, demostraremos que  $[p, p_1, \dots, p_r] \cap \mathcal{E} \subset \text{Int}_v \mathcal{E}$  si y sólo si  $p \in \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}$ . Es claro que si  $p \in \partial \mathcal{E}$ , entonces  $p \in [p, p_1, \dots, p_r] \cap \mathcal{E} \setminus \text{Int}_v \mathcal{E}$ . Suponemos ahora que  $p \in \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}$  y comprobemos que  $\{q'\} = [p, p_1, \dots, p_r] \cap \mathcal{E} \subset \text{Int}_v \mathcal{E}$ .

Distinguiamos dos casos. Suponemos primero que  $p = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ . Entonces existe un índice  $1 \leq j \leq r$  tal que  $y_j > 0$ . Por tanto, la solución  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$  de la ecuación (V.3.1) satisface  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$  y  $\lambda_j > 0$ ; de aquí que  $\mu_1, \dots, \mu_r \geq 0$  y  $\mu_j > 0$ . Recordamos también que  $\mu_0 = 1/\mu > 0$  (ver V.3.7.4) y  $p_i \in \bigcap_{k=1}^s (H_k'^+ \setminus H_k')$  para  $1 \leq i \leq r$  (ver V.3.7.3). Empleando esta información probamos a continuación que:

$$q' = \frac{q}{\mu} = \mu_0 p + \sum_{i=1}^r \mu_i p_i \in \bigcap_{k=1}^s (H_k'^+ \setminus H_k').$$

En efecto, sea  $f_k \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  un polinomio de grado uno tal que  $H_k'^+ = \{f_k \geq 0\}$ ; entonces,  $H_k'^+ \setminus H_k' = \{f_k > 0\}$ . Como  $\sum_{j=0}^r \mu_j = 1$  y  $p \in \mathcal{K} \subset \bigcap_{k=1}^s (H_k'^+ \setminus H_k')$ , tenemos

$$f_k(q') = f_k\left(\mu_0 p + \sum_{i=1}^r \mu_i p_i\right) = \mu_0 f_k(p) + \sum_{i=1}^r \mu_i f_k(p_i) \geq \mu_j f_k(p_j) > 0,$$

para  $1 \leq k \leq s$ . Así,  $q' \in \mathcal{E} \setminus \bigcup_{k=1}^s H_k = \text{Int}_v \mathcal{E}$ .

En el caso en que  $p \in \text{Int}_v \mathcal{E}$ , la unicidad de la solución de la ecuación (V.3.1) implica que la intersección  $[p, p_1, \dots, p_{n-d}] \cap \mathcal{E} = \{p\} \subset \text{Int}_v \mathcal{E}$ . Queda así probada la parte (iii) del enunciado, y hemos terminado la demostración.  $\square$

**Corolario V.3.8** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional y  $\mathcal{E}$  una cara  $d$ -dimensional de  $\mathcal{K}$  para algún  $0 \leq d \leq n-1$ . Sea  $W$  el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathcal{E}$ . Entonces, existe un subespacio afín  $L \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n-d-1$  tal que  $L \cap W = \emptyset$ ,  $\vec{L} \cap \vec{W} = \{\mathbf{0}\}$  y  $\mathcal{K} \cap (L + \vec{W}) = \emptyset$ , y la proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus (L + \vec{W}) \rightarrow W$  de centro  $L$  y base  $W$  satisface:

(i)  $\pi|_{\mathcal{E}} = \text{id}_{\mathcal{E}}$  y  $\pi(\mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}) = \text{Int}_v \mathcal{E}$ .

(ii) Para cada  $p \in \mathcal{K}$ , existen  $q \in L$  y  $\lambda \in [0, 1]$  tales que  $\pi(p) = \lambda p + (1 - \lambda)q$ .

*Demostración.* En primer lugar existen, por el Lema V.3.7,  $n - d$  puntos afínmente independientes  $p_1, \dots, p_{n-d} \in \mathbb{R}^n$  tales que:

- (1) El subespacio afín  $L$  generado por  $p_1, \dots, p_{n-d}$  satisface  $\vec{L} \cap \vec{W} = \{\mathbf{0}\}$ ,  $L \cap W = \emptyset$  y  $\mathcal{K} \cap (L + \vec{W}) = \emptyset$ .
- (2) Para cada punto  $p \in \mathcal{K}$  la intersección del  $(n - d)$ -símplice  $[p, p_1, \dots, p_{n-d}]$  con la cara  $\mathcal{E}$  consiste, exactamente, en un punto.
- (3)  $[p, p_1, \dots, p_{n-d}] \cap \mathcal{E} \subset \text{Int}_v \mathcal{E}$  si y sólo si  $p \in \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}$ .

Se desprende directamente de la definición que  $\pi(x) = (\{x\} + L) \cap W$ , donde  $\{x\} + L$  denota el subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $x$  y  $L$ . Observamos que  $\{\pi(p)\} = [p, p_1, \dots, p_{n-d}] \cap \mathcal{E}$  para cada punto  $p \in \mathcal{K}$ , y por tanto existen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \geq 0$  tales que

$$\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \pi(p) = \lambda_0 p + \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i p_i.$$

Ahora distinguimos dos posibilidades: si  $\lambda_0 = 1$ , entonces  $\pi(p) = p$ . Por otra parte, si  $\lambda_0 \neq 1$ , definimos

$$0 < \mu = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i = 1 - \lambda_0 \leq 1, \quad \mu_i = \lambda_i / \mu \quad \text{y} \quad q = \sum_{i=1}^{n-d} \mu_i p_i \in L.$$

En cualquier caso  $\pi(p) = \lambda_0 p + (1 - \lambda_0)q$ , donde  $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ . Un cálculo directo muestra que la proyección central  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus (L + \vec{W}) \rightarrow W$  satisface  $\pi|_{\mathcal{E}} = \text{id}_{\mathcal{E}}$  y  $\pi(\mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}) = \text{Int}_v \mathcal{E}$ , como queríamos ver.  $\square$

Estamos ya en condiciones de demostrar el Lema V.3.1.

*Demostración del Lema V.3.1.* En lo que sigue, denotamos  $d = \dim(\mathcal{E})$ .

(V.3.1.1) Si  $d = 0$ , entonces  $\mathcal{E} = \{v\} = \text{Int}_v \mathcal{E}$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  y  $\partial \mathcal{E} = \emptyset$ , por lo que elegimos como  $Z$  el conjunto vacío. Consideramos la aplicación  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \mapsto v$ . Por el Lema V.3.4, existen una función regular  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y un punto  $q \in \text{Int}(\mathcal{K})$  tales que  $g|_{\partial \mathcal{K}} \equiv 1$ ,  $g(q) = 0$  y  $0 < g(p) < 1$  para todo  $p \in \text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \{q\}$ . Así, la aplicación regular

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto g(p)p + (1 - g(p))v$$

cumple lo requerido. En efecto, observamos que  $f|_{\partial \mathcal{K}} \equiv \text{id}_{\partial \mathcal{K}}$  y  $f(q) = v$ . Además se satisface la igualdad  $f(\text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \{q\}) = \text{Int}(\mathcal{K})$ . La inclusión  $f(\text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \{q\}) \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  se sigue de inmediato de [Be1, 11.2.4]. Recíprocamente, sea  $a \in \text{Int}(\mathcal{K})$  y consideremos la recta  $L$  que pasa por los puntos  $v$  y  $a$ . Sea  $b \in \partial \mathcal{K}$  el punto tal que  $\mathcal{K} \cap L$  es el segmento  $[v, b]$  de extremos los puntos  $v$  y  $b$ . Suponemos primero que este segmento no contiene a  $q$ .

Por [Bel, 11.2.4], el segmento abierto  $]v, b[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Además, como  $f(v) = v$ ,  $f(b) = b$ , y el segmento  $[v, b]$  es convexo, la imagen de la restricción  $f|_{[v, b]} : [v, b] \rightarrow \mathcal{K}$  es  $[v, b]$ . Así, existe un punto  $a' \in ]v, b[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  tal que  $f(a') = a$ , y por tanto  $\text{Int}(\mathcal{K}) \subset f(\text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \{q\})$ . Por otra parte, si  $q \in [v, b]$  usamos un argumento similar sustituyendo el segmento  $[v, b]$  por  $[q, b]$ . Por tanto, para cada subconjunto  $Y \subset \partial\mathcal{K}$  se tiene

$$f(\text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y) = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y \cup \{v\} = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y \cup \text{Int}_v \mathcal{E},$$

lo que resuelve este caso.  $\square$

(V.3.1.2) De aquí en adelante suponemos que  $1 \leq d \leq n-1$ . Denominamos  $W$  al subespacio afín de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $\mathcal{E}$ . Por el Corolario V.3.8, existe un subespacio afín  $(n-d-1)$ -dimensional  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$L \cap W = \emptyset, \quad \vec{L} \cap \vec{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{K} \cap (L + \vec{W}) = \emptyset$$

y la proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus (L + \vec{W}) \rightarrow W$  de centro  $L$  y base  $W$  satisface la condiciones:

- (1)  $\pi|_{\mathcal{E}} = \text{id}_{\mathcal{E}}$  y  $\pi(\mathcal{K} \setminus \partial\mathcal{E}) = \text{Int}_v \mathcal{E}$ .
- (2) Para todo punto  $p \in \mathcal{K}$  existen  $q \in L$  y  $\lambda \in [0, 1]$  tales que  $\pi(p) = \lambda p + (1 - \lambda)q$ .

(V.3.1.2.1) Comprobamos que, tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que:

- (a)  $W := \{x_{d+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$  y el origen es un vértice de  $\mathcal{K}$ .
- (b)  $L := \{x_1 = 0, \dots, x_d = 0, x_{d+1} = -1\}$ .
- (c)  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$  y el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  contiene una faceta de  $\mathcal{K}$ .

En efecto, si  $d = n-1$ , podemos suponer que  $W := \{x_n = 0\}$ , el origen es un vértice de  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$ . Observamos que en este caso  $\mathcal{E} \subset \{x_n = 0\}$  es una faceta de  $\mathcal{K}$ . Por el apartado (2) visto previamente, deducimos que  $L$  es un punto contenido en  $\{x_n < 0\}$ . Así, tras un cambio de coordenadas que mantiene fijo el semiespacio cerrado  $\{x_n \geq 0\}$ , podemos asumir que  $L = \{(0, \dots, 0, -1)\}$ .

En lo que sigue suponemos que  $1 \leq d \leq n-2$ . Sean  $p_0, \dots, p_d \in W$  puntos afinmente independientes tales que  $p_0$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  (recordemos que  $\mathcal{K}$  es acotado) y sean  $p_{d+1}, \dots, p_n \in L$  puntos afinmente independientes. Así,  $\{p_0, p_1, \dots, p_d, p_{d+1}, \dots, p_n\}$  es una referencia afín de  $\mathbb{R}^n$ , luego tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que

$$p_0 = \mathbf{0}; \quad p_i := (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0), \quad \text{para } 0 \leq i \leq d, \quad p_{d+1} := (0, \dots, 0, \overset{(d+1)}{-1}, 0, \dots, 0) \text{ y}$$

$$p_j := (0, \dots, 0, \overset{(d+1)}{-1}, 0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots, 0), \quad \text{para } d+2 \leq j \leq n.$$

Tras este cambio afín de coordenadas,

$$W := \{x_{d+1} = 0, \dots, x_n = 0\} \quad \text{y} \quad L := \{x_1 = 0, \dots, x_d = 0, x_{d+1} = -1\},$$

y las ecuaciones de las facetas de  $\mathcal{K}$  que contienen a  $\mathcal{E}$  tienen la forma

$$\alpha_{d+1}x_{d+1} + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Tras un cambio afín de coordenadas que mantiene invariante  $L$  y fijo  $W$ , podemos suponer que el hiperplano  $\{x_n = 0\}$  contiene una faceta de  $\mathcal{K} \subset \{x_n \geq 0\}$ ; aquí tenemos en cuenta que  $d \leq n - 2$ . Con estas coordenadas,  $V = L + \vec{W} = \{x_{d+1} = -1\}$  y

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus V \rightarrow H, \quad x \mapsto \left( \frac{x_1}{1+x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{1+x_{d+1}}, 0, \dots, 0 \right).$$

□

(V.3.1.2.2) Ahora afirmamos: *Existen un  $d$ -andamio  $\Gamma$  de la  $d$ -cara  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{K}$ , un subconjunto algebraico  $Z_0 \subset \mathbb{R}^n$  y una función racional  $g : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$ , tales que:*

- (i)  $\pi(\text{Int}_V \Gamma) = \text{Int}_V \mathcal{E}$ ,
- (ii)  $\mathcal{K} \cap Z_0 = \partial \mathcal{E}$ ,
- (iii) La restricción  $g|_{\mathbb{R}^n \setminus Z_0} : \mathbb{R}^n \setminus Z_0 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regular.
- (iv)  $g|_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}} \equiv 1$ ,  $g|_{\text{Int}_V \Gamma} \equiv 0$ , y
- (v) Para cada punto  $p \in \text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \text{Int}_V \Gamma$  se cumple que  $0 < g(p) < 1$ .

En efecto, recordemos que  $V = L + \vec{W} = \{x_{d+1} = -1\}$  y consideremos la aplicación racional

$$h : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left( \frac{1}{1+x_{d+1}} \right) x,$$

cuya restricción a  $\mathbb{R}^n \setminus V$  es regular y puede ser interpretada como la restricción a cartas adecuadas del espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$  de la homografía

$$\Psi : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0 + x_{d+1} : x_1 : \cdots : x_n).$$

Por tanto,  $h$  preserva conjuntos convexos y subespacios afines no contenidos en  $V$ . Observamos también que su inversa está definida por

$$h^{-1} : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left( \frac{1}{1-x_{d+1}} \right) x,$$

y que la proyección central  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \setminus V$  de centro  $L$  y base  $W$  es la composición  $\pi = h^{-1} \circ \rho \circ h$ , donde

$$\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0).$$

Como  $h|_{\mathbb{R}^n \setminus V} : \mathbb{R}^n \setminus V \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus V$  es un difeomorfismo regular y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \setminus V$ , para demostrar la afirmación V.3.1.2.2 es suficiente ver que:

(V.3.1.2.3) *Existen un  $d$ -andamio  $\Gamma_0$  de la cara  $d$ -dimensional  $h(\mathcal{E})$  de  $h(\mathcal{K})$ , un conjunto algebraico  $Z'_0 \subset \mathbb{R}^n$  y una función racional  $g_0 : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$  tales que:*

- (i)  $\rho(\text{Int}_v \Gamma_0) = \text{Int}_v h(\mathcal{E})$ ,
- (ii)  $h(\mathcal{K}) \cap Z'_0 = \partial h(\mathcal{E})$ ,
- (iii) La restricción  $g_0|_{\mathbb{R}^n \setminus Z'_0} : \mathbb{R}^n \setminus Z'_0 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regular.
- (iv)  $g_0|_{\partial h(\mathcal{K}) \setminus \partial h(\mathcal{E})} \equiv 1$ ,  $g_0|_{\text{Int}_v \Gamma_0} \equiv 0$ , y
- (v) Para cada punto  $p \in \text{Int}_v h(\mathcal{K}) \setminus \text{Int}_v \Gamma_0$  se cumple que  $0 < g_0(p) < 1$ .

En efecto, la aplicación  $h$  preserva los hiperplanos  $\{x_i = 0\}$  para  $1 \leq i \leq n$  y, cambiando el signo de la variable  $x_n$  en caso necesario, podemos suponer que  $h(\mathcal{K}) \subset \{x_n \geq 0\}$ . Por consiguiente se cumplen las hipótesis del Lema V.3.4, y un cálculo inmediato muestra que se cumple V.3.1.2.3. Así pues, también se cumple V.3.1.2.2.  $\square$

(V.3.1.2.4) Ya estamos preparados para probar la afirmación V.3.1 cuando  $1 \leq d \leq n-1$ . Con las notaciones de V.3.1.2.2, consideramos  $Z = Z_0 \cup (L + \vec{W})$  y la aplicación racional

$$f : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto g(p)p + (1 - g(p))\pi(p),$$

cuya restricción a  $\mathbb{R}^n \setminus Z$  es regular. Nótese que  $Z \cap \mathcal{K} = Z_0 \cap \mathcal{K} = \partial \mathcal{E}$ , y comprobamos que

$$f(\text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y) = \text{Int}(\mathcal{K}) \cup Y \cup \text{Int}_v \mathcal{E}.$$

Como  $g|_{\partial \mathcal{K} \setminus \partial \mathcal{E}} \equiv 1$  e  $Y \cap \mathcal{E} = \emptyset$ , se tiene  $f|_Y = \text{id}_Y$ , luego  $f(Y) = Y$  y  $f(\text{Int}_v \Gamma) = \text{Int}_v \mathcal{E}$ , puesto que  $g|_{\text{Int}_v \Gamma} \equiv 0$  y  $\pi(\text{Int}_v \Gamma) = \text{Int}_v \mathcal{E}$  (véase V.3.1.2.2). Por tanto, sólo queda comprobar que  $f(\text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \partial \mathcal{E}) = \text{Int}(\mathcal{K})$ .

Sea  $p \in \text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \partial \mathcal{E}$  y recordemos que  $0 < g(p) < 1$ . Como  $\pi(p) \in \text{Int}_v \mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ , deducimos de [Be1, 11.2.4] que  $f(p) \in \text{Int}(\mathcal{K})$ . Recíprocamente, dado  $a \in \text{Int}(\mathcal{K})$ , su proyección  $\pi(a) \in \text{Int}_v \mathcal{E}$  (ver V.3.1.2(1)). Sean  $T$  la recta que pasa por  $a$  y  $\pi(a)$  y  $b \in \partial \mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{K} \cap T$  es el segmento  $[\pi(a), b]$  que une los puntos  $\pi(a)$  y  $b$ . Observamos que, usando de nuevo [Be1, 11.2.4], el segmento abierto  $]\pi(a), b[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$ . Más aún, como  $f(\pi(a)) = \pi(a)$ ,  $f(b) = b$ , y el segmento  $[\pi(a), b]$  es convexo, la imagen de la restricción  $f|_{[\pi(a), b]} : [\pi(a), b] \rightarrow \mathcal{K}$  es el segmento  $[\pi(a), b]$ . Por tanto, existe un punto  $a' \in ]\pi(a), b[ \subset \text{Int}(\mathcal{K})$  tal que  $f(a') = a$ , y esto muestra que  $\text{Int}(\mathcal{K}) \subset f(\text{Int}(\mathcal{K}))$ . Pero, como  $f(\text{Int}_v \Gamma) = \text{Int}_v \mathcal{E} \subset \partial \mathcal{K}$ , se deduce que  $a' \in \text{Int}(\mathcal{K}) \setminus \text{Int}_v \Gamma$ , lo que completa la prueba.  $\square$

## V.4. Aplicación: la bola $n$ -dimensional

Una bola abierta  $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^n$  y su clausura  $\overline{\mathcal{B}_n}$  pueden entenderse como “límites” de poliedros convexos y de sus interiores cuando el número de facetas tiende a infinito. En esta sección probamos que tanto las bolas cerradas como las abiertas son imágenes regulares de  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto  $r(\overline{\mathcal{B}_n}) = r(\mathcal{B}_n) = n$ . Es evidente que el radio y el centro de estas bolas son irrelevantes a la hora de estudiar esta cuestión, por lo que nos ceñiremos al caso de la bola

abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)$  de centro el origen de coordenadas y radio 1 y de su clausura. Iniciamos nuestra discusión con el caso de la bola abierta. La aplicación regular que permite obtener  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)$  como imagen de  $\mathbb{R}^n$  se inspira en la solución para  $n = 2$  que aparece en [FG2, 6.3.a].

**Proposición V.4.1** *La bola abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  de centro el origen y radio 1 es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $h$  la inversa de la proyección estereográfica

$$\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{p_N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \left( \frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right)$$

desde el polo norte  $p_N = (0, \dots, 0, 1)$  de la esfera

$$\mathbb{S}^n = \{y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2 = 1\}.$$

La expresión explícita de  $h$  es

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{p_N\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Denotamos  $\mathcal{H}_n := \{x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^n$  y observamos que  $h(\mathcal{H}_n) = \mathbb{S}^n \cap \mathcal{H}_{n+1}$ . Además, la proyección ortogonal

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto (y_2, \dots, y_{n+1})$$

satisface la igualdad

$$(f \circ h)(\mathcal{H}_n) = f(\mathbb{S}^n \cap \mathcal{H}_{n+1}) = \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1).$$

Como  $\mathcal{H}_n$  es el interior de un poliedro convexo de  $\mathbb{R}^n$ , existe, por el Corolario V.2.5, una aplicación regular  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_n$ . Por tanto  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1) = (f \circ h \circ g)(\mathbb{R}^n)$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Para terminar demostramos que también la bola cerrada es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición V.4.2** *La bola cerrada  $\overline{\mathcal{B}}_n(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  de centro el origen y radio 1 es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Consideramos el polinomio de una variable  $g(t) = \frac{16}{9}t^4 - \frac{44}{9}t^2 + \frac{28}{9} \in \mathbb{R}[t^2]$  y el producto  $h(t) = tg(t)$ , que satisface las siguientes propiedades:

$$h(0) = h(1) = 0, \quad h(1/2) = 1 \quad \text{y} \quad h'(1/2) = 0.$$

La derivada de  $h$  es  $h'(t) = \frac{4}{9}(2t-1)(2t+1)(5t^2-7)$  y por tanto  $h'|_{[0,1/2[} > 0$  y  $h'|_{]1/2,1]} < 0$ . Esto implica, en particular, que  $h([0, 1]) = [0, 1]$ . Además, como  $g \in \mathbb{R}[t^2]$ , la aplicación

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto g(\|x\|)x$$

es polinómica. Para cada vector unitario  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  denotamos  $S_{\vec{v}} = \{t\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}$  el segmento semiabierto de extremos  $\mathbf{0}$  y  $v$ . Como  $f(t\vec{v}) = tg(t)\vec{v} = h(t)\vec{v}$  se tiene

$$f(S_{\vec{v}}) = \{h(t)\vec{v} \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\} = \{s\vec{v} \in \mathbb{R}^n : s \in [0, 1]\} = \text{Cl}(S_{\vec{v}}).$$

Observamos que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1) = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^n} S_{\vec{v}}$  y  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)} = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^n} \text{Cl}(S_{\vec{v}})$ . Deducimos de aquí que

$$f(\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)) = f\left(\bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^n} S_{\vec{v}}\right) = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^n} f(S_{\vec{v}}) = \bigcup_{\vec{v} \in \mathbb{S}^n} \text{Cl}(S_{\vec{v}}) = \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}.$$

Utilizando la Proposición [V.4.1](#), concluimos que  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$  es imagen regular de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$





# Apéndice A: Origami polinómico

## A.1. Introducción

La mayor parte de nosotros ha jugado a plegar hojas de papel en su infancia, creando figuras diversas como barcos, pajaritas, sombreros, flores, etc. Sin duda alguna los japoneses, con su delicada técnica del origami, han sabido convertir esta afición en una auténtica disciplina artística, [L]. Al tratarse de una actividad de naturaleza eminentemente geométrica, los matemáticos han sentido curiosidad por comprender mejor las operaciones de plegado que tienen lugar en la práctica del origami, y han profundizado en la comprensión de estos procesos, mostrando su estructura subyacente ([AC], [DR]).

En este apéndice renunciamos a gran parte de la compleja estructura que los plegados del origami poseen, y lo transformamos de manera sustancial hasta reconvertirlo en lo que hemos decidido llamar *origami polinómico*. Para empezar, pensemos en una lámina de papel que, supongamos, se extiende sobre todo el plano real  $\mathbb{R}^2$ . El plegado más elemental consiste en trazar una recta sobre esta lámina y plegar la lámina a lo largo de la misma. De este modo la lámina ocupa, tras doblarla, un semiplano cerrado del plano (véase la Figura A.1.1). Nuestro interés se centra en estudiar el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  que quedan cubiertos por la lámina una vez que ésta ha sido plegada. En el ejemplo básico mencionado, ese conjunto sería un semiplano de  $\mathbb{R}^2$ . Evidentemente, podemos a continuación realizar nuevos pliegues, o desplazar el pliegue obtenido isométricamente sobre el plano, o empezar con pliegues de mayor complejidad. Si imponemos la condición de que el modelo final obtenido sea bidimensional, tras realizar una o más de estas operaciones el papel cubrirá una región determinada del plano. Visto así, un plegado de la lámina inicial puede asociarse con una aplicación continua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sujeta a ciertas restricciones, cuya imagen es, precisamente, el conjunto de puntos del plano cubiertos por la lámina ya plegada<sup>2</sup>.

Si queremos seguir introduciendo algo de matemáticas en el asunto, una pregunta surge de manera natural: ¿Qué tipo de aplicaciones  $f$  representan estos plegamientos de papel? Para nuestra doblez inicial, si suponemos que plegamos nuestra hoja “hacia arriba” siguiendo la recta  $y = 0$ , no es difícil obtener la expresión adecuada:  $f(x, y) = (x, |y|)$ . Para

---

<sup>2</sup>Es evidente que esta aplicación  $f$  no retiene toda la estructura que conlleva un plegado (se pierde, por ejemplo, el orden de las capas que lo constituyen.)

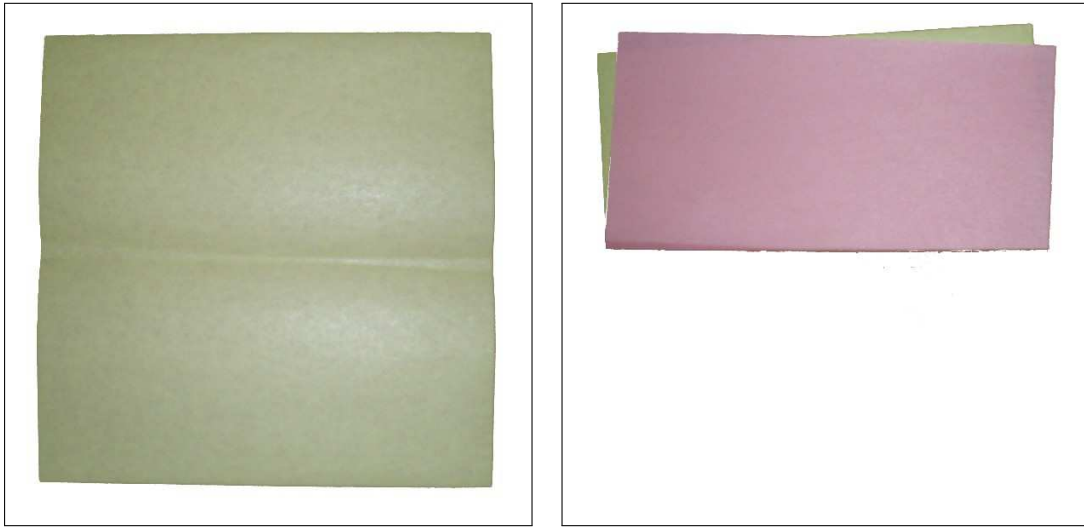


Figura A.1.1: Plegamiento básico correspondiente a  $(x, y) \mapsto (x, |y|)$

pliegues más elaborados la cosa se complica, pero todo parece indicar que la función valor absoluto juega un papel importante en el asunto. Esta aplicación, de carácter semialgebraico, posee una propiedad característica: en la mayor parte de los puntos  $(x, y)$  de su dominio (todos aquéllos por los que no pasa la recta de plegado),  $f$  es una isometría local, ¡¡ $\frac{1}{2}$ ! pues el papel no es un material elástico! Esto pone de manifiesto que las aplicaciones polinómicas no son buenas candidatas para representar estos plegados, pues en general deforman localmente la lámina inicial, estirándola o encogiéndola en distintas zonas, a veces de manera muy acusada. Aquí entra en juego nuestra noción de origami polinómico, porque desde este momento renunciamos al origami tradicional y realizamos nuestros plegados a partir de una lámina elástica (¡¡ $\frac{1}{2}$ ! muy elástica, como veremos más adelante!) que “plegaremos” mediante una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Así pues, inspirados por esta analogía con las aplicaciones que surgen del plegado del papel, nos centraremos ahora en una nueva modalidad de origami basado en aplicaciones polinómicas y en las imágenes que producen.

**Definición A.1.1** *Un plegamiento polinómico es una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Un plegado polinómico es la imagen de un plegamiento polinómico.*

Es evidente que la composición de plegamientos polinómicos es un plegamiento polinómico. En este nuevo tipo de origami la lámina con la que iniciamos nuestros plegamientos sufre deformaciones, y por ello es conveniente pensar que no es de papel, sino de una goma extremadamente elástica. ¡¡ $\frac{1}{2}$ ! Tan elástica que puede llevar puntos “del infinito” hasta el origen de coordenadas! Por ejemplo, el plegamiento polinómico  $f : (x, y) \mapsto (xy, x)$  transforma la recta vertical  $x = 0$ , que se extiende hasta el infinito, en el punto  $(0, 0)$ .

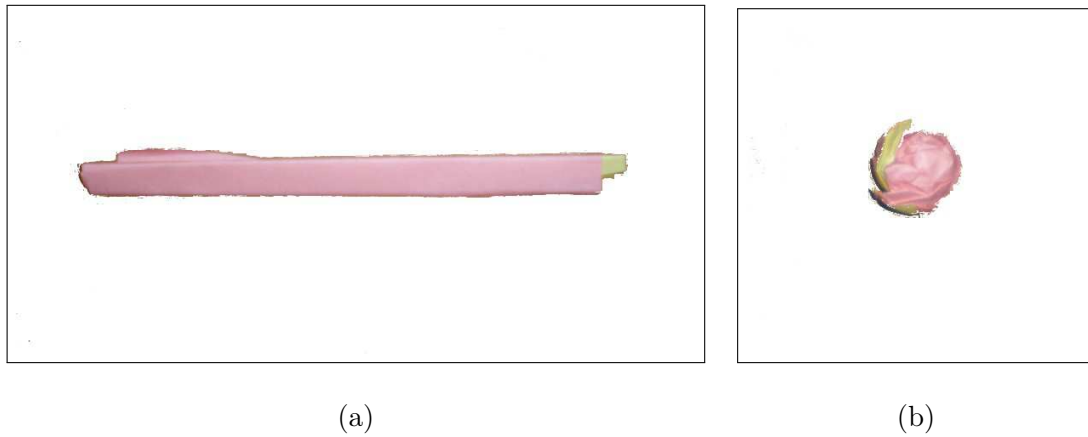


Figura A.1.2: Simulación de las aplicaciones  $(x, y) \mapsto (x, 0)$  y  $(x, y) \mapsto (0, 0)$ .

Otras posibilidades curiosas surgen al considerar, por ejemplo, una aplicación constante  $f : (x, y) \mapsto (0, 0)$  (que equivale a concentrar toda nuestra lámina en un punto), o una proyección del tipo  $f : (x, y) \mapsto (x, 0)$ , que concentra nuestra lámina en el eje horizontal (véase la Figura A.1.2).

El ejemplo básico mostrado en la Figura A.1.1, que produce un semiplano como plegado final, tiene su equivalente en el plegamiento polinómico  $f(x, y) = (x, y^2)$  (existen otras posibilidades, como cualquier otra aplicación  $(x, y) \mapsto (x, y^{2^n})$  con  $n \in \mathbb{N}$ ), cuya imagen es el semiplano cerrado  $\{y \geq 0\}$ , aunque en el plegamiento la lámina inicial ha sufrido una deformación elástica. Es claro que los plegamientos polinómicos permiten plegar ya no sólo respecto a rectas, sino a otras curvas algebraicas. Así, por ejemplo, la aplicación  $(x, y) \mapsto (x, y^2 + x^2)$  es un plegado de  $\mathbb{R}^2$  a lo largo de la parábola  $\{y = x^2\}$ .

Determinar las regiones del plano que son plegados polinómicos no es sino caracterizar las imágenes de aplicaciones polinómicas del plano euclídeo en sí mismo (y extendiendo el problema, caracterizar las imágenes de aplicaciones polinómicas entre espacios euclídeos), tema al que se han dedicado los capítulos anteriores de esta Memoria. En particular, vimos en la Sección I.4.b que todo polígono convexo bidimensional distinto de una banda cumple que tanto su complementario como el de su interior son plegados polinómicos. También vimos, en el Corolario I.3.8, que el interior de un polígono convexo con más de dos aristas no es un plegado polinómico. Este Apéndice está dedicado a demostrar el Teorema A.1.2, un resultado que completa nuestro estudio sobre la relación entre polígonos convexos e imágenes polinómicas del plano euclídeo.

**Teorema A.1.2** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  un polígono convexo no acotado cuyos lados no acotados no son paralelos. Entonces  $\mathcal{P}$  es un plegado polinómico.*

Para simplificar la terminología, un polígono con las propiedades expresadas en el Teorema

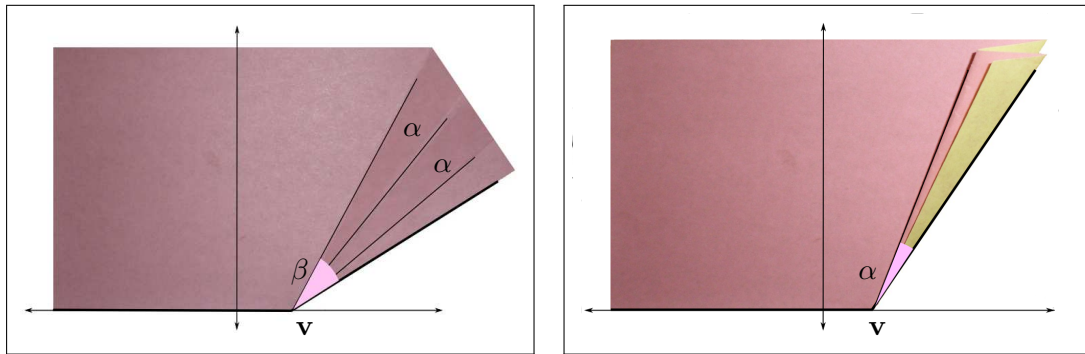


Figura A.2.1: Plegamiento angular de amplitud  $\alpha$

**A.1.2** recibirá el nombre de *polígono convexo no acotado genérico*. Las técnicas que utilizaremos en la demostración se obtienen modificando ligeramente las utilizadas en la Sección I.4.b; conviene observar que los plegamientos polinómicos involucrados no son en general aplicaciones propias, y esto se traduce en un comportamiento “extravagante” de los mismos, en el sentido de que conllevan colapsos de puntos del infinito. En este sentido, parece interesante formular la siguiente pregunta, cuya respuesta conjeturamos es afirmativa.

**Problema A.1.3** *¿Es todo polígono convexo no acotado genérico imagen de una aplicación polinómica propia  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?*

## A.2. Polígonos convexos en el origami tradicional.

Antes de demostrar el Teorema A.1.2 nos preguntamos si todo polígono convexo no acotado genérico es un plegado tradicional. La respuesta es afirmativa, y su demostración no es difícil empleando lo que llamaremos *plegamientos angulares*. La aplicación sucesiva de estos plegamientos permite obtener un plegado en forma de polígono convexo no acotado genérico. La imagen que mejor ilustra un plegamiento angular es la de un abanico cerrado de papel, en el que el papel se apila en forma de hojas triangulares alargadas, de amplitud angular fija  $\alpha$ . Para describir mejor este plegamiento, supongamos que hemos obtenido un plegado tradicional  $\mathcal{S}$  que contiene un ángulo  $\mathcal{J} := [\vec{u}, \mathbf{v}, \vec{w}]$ , cuya amplitud es  $\beta$ , de modo que la semirrecta cerrada  $\mathbf{v}\vec{w}$  está contenida en la frontera  $\partial\mathcal{S}$  de  $\mathcal{S}$ . Dividimos ahora el ángulo  $\mathcal{J}$  en ángulos de amplitud  $\alpha$ , trazando para ello  $k = \lfloor \beta/\alpha \rfloor$  (aquí  $\lfloor x \rfloor$  representa la parte entera del número  $x$ ) semirrectas  $\mathbf{v}\vec{u}_1, \dots, \mathbf{v}\vec{u}_k$  con origen en  $\mathbf{v}$  y contenidas en  $\mathcal{J}$ , de tal manera que los ángulos  $[\vec{u}, \mathbf{v}, \vec{u}_1], \dots, [\vec{u}_{k-1}, \mathbf{v}, \vec{u}_k]$  son todos congruentes y de medida  $\alpha$ . Así, la medida del ángulo restante  $[\vec{u}_k, \mathbf{v}, \vec{w}]$  pertenece al intervalo  $[0, \alpha[$ . En esta situación, el plegamiento angular de  $\mathcal{J}$  de medida  $\alpha$  consiste en plegar  $\mathcal{S}$  doblando primero a lo largo de la semirrecta  $\mathbf{v}\vec{u}$  y después, sucesivamente, a lo largo de las restantes semirrectas trazadas, a modo de acordeón, de tal manera que la región de  $\mathbb{R}^2$  que al principio estaba

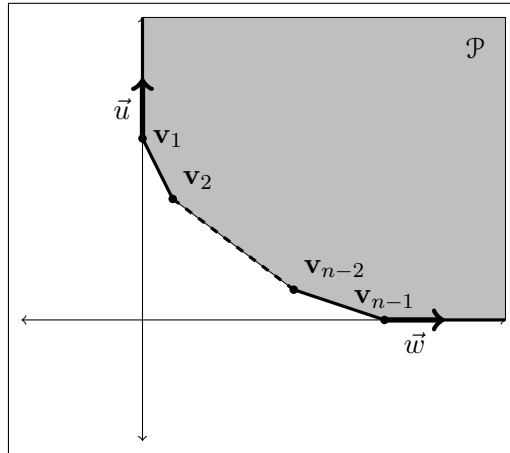


Figura A.2.2: Polígono convexo no acotado genérico con sus lados no acotados sobre los ejes

cubierta por el ángulo  $[\vec{v}, \mathbf{v}, \vec{w}]$  queda finalmente descubierta, tras pasar todo el papel al otro lado de la semirrecta  $\mathbf{v}\vec{u}$ , plegado en un ángulo de amplitud  $\alpha$  (véase la Figura A.2.1).

Veamos que todo polígono convexo no acotado genérico se obtiene plegando una lámina infinita de papel, para lo que procedemos por inducción sobre el número  $n$  de aristas del polígono. Para  $n = 1$  basta realizar el pliegue básico presentado en la introducción de este Apéndice. El caso  $n = 2$  se corresponde con la obtención de un ángulo de medida  $\alpha < \pi$ ; para conseguir esto podemos partir de un semiplano  $\mathcal{H}$ , fijar un punto  $\mathbf{v}$  sobre su frontera, y realizar un plegamiento angular sobre  $\mathcal{H}$  de amplitud  $\alpha$  y con vértice  $\mathbf{v}$ , como se indicó más arriba.

Explicamos ahora el paso inductivo. Supongamos que todos los polígonos convexos no acotados genéricos de  $n - 1$  aristas son plegados de  $\mathbb{R}^2$  y consideremos un polígono convexo no acotado genérico de  $n$  aristas  $\mathcal{P} := [\vec{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \vec{w}]$ . Podemos suponer que la arista  $\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$  yace sobre el eje horizontal y que  $\mathcal{P} \subset \{y \geq 0\}$ . Definimos  $\vec{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  y el polígono  $\mathcal{P}' := [\vec{v}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \vec{w}]$  que, por hipótesis de inducción, es un plegado tradicional de  $\mathbb{R}^2$ . Nótese que  $\mathcal{P}'$  contiene el ángulo  $\mathcal{T} = [\vec{u}, \mathbf{v}_1, \vec{v}]$ , y existe un plegamiento angular sobre  $\mathcal{T}$  cuya amplitud es la medida del ángulo  $[\vec{u}, \mathbf{v}_1, \vec{w}] \subset \mathcal{P}$ . El resultado de aplicar este último plegamiento sobre  $\mathcal{P}'$  presenta  $\mathcal{P}$  como plegado tradicional del plano.

Nótese que en el proceso inductivo se puede arrastrar la hipótesis de que el *grado* del plegamiento  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen es  $\mathcal{P}$  es finito, donde llamamos grado de  $f$  a

$$\text{deg } f = \text{máx}\{\#f^{-1}(p) : p \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nada garantiza que el proceso descrito produzca un plegamiento de grado mínimo entre aquéllos cuyo plegado es  $\mathcal{P}$ , y se desconoce la relación entre la complejidad de  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  y el mínimo de los grados de los plegamientos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}$ .

### A.3. Polígonos convexos en el origami polinómico.

Demostraremos el Teorema A.1.2 por inducción sobre el número de aristas del polígono convexo, lo que requiere algunos resultados preparatorios que exponemos a continuación. Con frecuencia sustituiremos el polígono dado por otro afínmente equivalente cuya colocación en  $\mathbb{R}^2$  facilite las construcciones que hemos de efectuar. Por ejemplo, si  $\mathcal{P}$  es un polígono convexo no acotado genérico en  $\mathbb{R}^2$ , siempre podemos suponer, después de un cambio afín de coordenadas, que  $\mathcal{P}$  está contenido en el primer cuadrante y sus aristas no acotadas están contenidas en los ejes coordenados, como muestra la Figura A.2.2. Si éste es el caso, y como consecuencia de que  $\mathcal{P}$  es convexo, la medida de cada ángulo interior de  $\mathcal{P}$  es necesariamente mayor o igual que  $\pi/2$  (véase la Figura A.2.2).

El siguiente Lema surge de una modificación conveniente del concepto de aplicación recortante de tipo II introducida en el Capítulo IV, y nos ayudará a completar el proceso de inducción que necesitamos.

**Lema A.3.1** Sean  $f_1, \dots, f_k$  polinomios irreducibles en  $\mathbb{R}[x, y]$  y  $-\infty \leq p < q \leq +\infty$ . Sean  $\mathcal{S}$  un conjunto semialgebraico tal que

$$\{f_1 > 0, \dots, f_k > 0\} \subset \mathcal{S} \subset \{f_1 \geq 0, \dots, f_k \geq 0\}$$

y  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x$ . Supongamos además que la sección  $\mathcal{S}_r := \{x = r\} \cap \mathcal{S}$  es un segmento no acotado (abierto o cerrado) contenido en  $\{r\} \times [0, +\infty[$  para cada  $r \in \pi(\mathcal{S})$ . Consideremos los polinomios

$$\varphi(\mathbf{x}, y) = \prod_{\substack{(x-r)\{f_i \\ \forall r \in ]p, q[}} f_i(\mathbf{x}, y) \quad y \quad h(\mathbf{x}, y) = y(1 + g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, y))^2 \in \mathbb{R}[x, y],$$

donde

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x} - p)(\mathbf{x} - q), & \text{si } p, q \in \mathbb{R} \\ (\mathbf{x} - q), & \text{si } p = -\infty \\ (p - \mathbf{x}), & \text{si } q = +\infty. \end{cases}$$

Entonces la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, h(x, y))$  cumple que

$$f(\mathcal{S}_r) = \begin{cases} \mathcal{S}_r & \text{si } r \in \pi(\mathcal{S}) \setminus ]p, q[ \\ [0, +\infty[ & \text{si } r \in ]p, q[ \cap \pi(\mathcal{S}). \end{cases}$$

En particular,  $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \cup (]p, q[ \cap \pi(\mathcal{S})) \times [0, +\infty[$ .

*Demostración.* Observamos que  $\mathcal{S} = \bigcup_{r \in \pi(\mathcal{S})} \mathcal{S}_r$ , luego  $f(\mathcal{S}) = \bigcup_{r \in \pi(\mathcal{S})} f(\mathcal{S}_r)$ , y escribimos  $\mathcal{S}_r = \{r\} \times \langle q_r, +\infty[$  donde  $q_r \geq 0$  y  $\langle$  representa uno de los símbolos  $] o [$ , según sea  $\mathcal{S}_r$  un segmento abierto o cerrado, respectivamente. Es claro que  $f(\mathcal{S}_r) \subset \{r\} \times [0, +\infty[$ . Para

cada  $r \in \pi(\mathcal{S})$ , y puesto que  $\mathcal{S}_r = \{r\} \times \langle q_r, +\infty[$ , existe un índice  $1 \leq i \leq r$  tal que  $f_i(r, q_r) = 0$  y  $(x - r) \nmid f_i$ , por lo que  $\varphi(r, q_r) = 0$ . Consideramos los polinomios

$$a_r(\mathbf{t}) := 1 + g(r)\varphi(r, \mathbf{t}) \quad \text{y} \quad h_r(\mathbf{t}) := h(r, \mathbf{t}) = a_r^2(\mathbf{t})\mathbf{t},$$

y observamos que  $a_r(q_r) = 1$  y  $h_r(q_r) = q_r$  para cada  $r \in \pi(\mathcal{S})$ , puesto que  $\varphi(r, q_r) = 0$ . A continuación, distinguimos los dos casos esperables:

CASO 1. Si  $r \in \pi(\mathcal{S}) \setminus ]p, q[$ , entonces  $h_r(\mathbf{t})$  es un polinomio de grado impar y  $h_r(t) \geq t$  para cada  $t \in \langle q_r, +\infty[$ . Esto se debe a que  $g(r) \geq 0$  y  $(r, t) \in \mathcal{S}$ , por lo que cada  $f_i(r, t) \geq 0$ , luego  $\varphi(r, t) \geq 0$ . Como además  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_r(t) = +\infty$  y  $h_r(q_r) = q_r$ , concluimos que  $f(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_r$ .

CASO 2. Si  $r \in \pi(\mathcal{S}) \cap ]p, q[$ , el polinomio  $a_r(\mathbf{t}) = 1 + g(r)\varphi(r, \mathbf{t})$  no es constante. En efecto, si lo fuera también lo sería  $\varphi(r, \mathbf{t})$  y esto significaría que algún  $f_i(r, \mathbf{t})$  entre los factores de  $\varphi(r, \mathbf{t})$  es nulo o cada  $f_j(r, \mathbf{t})$  es un polinomio constante no nulo. Lo primero implica que  $(\mathbf{x} - r)$  divide a  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , y esta posibilidad la hemos excluido, y lo segundo implica que  $\mathcal{S}_r = \mathbb{R}$ , contra la hipótesis.

Además, el coeficiente director del polinomio  $a_r(\mathbf{t})$  es negativo, pues  $g(r) < 0$  mientras que el coeficiente director de  $\varphi(r, \mathbf{t})$  es positivo, ya que cada restricción  $f_i|_{\mathcal{S}_r}$  es una función que no toma ningún valor negativo. Por tanto,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} a_r(t) = -\infty$  y, como  $a_r(q_r) = 1$ , existe  $t_0 \in ]q_r, +\infty[$  tal que  $a_r(t_0) = 0$ , luego  $0 = h_r(t_0)$ . Como además  $h_r(t) \geq 0$  para cada  $t \in \langle q_r, +\infty[$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_r(t) = +\infty$ , concluimos que  $f(\mathcal{S}_r) = [0, +\infty[$ .  $\square$

*Demostración del Teorema A.1.2.* Ya hemos señalado que vamos a argumentar por inducción sobre el número  $n$  de aristas del polígono convexo no acotado genérico  $\mathcal{P}$ .

Los polígonos convexos con una única arista son los semiplanos cerrados del plano. Ya hemos visto en la introducción que el plegamiento polinómico  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$  produce como plegado polinómico el semiplano cerrado  $\{y \geq 0\}$ , y de aquí se deduce la validez del teorema para  $n = 1$ . Para  $n = 2$  basta demostrar que el cuadrante cerrado  $\mathcal{P} := \{x \geq 0, y \geq 0\}$  es un plegado polinómico, y es obvio que  $\mathcal{P}$  es la imagen del plegamiento  $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ . Merece la pena observar que los plegamientos empleados para  $n = 1$  y  $n = 2$  son aplicaciones propias  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pero en el proceso inductivo no podemos controlar esta propiedad.

Sea  $\mathcal{P} := [\vec{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \vec{w}]$  un polígono convexo no acotado genérico con  $n > 2$  aristas, que por tanto tiene al menos dos vértices, y procedemos por inducción. Tras un cambio afín de coordenadas podemos suponer que:

- (a) Si  $\mathbf{v}_i := (a_i, b_i)$  entonces  $a_1 < \dots < a_{n-2} = 0 < a_{n-1}$  y  $b_{n-2} = b_{n-1} = 0$ .
- (b) Si  $\vec{u} := (u_1, u_2)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2)$ , entonces  $u_1 < 0 < w_1$  y  $u_2, w_2 > 0$ .

Para ello, basta situar primero  $\mathcal{P}$  en el primer cuadrante de modo que sus aristas no acotadas están contenidas en los ejes coordenados y después, mediante un giro y una traslación, colocar el vértice  $\mathbf{v}_{n-2}$  en  $(0, 0)$  y el segmento  $\overline{\mathbf{v}_{n-2}\mathbf{v}_{n-1}}$  en el eje  $\{y = 0\}$ , de

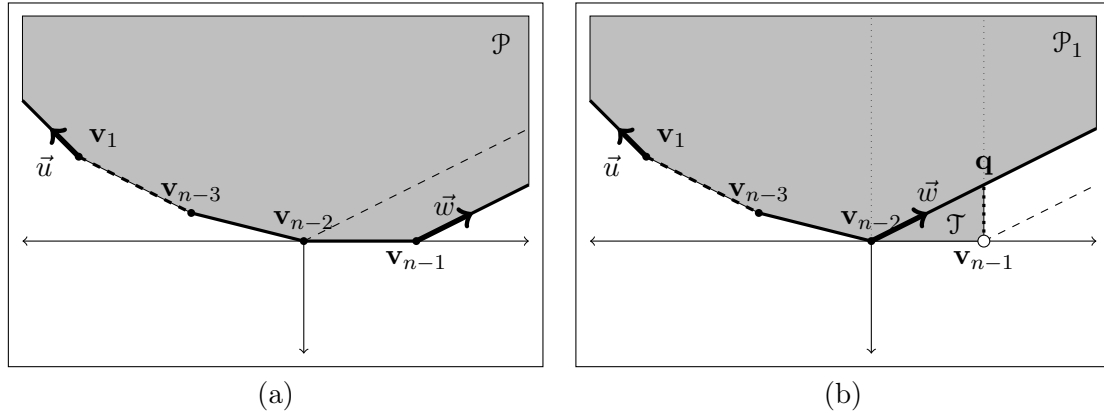


Figura A.3.1: Obtención de  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{J}$  a partir de  $\mathcal{P}_1$

forma que  $\mathcal{P} \subset \{y \geq 0\}$ . Observamos que, así colocado, ninguna de las aristas del polígono  $\mathcal{P}$  está contenida en una recta vertical.

Consideremos ahora el polígono convexo no acotado genérico  $\mathcal{P}_1 = [\vec{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-2}, \vec{w}]$ , que tiene una arista menos que  $\mathcal{P}$ . Por la hipótesis de inducción existe un plegamiento polinómico  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}_1$ . Sean  $\ell_1, \dots, \ell_{n-1} \in \mathbb{R}[x, y]$  polinomios de grado uno cuyo lugar de ceros son las rectas que contienen a las aristas de  $\mathcal{P}_1$ , de modo que  $\mathcal{P}_1 = \{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_{n-1} \geq 0\}$ ; nótese que ninguno de estos polinomios es múltiplo de otro del tipo  $x - r$  ya que ninguna de las aristas de  $\mathcal{P}$ , y por tanto de  $\mathcal{P}_1$ , está contenida en una recta vertical. Denotamos  $p := a_{n-2}$ ,  $q := a_{n-1}$  y  $\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdots \ell_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , y aplicamos el Lema A.3.1 al plegamiento polinómico

$$f^{(1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, (1 + \ell(x, y)(x - a_{n-2})(x - a_{n-1}))^2 y).$$

Consideremos, de acuerdo con la Figura A.3.1,

$$\mathbf{q} := [\mathbf{v}_{n-2}\vec{w}] \cap \{x = a_{n-1}\}, \quad S := \overline{\mathbf{v}_{n-1}\mathbf{q}} \setminus \{\mathbf{q}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{J} := \Delta \setminus S,$$

donde  $\Delta$  es el triángulo de vértices  $\mathbf{v}_{n-2}$ ,  $\mathbf{v}_{n-1}$  y  $\mathbf{q}$ . Obtenemos así el plegado polinómico

$$\mathcal{S} := f^{(1)}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_1 \cup (]a_{n-2}, a_{n-1}[ \times ]0, +\infty[) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{J} \subset \mathcal{P}.$$

Recolocamos mediante un nuevo cambio afín de coordenadas el polígono  $\mathcal{P}$ , y denotamos  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{P}'_1$  y  $\mathcal{S}'$  los conjuntos que se obtienen a partir de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{S}$  tras efectuar dicho cambio, de modo que  $\mathcal{P}' := [\vec{u}', \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{n-1}, \vec{w}']$ , el lado  $\mathbf{v}'_{n-1}\vec{w}'$  está contenido en el eje  $\{y = 0\}$ ,  $\mathbf{v}'_{n-1} := (0, 0)$  y el vector  $\vec{u}' := (u'_1, u'_2)$  cumple  $u'_1 < 0 < u'_2$  (véase la Figura A.3.2).

Observamos que la arista  $\mathbf{v}'_{n-2}\vec{w}'$  de  $\mathcal{P}'_1$  está contenida en una recta paralela a la recta  $\{y = 0\}$  y que el vector  $\vec{v}' := (v'_1, v'_2)$  de origen  $\mathbf{v}'_{n-1}$  y extremo  $\mathbf{q}' := (c, d)$  cumple que  $v'_1, v'_2 > 0$ ; por supuesto, también  $c, d > 0$ . Denotamos

$$\mathcal{P}'_2 := [\vec{u}', \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{n-1}, \vec{v}'] \quad \text{y} \quad \mathcal{R} := \{x \geq c, y \geq d\},$$



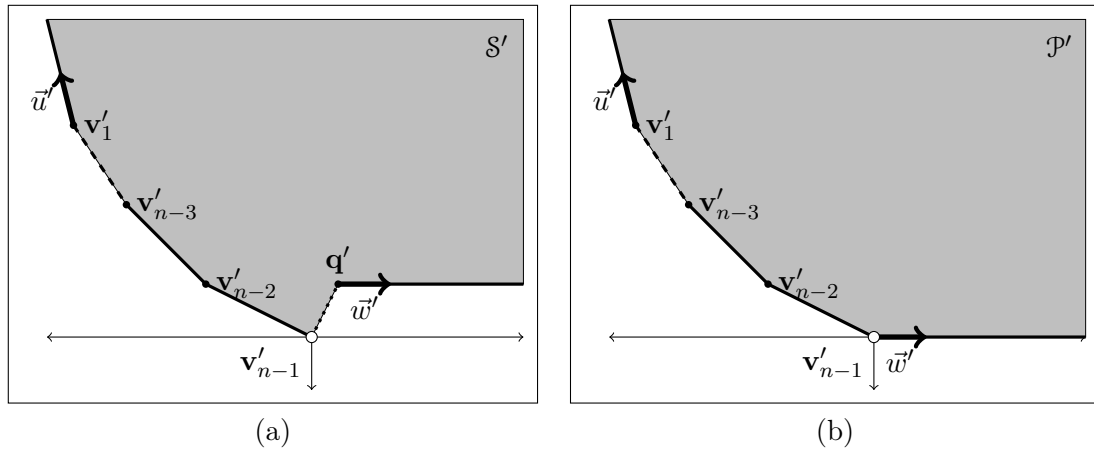


Figura A.3.2: Obtención del polígono  $\mathcal{P}'$  como imagen polinómica, salvo su vértice  $\mathbf{v}'_{n-1}$

y observamos que  $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}'_1 \setminus (\{\mathbf{v}'_{n-1}\} \cup (\mathbf{v}'_{n-1}\vec{v}'_n))) \cup \mathcal{R}$ .

Sean  $\ell'_1, \dots, \ell'_n \in \mathbb{R}[x, y]$  polinomios de grado uno cuyo lugar de ceros son las rectas que contienen las aristas de  $\mathcal{P}'_2$ , de modo que  $\mathcal{P}'_2 := \{\ell'_1 \geq 0, \dots, \ell'_n \geq 0\}$ ; nótese que ninguno de estos polinomios es múltiplo de otro de la forma  $x - r$  porque ninguna arista de  $\mathcal{P}'_2$  está contenida en una recta vertical. Denotamos  $\ell'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \ell'_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdots \ell'_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Aplicamos el Lema A.3.1 con  $p = 0$  y  $q = +\infty$  al plegamiento polinómico definido por

$$f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, (1 + \ell'(x, y)x)^2 y),$$

y obtenemos el plegado polinómico  $f^{(2)}(\mathcal{P}'_2 \setminus \mathbf{v}'_{n-1}\vec{v}'_n) = \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{v}'_{n-1}\}$ . Además,

$$f^{(2)}(\mathcal{R}) \subset ]c, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \subset \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{v}'_{n-1}\},$$

y por tanto  $f^{(2)}(\mathcal{S}) = \mathcal{P} \setminus \{\mathbf{v}'_{n-1}\}$ . Componiendo  $g$ ,  $f^{(1)}$  y  $f^{(2)}$  y los cambios afines de coordenadas efectuados, hemos probado que existe un plegamiento polinómico  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}' \setminus \{\mathbf{v}'_{n-1}\}$ . Como  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  son afinmente equivalentes basta probar que  $\mathcal{P}'$  es un plegado polinómico, y para ello sólo nos falta por cubrir el vértice  $\mathbf{v}'_{n-1}$  de  $\mathcal{P}'$ .

Para conseguir esto último reparamos mediante un cambio afín de coordenadas el polígono  $\mathcal{P}'$ , para obtener un nuevo polígono  $\mathcal{P}'' = [\vec{u}'', \mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}''_{n-1}, \vec{w}'']$  de modo que, de acuerdo con la Figura A.3.3:

- (i) El vértice  $\mathbf{v}''_{n-1}$  es el origen.
- (ii) La arista acotada  $\overline{\mathbf{v}''_{n-1}\mathbf{v}''_{n-2}}$  está contenida en la recta  $\{y = 0\}$ .
- (iii) La arista no acotada que contiene al rayo  $\mathbf{v}''_{n-1}\vec{w}''$  está contenida en la recta  $\{x = 0\}$ .
- (iv) El polígono  $\mathcal{P}''$  está contenido en el segundo cuadrante.

Sean  $\ell''_1, \dots, \ell''_n \in \mathbb{R}[x, y]$  polinomios de grado uno cuyo lugar de ceros son las rectas que contienen las aristas de  $\mathcal{P}''$ , de modo que  $\mathcal{P}'' := \{\ell''_1 \geq 0, \dots, \ell''_n \geq 0\}$  y  $\ell''_{n-1} := y$  y

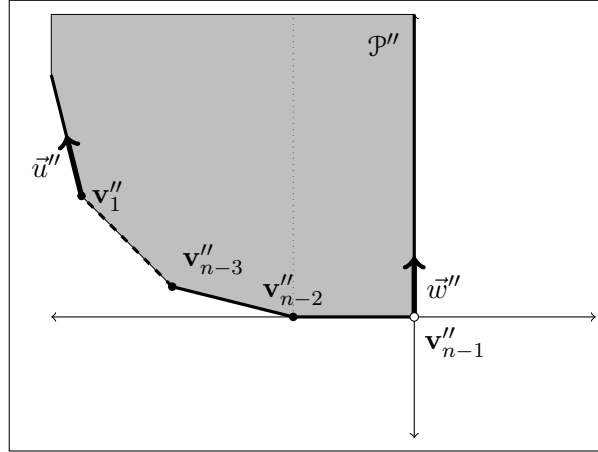


Figura A.3.3: Posición para “cubrir” el vértice restante  $\mathbf{v}_{n-1}$

$\ell''_n := \mathbf{x}$ . Nótese que ninguno de los polinomios  $\ell''_1, \dots, \ell''_{n-1}$  es múltiplo de otro de la forma  $\mathbf{x} - r$ , porque  $\ell''_n$  lo es y  $\mathcal{P}''$  no tiene aristas paralelas.

Escribimos  $\mathbf{v}''_{n-2} := (a''_{n-2}, 0)$ ,  $\ell''(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ell''_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdots \ell''_{n-2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y consideramos el plegamiento polinómico

$$f^{(3)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, (1 + \ell''(x, y)(a''_{n-2} - x))^2 y).$$

Al aplicar el Lema A.3.1 con  $p = a''_{n-2}$  y  $q = +\infty$  resulta que

$$\mathcal{P}'' = \mathcal{P}'' \setminus \{\mathbf{v}''_{n-1}\} \cup (]a_{n-2}, 0] \times [0, +\infty[) = f^{(3)}(\mathcal{P}'' \setminus \{\mathbf{v}''_{n-1}\})$$

Si denotamos  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el cambio afín de sistema de coordenadas que cumple  $\phi(\mathcal{P}') = \mathcal{P}''$  y  $\phi(\mathbf{v}'_{n-1}) = \mathbf{v}''_{n-1}$ , resulta que  $\mathcal{P}'$ , y por tanto  $\mathcal{P}$ , es un plegado polinómico, ya que

$$\begin{aligned} (\phi^{-1} \circ f^{(3)} \circ \phi \circ h)(\mathbb{R}^2) &= (\phi^{-1} \circ f^{(3)} \circ \phi)(\mathcal{P}' \setminus \{\mathbf{v}'_{n-1}\}) \\ &= (\phi^{-1} \circ f^{(3)})(\mathcal{P}'' \setminus \{\mathbf{v}''_{n-1}\}) \phi^{-1}(\mathcal{P}'') = \mathcal{P}', \end{aligned}$$

y con esto concluye la demostración. □

# Apéndice B: Algunos resultados de Z. Jelonek desarrollados

El objetivo de este Apéndice B es exponer detalladamente las demostraciones de los resultados de Z. Jelonek presentados en la Sección 1.2 del Capítulo I. Utilizaremos libremente las nociones allí introducidas; entre ellas, aplicación propia, semilínea paramétrica, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos del espacio  $Y$  en los que una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  no es propia, multiplicidades global y local de una aplicación, etc, que seguramente el lector conoce. Sin embargo, volveremos a enunciar los resultados allí introducidos y que ahora probaremos, y presentaremos otros de carácter auxiliar que serán necesarios para la demostración de los anteriores.

## B.1. Aplicaciones polinómicas complejas propias

El primer objetivo de la sección es probar la Proposición B.1.1, que pone de manifiesto que en el caso complejo las aplicaciones polinómicas propias  $f : X \rightarrow Y$  entre dos variedades algebraicas afines  $X$  e  $Y$  quedan caracterizadas por las propiedades algebraicas del homomorfismo  $f^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[X]$ ,  $g \mapsto g \circ f$  entre los anillos de coordenadas de  $Y$  y  $X$ .

Para entender su formulación recordemos que dados anillos conmutativos y unitarios  $A \subset B$  se dice que un elemento  $b \in B$  es *entero* sobre  $A$  si existe un polinomio mónico en  $A[t]$  que tiene a  $b$  por raíz. Si todos los elementos de  $B$  son enteros sobre  $A$  se dice que la extensión  $A \subset B$  es *entera*. Un homomorfismo de anillos  $g : A \rightarrow B$  se dice *finito* si la extensión  $g(A) \subset B$  es entera. Por ello se dice que una aplicación polinómica  $f : X \rightarrow Y$  es un *morfismo finito* si el homomorfismo de anillos  $f^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[X]$  es finito.

**Proposición B.1.1** ([J3]) *Una aplicación polinómica  $f : X \rightarrow Y$  entre variedades algebraicas afines complejas  $X \subset \mathbb{C}^n$  e  $Y \subset \mathbb{C}^m$  es propia si y sólo si es un morfismo finito.*

En la prueba de la Proposición B.1.1 anterior emplearemos el siguiente lema, véase [TW], que es más elemental y tiene interés por sí mismo.

**Lema B.1.2** Sean  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  tales que  $a_d \neq 0$  y  $\Omega$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{C}^n$ . Sea

$$S := \left\{ (x, t) \in \Omega \times \mathbb{C} : \sum_{k=0}^d a_k(x)t^k = 0 \right\}.$$

Entonces la proyección  $\pi : S \rightarrow \Omega$ ,  $(x, t) \mapsto x$  es propia si y sólo si  $\mathcal{Z}_\Omega(a_d) = \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar, por reducción al absurdo, que  $\pi$  es propia y existe  $x_0 \in \Omega$  con  $a_d(x_0) = 0$ . Sea  $K$  un entorno compacto de  $x_0$  en  $\Omega$ , y consideramos el conjunto  $\pi^{-1}(K)$ , que es compacto por ser  $\pi$  una aplicación propia. Identificamos  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$  y sea  $M > 0$  tal que  $\pi^{-1}(K) \subset K \times \mathcal{B}_2(\mathbf{0}, M)$ . Por tanto, para cada  $x \in K$  y cada raíz  $t \in \mathbb{C}$  del polinomio  $\sum_{k=0}^d a_k(x)t^k$  se cumple que  $|t| < M$ .

Para cada  $x \in K \setminus \mathcal{Z}_K(a_d)$  denotemos  $t_1(x), \dots, t_d(x) \in \mathbb{C}$  las raíces, no necesariamente distintas, del polinomio  $\sum_{k=0}^d a_k(x)t^k$ . Se desprende de las fórmulas de Cardano-Vieta que

$$\left| \frac{a_k(x)}{a_d(x)} \right| = \left| \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-k} \leq d} t_{i_1}(x) \cdots t_{i_{d-k}}(x) \right| \leq \binom{d}{d-k} M^k = \binom{d}{k} M^k,$$

y por tanto

$$|a_k(x)| \leq \binom{d}{k} M^k |a_d(x)| \text{ para todo } x \in K \setminus \mathcal{Z}_K(a_d). \quad (\text{B.1.1})$$

Como el conjunto  $\Omega \setminus \mathcal{Z}_\Omega(a_d)$  es denso en  $\Omega$ , existe una sucesión  $\{x_m\}_m \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}_\Omega(a_d)$  que converge a  $x_0$ . En virtud de la desigualdad (B.1.1), para cada  $0 \leq k \leq d-1$  se tiene

$$0 \leq |a_k(x_0)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \{a_k(x_m)\} \right| \leq \binom{d}{k} M^k \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \{a_d(x_m)\} \right| = \binom{d}{k} M^k |a_d(x_0)| = 0,$$

luego  $a_k(x_0) = 0$  para cada  $0 \leq k \leq d$ , es decir,  $\sum_{k=0}^d a_k(x_0)t^k \equiv 0$ . En consecuencia,

$$\{x_0\} \times \mathbb{C} = \pi^{-1}(x_0) \subset \pi^{-1}(K) \subset K \times \mathcal{B}_2(\mathbf{0}, M),$$

y esto es falso.

Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{Z}_\Omega(a_d) = \emptyset$  y sea  $K \subset \Omega$  un subconjunto compacto. Las funciones  $|a_k/a_d| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, y por tanto sus restricciones a  $K$  son acotadas superiormente, digamos por un número real  $M > 0$ . Sea ahora  $(x, t) \in \pi^{-1}(K)$ ; observamos que  $\sum_{k=0}^d a_k(x)t^k = 0$ , lo que implica que  $t = -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k(x)}{a_d(x)} t^{k+1-d}$ . En particular, si  $|t| \geq 1$  se cumple que

$$|t| = \left| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k(x)}{a_d(x)} t^{k+1-d} \right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} \left| \frac{a_k(x)}{a_d(x)} \right| |t|^{k+1-d} \leq \sum_{k=0}^{d-1} M = Md.$$

Esto implica que  $\pi^{-1}(K)$  es compacto, luego  $\pi$  es una aplicación propia, pues es cerrado y también acotado, ya que  $\pi^{-1}(K) \subset K \times \mathcal{B}_2(\mathbf{0}, N)$ , donde  $N := \max\{1, Md\}$ .  $\square$

**Lema B.1.3** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas entre espacios topológicos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Se cumple que

- (i) Si  $Y$  es Hausdorff y  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es propia, entonces  $f$  es propia.
- (ii) Si  $f$  es propia y sobreyectiva y  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es propia, entonces  $g$  es propia.
- (iii) Si  $f$  y  $g$  son propias, entonces  $g \circ f$  es propia.

*Demostración.* (i) Para cada subconjunto compacto  $K$  de  $Y$  su imagen  $g(K)$  es compacto pues  $g$  es continua. En consecuencia  $(g \circ f)^{-1}(g(K))$  es compacto porque  $g \circ f$  es propia. Como  $Y$  es Hausdorff y  $K$  es compacto también es un subconjunto cerrado de  $Y$ , luego  $f^{-1}(K)$  es cerrado en  $X$  por la continuidad de  $f$ . De hecho es también compacto, ya que es un subconjunto cerrado de uno compacto: como  $K \subset g^{-1}(g(K))$  se tiene

$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}(g^{-1}(g(K))) = (g \circ f)^{-1}(g(K)).$$

(ii) Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $Z$ ; entonces  $f^{-1}(g^{-1}(K)) = (g \circ f)^{-1}(K)$  es compacto porque la aplicación  $g \circ f$  es propia. Como  $f$  es continua y sobreyectiva, también  $g^{-1}(K) = f(f^{-1}(g^{-1}(K)))$  es compacto, y concluimos que  $g$  es propia.

(iii) Dado un subconjunto compacto  $K$  de  $Z$  su preimagen  $g^{-1}(K)$  es compacto porque  $g$  es propia. Por ser  $f$  propia,  $f^{-1}(g^{-1}(K))$  es también compacto, y de la igualdad  $(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K))$  se deduce que  $g \circ f$  es propia.  $\square$

Recordemos los siguientes enunciados sobre homomorfismos finitos entre anillos conmutativos con elemento unidad cuyas demostraciones se encuentran, por ejemplo, en [AM, §5].

**Lema B.1.4** Sean  $A \subset B$  una extensión de anillos y  $b \in B$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El elemento  $b$  es entero sobre  $A$ .
- (ii) El anillo  $A[b]$  es un  $A$ -módulo finitamente generado.
- (iii) El anillo  $A[b]$  está contenido en un subanillo  $C \subset B$  que es un  $A$ -módulo finitamente generado.

**Lema B.1.5** Sea  $A \subset B$  una extensión de anillos. Se cumple que:

- (i) Si  $b_1, \dots, b_r \in B$  son elementos enteros sobre  $A$ , entonces todos los elementos del anillo  $A[b_1, \dots, b_r]$  son enteros sobre  $A$ .
- (ii) El conjunto  $C$  formado por los elementos de  $B$  que son enteros sobre  $A$  es un subanillo de  $B$  llamado clausura entera de  $A$  en  $B$ .

**Lema B.1.6** Dados anillos  $A \subset B \subset C$ , las extensiones  $A \subset B$  y  $B \subset C$  son enteras si y sólo si la extensión  $A \subset C$  es entera.

**Definición y Observaciones B.1.7** (1) Recordemos que un conjunto  $T \subset \mathbb{C}^n$  es *localmente cerrado con respecto a la topología de Zariski* de  $\mathbb{C}^n$  si existen subconjuntos algebraicos  $Z_1$  y  $Z_2$  de  $\mathbb{C}^n$  tales que  $T = Z_1 \cap (\mathbb{C}^n \setminus Z_2)$ , esto es,  $T$  es la intersección de un subconjunto abierto y otro cerrado en la topología de Zariski de  $\mathbb{C}^n$ .

(2) Un subconjunto  $S \subset \mathbb{C}^n$  es *constructible* si es unión finita de subconjuntos localmente cerrados con respecto a la topología de Zariski de  $\mathbb{C}^n$ . Así, un subconjunto constructible de  $\mathbb{C}^n$  que es cerrado en la topología usual de  $\mathbb{C}^n$  es un subconjunto algebraico de  $\mathbb{C}^n$ .

(3) El Teorema de Chevalley (véase [Mu, 2.13]), que es el teorema de eliminación de cuantificadores para cuerpos algebraicamente cerrados, afirma que dados enteros positivos  $m$  y  $n$  y un conjunto constructible  $S$  de  $\mathbb{C}^{m+n}$ , la imagen  $\pi(S) \subset \mathbb{C}^m$  de  $S$  por la proyección lineal

$$\pi : \mathbb{C}^{m+n} \rightarrow \mathbb{C}^m, x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \rightarrow (x_1, \dots, x_m)$$

es un subconjunto constructible de  $\mathbb{C}^m$ .

Por consiguiente, dados un subconjunto constructible  $S \subset \mathbb{C}^m$  y una aplicación polinómica  $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ , su imagen  $f(S)$  es un subconjunto constructible de  $\mathbb{C}^n$ , ya que  $f(S) = \pi(\mathfrak{G}_f)$ , donde el grafo  $\mathfrak{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{C}^{n+m} : x \in \mathbb{C}^m\}$  de  $f$  es un subconjunto algebraico, y por tanto constructible, de  $\mathbb{C}^{m+n}$ .

(4) Sean  $X \subset \mathbb{C}^m$  e  $Y \subset \mathbb{C}^n$  variedades algebraicas afines y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia respecto de la topología usual de  $X$  e  $Y$ . Como  $f$  es una aplicación cerrada respecto de la topología usual, su imagen  $Z := f(X)$  es constructible y cerrado en la topología usual de  $Y$ , luego  $Z$  es un subconjunto algebraico de  $Y$ . De hecho  $Z$  es una variedad algebraica afín, esto es, un subconjunto algebraico irreducible de  $\mathbb{C}^n$  o, lo que es lo mismo, su anillo de coordenadas  $\Gamma[Z]$  es un dominio de integridad. En efecto, dados  $g, h \in \Gamma[Z] \setminus \{0\}$  las composiciones  $g_1 = g \circ f \in \Gamma[X]$  y  $h_1 = h \circ f \in \Gamma[X]$  son no nulos. Como el anillo de coordenadas  $\Gamma[X]$  es un dominio, el producto  $g_1 h_1 \neq 0$ . Existe por tanto un punto  $x \in X$  tal que  $g_1(x)h_1(x) \neq 0$ , por lo que  $z = f(x) \in Z$  cumple que  $g(z)h(z) \neq 0$ .

Otro ingrediente fundamental en la prueba de la Proposición B.1.1 es el Lema de Normalización de Noether, cuyo enunciado recordamos a continuación.

**Lema B.1.8 (Lema de Normalización de Noether)** Sean  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y  $X \subset \mathbb{K}^n$  una variedad algebraica afín de dimensión  $d$ . Entonces, existe una aplicación lineal  $\pi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^d$  cuya restricción  $\pi|_X : X \rightarrow \mathbb{K}^d$  es un morfismo finito.

Ya estamos preparados para demostrar la Proposición B.1.1.

*Demostración de la Proposición B.1.1.* Desarrollamos la demostración de este resultado en dos pasos.

**Paso 1. Preparación inicial.** En primer lugar, consideramos el grafo

$$\mathfrak{G}_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y \subset \mathbb{C}^{n+m},$$

que es una variedad algebraica afín de  $\mathbb{C}^{n+m}$ . La proyección  $\pi_1 : \mathfrak{G}_f \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$  es una aplicación polinómica cuya inversa es la aplicación polinómica  $\phi : X \rightarrow \mathfrak{G}_f$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ , que por tanto es homeomorfismo. Como las composiciones  $\pi_1 \circ \phi$  y  $\phi \circ \pi_1$  son la identidad de los espacios correspondientes, los homomorfismos de anillos  $\pi_1^*$  y  $\phi^*$  inducidos por  $\pi_1$  y  $\phi$  son mutuamente inversos. En particular  $\pi_1^* : \Gamma[X] \rightarrow \Gamma[\mathfrak{G}_f]$ ,  $g \mapsto g \circ \pi_1$  es un isomorfismo de anillos cuyo inverso es  $\phi^* : \Gamma[\mathfrak{G}_f] \rightarrow \Gamma[X]$ ,  $h \mapsto h \circ \phi$ .

Además, la proyección  $\pi_2 : \mathfrak{G}_f \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto y$  sobre el segundo factor cumple que  $\pi_2 \circ \phi = f$ . Esta igualdad, junto con el hecho de que  $\phi : X \rightarrow \mathfrak{G}_f$  es un homeomorfismo, muestra que  $f$  es propia si y sólo si  $\pi_2$  es propia. Además,  $f^* = \phi^* \circ \pi_2^*$  y, como  $\phi^*$  es isomorfismo,  $f$  es un morfismo finito si y sólo si lo es  $\pi_2$ . Por tanto, reemplazando  $f$  por  $\pi_2$ , podemos suponer desde el principio que  $f : X \rightarrow Y$  es la restricción a  $X$  de una proyección lineal.

Denotemos  $Z := \overline{\text{Cl}^{\text{zar}}(\text{Im } f)} \subset Y$ , que es un subconjunto cerrado de  $Y$  en la topología usual, y denotemos  $\bar{f} : X \rightarrow Z$ ,  $x \mapsto f(x)$  la única aplicación que cumple la igualdad  $f = j \circ \bar{f}$ , donde  $j : Z \hookrightarrow Y$  es la inclusión. Se deduce del Lema B.1.3 que  $f$  es propia si y sólo si  $\bar{f}$  lo es, una vez que comprobemos que la inclusión  $j : Z \hookrightarrow Y$  es propia. Pero esto es evidente porque para cada compacto  $K \subset Y$  su imagen inversa  $j^{-1}(K) = K \cap Z$  es cerrado en el compacto  $K$ , ya que  $Z$  es un subconjunto cerrado de  $Y$ , luego  $j^{-1}(K)$  es compacto.

Por otro lado, de la igualdad  $f = j \circ \bar{f}$  se desprende que  $f^* = \bar{f}^* \circ j^*$  y, además, el homomorfismo de anillos  $j^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[Z]$  es sobreyectivo. Por tanto,

$$f^*(\Gamma[Y]) = (\bar{f})^*(j^*(\Gamma[Y])) = (\bar{f})^*(\Gamma[Z]),$$

luego el homomorfismo  $f^* : \Gamma[Y] \rightarrow \Gamma[X]$  es finito si y sólo si lo es  $\bar{f}^* : \Gamma[Z] \rightarrow \Gamma[X]$ . Por tanto, reemplazando  $Y$  por  $Z$ , supondremos en lo sucesivo que la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es dominante y  $f = \pi_3|_X$  es la restricción a  $X$  de la proyección

$$\pi_3 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x' = (x_1, \dots, x_m). \tag{B.1.2}$$

Veamos ahora que todo se reduce a probar el siguiente enunciado.

(B.1.1.3) *Sea  $Z \subset \mathbb{C}^n$  una variedad algebraica afín compleja y supongamos que la restricción  $\rho := \pi|_Z : Z \rightarrow \mathbb{C}^d$  de la proyección*

$$\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^d, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$$

*sobre las  $d$  primeras coordenadas es una aplicación dominante. Entonces, la aplicación  $\rho$  es propia si y sólo si el homomorfismo de anillos  $\rho^* : \mathbb{C}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d] \hookrightarrow \Gamma[Z]$  es finito.*

Supongamos probado B.1.1.3 por un momento y vamos a emplearlo para demostrar la Proposición B.1.1. Ya hemos señalado en (B.1.2) que podemos suponer que  $f$  es dominante y restricción de la proyección sobre las primeras  $m$  coordenadas.

Por el Lema de Normalización de Noether B.1.8 podemos suponer, tras un cambio lineal de coordenadas en  $\mathbb{C}^m$ , que la restricción  $\eta := \pi_4|_Y : Y \rightarrow \mathbb{C}^d$  de la proyección

$$\pi_4 : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^d, (y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_d),$$

donde  $d$  es la dimensión de  $Y$ , es un morfismo finito. Por supuesto, este cambio lineal de coordenadas, que es un homeomorfismo polinómico e induce un automorfismo en  $\Gamma[Y]$ , no afecta a lo que tenemos que probar.

Como estamos suponiendo B.1.1.3 ya probado, la aplicación  $\eta : Y \rightarrow \mathbb{C}^d$  es propia, y consideramos la composición  $\eta \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}^d$ , que es la restricción a  $X$  de la proyección  $\pi$ . Por el Lema B.1.3,  $f$  es propia si y sólo si  $\eta \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}^d$  es propia. Por otro lado, como el homomorfismo  $\eta^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow \Gamma[Y]$  es finito, se deduce del Lema B.1.6 que el homomorfismo

$$(\eta \circ f)^* = f^* \circ \eta^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow \Gamma[Y] \hookrightarrow \Gamma[X]$$

es finito si y sólo si  $f^* : \Gamma[Y] \hookrightarrow \Gamma[X]$  lo es. Por tanto, demostrar la Proposición B.1.1 es equivalente a probar la Reducción B.1.1.3.

**Paso 2. Demostración de la Reducción B.1.1.3.** Denotamos  $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  y suponemos primero que el homomorfismo

$$\rho^* : A \hookrightarrow \Gamma[Z] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}(Z)$$

es finito, donde  $\mathcal{J}(Z) = \{P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : Z \subset \mathcal{Z}(P)\}$ . Entonces, existen polinomios mónicos  $P_{d+1}, \dots, P_n \in A[t]$  tales que  $P_i(x_i) \in \mathcal{J}(Z)$  para cada  $d+1 \leq i \leq n$ . Para cada uno de estos índices consideramos el conjunto

$$S_i := \{(x', x_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C} : P_i(x', x_i) = 0\}.$$

Por el Lema B.1.2 la proyección  $\theta_i : S_i \rightarrow \mathbb{C}^d, (x', x_i) \mapsto x'$  es propia, ya que  $P_i$  es mónico. Veamos que también  $\rho : Z \rightarrow \mathbb{C}^d$  es propia. Dado un subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{C}^d$  cada preimagen  $\theta_i^{-1}(K)$  es un conjunto compacto, y por tanto existe  $M > 0$  tal que

$$\theta_i^{-1}(K) = \{(x', x_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C} : x' \in K, P_i(x', x_i) = 0\} \subset K \times [-M, M]$$

para todo índice  $d+1 \leq i \leq n$ . Además, como  $P_i(x_i) \in \mathcal{J}(Z)$ ,

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(K) &\subset \{(x', x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x' \in K, P_i(x', x_i) = 0 \ \forall i = d+1, \dots, n\} \\ &\subset K \times [-M, M]^{n-d}, \end{aligned}$$

así que  $\rho^{-1}(K)$  es acotado, luego compacto. Esto prueba que  $\rho$  es propia.

Supongamos, recíprocamente, que  $\rho$  es propia y veamos que el homomorfismo de anillos  $\rho^* : A \hookrightarrow \Gamma[Z]$  es finito. En primer lugar, como  $\rho$  es propia y dominante se deduce de



**B.1.7** (4) que  $\rho$  es sobreyectiva y  $Z$  es irreducible, esto es, una variedad algebraica afín compleja. Denotamos  $\Gamma(Z)$  el cuerpo de funciones racionales sobre  $Z$ , es decir, el cuerpo de fracciones del anillo de coordenadas  $\Gamma[Z]$ . Al ser  $\rho$  propia, sus fibras son compactas, luego finitas, pues los subconjuntos algebraicos afines complejos de dimensión  $\geq 1$  no son compactos. Por tanto  $\dim(Z) = d$  y se desprende del Lema de Normalización de Noether que el grado de trascendencia de  $\Gamma(Z)$  sobre  $\mathbb{C}$  es  $d$ . De este modo, si denotamos por  $\mathbb{F}$  el cuerpo de fracciones de  $A$ , se tiene

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{F} \subset \Gamma(Z) \text{ y } \text{tr. deg}(\Gamma(Z)|\mathbb{F}) = \text{tr. deg}(\Gamma(Z)|\mathbb{C}) - \text{tr. deg}(\mathbb{F}|\mathbb{C}) = 0,$$

por lo que la extensión de cuerpos  $\Gamma(Z)|\mathbb{F}$  es algebraica. Además es finitamente generada, pues si  $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i + \mathcal{J}(Z)$  se tiene  $\Gamma(Z) = \mathbb{F}(\mathbf{u}_{d+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$ . Sea  $Q_i \in A[\mathbf{t}]$  un polinomio irreducible de grado mínimo tal que  $Q_i(\mathbf{u}_i) = 0$ , es decir,  $Q_i(\mathbf{x}', \mathbf{x}_i) \in \mathcal{J}(Z)$ .

Como  $\Gamma[Z] = \rho^*(A)[\mathbf{u}_{d+1}, \dots, \mathbf{u}_n]$ , para demostrar que el homomorfismo  $\rho^*$  es finito es suficiente probar, por **B.1.5**, que  $\mathbf{u}_i$  es entero sobre  $\rho^*(A)$  para cada  $d+1 \leq i \leq n$ . Para ello basta comprobar que los coeficientes principales de los polinomios  $Q_i \in A[\mathbf{t}]$  pertenecen a  $\mathbb{C}$  para  $d+1 \leq i \leq n$ . Fijamos pues un índice  $i \in \{d+1, \dots, n\}$  y escribimos

$$Q_i(\mathbf{t}) := \sum_{k=0}^s a_k(\mathbf{x}') \mathbf{t}^k \in A[\mathbf{t}], \text{ donde } \mathbf{x}' := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) \text{ y } a_s(\mathbf{x}') \neq 0.$$

Se trata de probar que  $a_s \in \mathbb{C}$ . Para ello, consideramos el conjunto

$$C := \{(\rho(x), x_i) = (x', x_i) : x \in Z\} \subset \mathbb{C}^{d+1},$$

su clausura  $T := \text{Cl}^{\text{zar}}(C)$  en la topología de Zariski de  $\mathbb{C}^{d+1}$  y las proyecciones

$$\theta : Z \rightarrow T, x \mapsto (\rho(x), x_i) \quad \text{y} \quad \tau : T \rightarrow \mathbb{C}^d, (x', x_i) \mapsto x',$$

que cumplen  $\tau \circ \theta = \rho$ . Veamos que  $\theta$  es propia. Sean  $K$  un subconjunto compacto de  $T$  y  $K' := \tau(K)$ , que también es compacto. Como  $\rho$  es propia la preimagen  $\rho^{-1}(K')$  es compacta. Ahora bien, observamos que

$$\theta^{-1}(K) = \{x \in Z : (x', x_i) = (\rho(x), x_i) \in K\} \subset \{x \in Z : \rho(x) = x' \in K'\} = \rho^{-1}(K'),$$

y por tanto  $\theta^{-1}(K)$  es un subconjunto cerrado de uno compacto, luego es también compacto, lo que demuestra que  $\theta$  es propia. Esto implica, por **B.1.7** (4) que  $T = \theta(Z)$ , esto es,  $\theta$  es propia y sobreyectiva. Como también  $\rho = \tau \circ \theta$  es propia, se deduce del Lema **B.1.3** (ii) que la proyección  $\tau$  es propia.

Por otra parte, como el polinomio  $Q_i$  es irreducible en el anillo  $A[\mathbf{t}]$ , el conjunto algebraico afín complejo  $d$ -dimensional

$$S := \{(x', x_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C} : Q_i(x', x_i) = 0\}$$

es irreducible y contiene a  $T$ , que también tiene dimensión  $d$  y es irreducible por B.1.7 (4). Por tanto  $S = T$  y la aplicación

$$\tau : S = \left\{ (x', x_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C} : \sum_{k=0}^s a_k(x') x_i^k = 0 \right\} \rightarrow \mathbb{C}^d, (x', x_i) \rightarrow x_i$$

es propia, lo que por el Lema B.1.2 implica que el polinomio  $a_s$  no se anula en ningún punto de  $\mathbb{C}^d$ , luego es constante, como queríamos demostrar.  $\square$

Recordamos ahora que si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación regular dominante entre variedades algebraicas afines o proyectivas,  $\mu(f)$  denota la multiplicidad de  $f$ , y si  $x \in X$  es un punto tal que  $\{x\}$  es una componente conexa de  $f^{-1}(f(x))$ , entonces  $\mu_x(f)$  denota la multiplicidad de  $f$  en  $x$ ; para más detalles véanse las Definiciones I.2.6 y las Observaciones I.2.7. En términos de estas nociones se tiene la siguiente caracterización del conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos donde una aplicación polinómica dominante  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  es propia.

**Proposición B.1.9** *Sean  $X$  e  $Y$  variedades algebraicas afines complejas de la misma dimensión tales que  $Y$  es normal y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación regular dominante. Entonces  $f$  es propia en un punto  $y \in Y$  si y sólo si la fibra  $f^{-1}(y)$  es finita y no vacía, y  $\mu(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f)$ .*

*Demostración.* Vimos en I.2.6 que existe un subconjunto algebraico  $Z \subset Y$  cuya dimensión es menor que  $\dim(Y)$  tal que la restricción

$$f|_{X \setminus f^{-1}(Z)} : X \setminus f^{-1}(Z) \rightarrow Y \setminus Z$$

es una cubierta, es decir, una aplicación propia y sobreyectiva que es homeomorfismo local, y cuyas fibras son finitas. Además, como  $Y$  es irreducible y  $\dim(Z) < \dim(Y)$ , la diferencia  $Y \setminus Z$  es un subconjunto conexo y denso en  $Y$ .

Sea  $y \in Y$  un punto en el que  $f$  es propia y veamos en primer lugar que la fibra  $f^{-1}(y)$  no es vacía. Como  $y \in \text{Cl}_Y(Y \setminus Z)$  existe una sucesión  $\{v_k\}_k \subset Y \setminus Z$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{v_k\} = y$ . Pero  $Y \setminus Z = f(X \setminus f^{-1}(Z))$ , luego para cada índice  $k$  existe  $u_k \in X \setminus f^{-1}(Z)$  tal que  $f(u_k) = v_k$ . Como  $f$  es propia en  $y$  y el conjunto  $K := \{v_k\}_k \cup \{y\}$  es compacto, también lo es  $f^{-1}(K)$ , luego la sucesión  $\{u_k\}_k$  admite una subsucesión convergente, que podemos suponer es ella misma. Si  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} \{u_k\}$ , y puesto que  $f$  es continua, resulta que

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \{u_k\}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \{f(u_k)\}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \{v_k\}_k = y,$$

es decir,  $x \in f^{-1}(y)$ .

Por otra parte, como  $f$  es propia en  $y$ , la fibra  $f^{-1}(y)$  es un conjunto algebraico afín complejo y compacto, luego finito. En consecuencia, para terminar la prueba de esta implicación sólo falta comprobar que  $\mu(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f)$ . La desigualdad  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f) \leq \mu(f)$

se cumple siempre y suponemos, por reducción al absurdo, que  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f) < \mu(f)$ . Por consiguiente, en virtud de I.2.6, y como  $Y \setminus Z$  es denso en  $Y$ , existen un entorno abierto  $V$  de  $f^{-1}(y)$  en  $X$  y una sucesión  $\{u'_k\}_k \subset (X \setminus f^{-1}(Z)) \setminus V$  tal que la sucesión  $\{v'_k := f(u'_k)\}_k$  converge a  $y$ . Como  $f$  es propia en  $y$ , entonces  $f^{-1}(\{v'_k\}_k \cup \{y\})$  es compacto y por tanto, tras sustituirla por una subsucesión si es preciso, podemos suponer que la sucesión  $\{u'_k\}_k$  converge a un punto  $x' \in X$ . Por la continuidad de  $f$  se tiene  $f(x') = y$ , esto es,  $x' \in f^{-1}(y)$  y, sin embargo,  $x' \notin V$ , lo que es una contradicción.

Veamos a continuación el recíproco. Sea  $y \in Y$  tal que la fibra  $f^{-1}(y) := \{x_1, \dots, x_r\}$  es finita y no vacía, y  $\mu(f) = \sum_{i=1}^r \mu_{x_i}(f)$ . Para cada  $1 \leq i \leq r$  sean  $V_i$  un entorno abierto de  $x_i$  con clausura compacta  $K_i := \text{Cl}(V_i)$  y  $W_i$  un entorno abierto de  $y$  tales que  $f|_{V_i \setminus f^{-1}(Z)} : V_i \setminus f^{-1}(Z) \rightarrow W_i \setminus Z$  es una cubierta,  $W_i \setminus Z$  es conexo y  $f^{-1}(y) \cap W_i = \{x_i\}$ ; por I.2.6 sabemos que el cardinal de cualquier fibra de  $f|_{V_i \setminus f^{-1}(Z)}$  coincide con  $\mu_{x_i}(f)$ .

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $f$  no es propia en  $y$ , lo que implica que existe una sucesión  $\{\xi_k\}_k \subset X$  tal que  $\|\xi_k\| > k$  para  $k \geq 1$  y  $\{f(\xi_k)\}_k$  converge a  $y$ . Como  $f$  es continua y  $X \setminus f^{-1}(Z)$  es denso en  $X$ , podemos suponer que la sucesión  $\{\xi_k\}_k$  está contenida en  $X \setminus f^{-1}(Z)$ . Como el conjunto compacto  $K := \bigcup_{i=1}^r K_i$  es acotado existe  $m \geq 1$  tal que  $\xi_k \notin K$  para cada  $k \geq m$ , y denotamos  $W := \bigcap_{i=1}^r W_i$ . Se cumple que

$$f|_{f^{-1}(W \setminus Z)} : f^{-1}(W \setminus Z) \rightarrow W \setminus Z$$

es una cubierta. Por la elección de los conjuntos  $V_i$  y  $W_i$ , y dado que  $\mu(f) = \sum_{i=1}^r \mu_{x_i}(f)$ , se tiene  $f^{-1}(W \setminus Z) \subset K$ . Sin embargo, para  $k$  suficientemente grande  $f(\xi_k) \in W \setminus Z$ , pero  $\xi_k \notin K$ , que es una contradicción. Por tanto,  $f$  es propia en  $y$ .  $\square$

## B.2. El teorema de Perron

El objetivo de esta sección es demostrar un teorema clásico de O. Perron, que demostramos aquí siguiendo la estrategia desarrollada en [P2] y que será de gran utilidad en la segunda parte de la siguiente sección. Antes de ello, recordamos el concepto de *peso con ponderación*. Para evitar equívocos notacionales denotaremos  $\mathbb{N}$  al conjunto de los números enteros positivos y  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definiciones y Notaciones B.2.1** (i) Sean  $L$  un cuerpo,  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$  una  $n$ -tupla de números enteros positivos y  $a \in L \setminus \{0\}$ . Se llama *peso con ponderación  $\beta$  del monomio*

$$m(\mathbf{x}) := a\mathbf{x}_1^{\beta_1} \cdots \mathbf{x}_n^{\beta_n} \in L[\mathbf{x}] := L[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$$

al número entero  $w_\beta(m) := \sum_{i=1}^n \beta_i \nu_i = \langle \beta, \nu \rangle$ .

(ii) Se define el *peso con ponderación  $\beta$  del polinomio nulo* como  $w_\beta(0) = -\infty$ , y el *peso con ponderación  $\beta$  del polinomio no nulo*  $p(\mathbf{x}) \in L[\mathbf{x}]$  como el máximo  $w_\beta(p)$  de los

pesos con ponderación  $\beta$  de los monomios de  $p$ . Nótese que el peso con ponderación  $w_\beta(p)$  queda determinado por los valores  $w_\beta(\mathbf{x}_i)$ . Si  $a_\nu \in L \setminus \{0\}$  y denotamos

$$\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^\nu := \mathbf{x}_1^{\nu_1} \cdots \mathbf{x}_n^{\nu_n},$$

el grado del monomio  $a_\nu \mathbf{x}^\nu$  es  $\deg(a_\nu \mathbf{x}^\nu) = |\nu|$ . El grado de un polinomio no nulo es el máximo de los grados de sus monomios. Cada polinomio no nulo  $p \in L[\mathbf{x}]$  de grado  $d$  se escribe, de modo único, como suma de monomios

$$p(\mathbf{x}) := \sum_{|\nu| \leq d} a_\nu \mathbf{x}^\nu, \quad \text{donde existe algún } \nu \in \mathbb{N}_0^n \text{ tal que } |\nu| = d \text{ y } a_\nu \neq 0.$$

(iii) Veamos que si  $p \in L[\mathbf{x}]$  es un polinomio no nulo, entonces  $\deg(p) \min\{\beta_i\} \leq w_\beta(p)$ . En efecto, sea  $a_\nu \mathbf{x}^\nu$  el monomio de  $p$  cuyo peso con ponderación  $\beta$  es máximo entre los monomios de  $p$  y sea  $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $a_\mu \mathbf{x}^\mu$  es un monomio de  $p$  de grado  $\deg(p)$ . Como  $w_\beta(\mathbf{x}^\nu) \geq w_\beta(\mathbf{x}^\mu)$  se tiene

$$\begin{aligned} \deg(p) \min\{\beta_i\} &= |\mu| \min\{\beta_i\} = (\mu_1 + \dots + \mu_n) \min\{\beta_i\} \\ &\leq \beta_1 \mu_1 + \dots + \beta_n \mu_n = w_\beta(a_\mu \mathbf{x}^\mu) \leq w_\beta(a_\nu \mathbf{x}^\nu) = w_\beta(p). \end{aligned}$$

(iv) Dadas  $m$ -tuplas  $f := (f_1, \dots, f_m)$ , donde  $f_i \in L[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  y  $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}_0^m$  denotamos  $f^\nu = f_1^{\nu_1} \cdots f_m^{\nu_m} \in L[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

**Teorema B.2.2 (de Perron)** Sean  $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  polinomios de grado positivo. Denotamos  $\beta := (\deg(f_1), \dots, \deg(f_{n+1})) \in \mathbb{N}^{n+1}$  y sea  $w_\beta$  el peso en  $\mathbb{C}[\mathbf{y}] := \mathbb{C}[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n+1}]$  con ponderación  $\beta$ . Entonces, existe un polinomio no nulo  $p \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$  tal que

$$p(f_1, \dots, f_{n+1}) = 0 \quad \text{y} \quad w_\beta(p) \leq \prod_{i=1}^{n+1} \deg(f_i).$$

Para demostrar este teorema necesitamos algunos resultados previos.

**Lema B.2.3** Sean  $L|\mathbb{Q}$  una extensión de cuerpos y  $f_1, \dots, f_n \in L[\mathbf{x}] := L[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  polinomios tales que cada  $f_i := \sum_{0 \leq |\nu| \leq d_i} c_{i,\nu} \mathbf{x}^\nu$  tiene grado  $d_i \geq 1$  y el conjunto de sus coeficientes

$$\mathfrak{F} := \{c_{i,\nu} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq |\nu| \leq d_i\}$$

es algebraicamente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ . Denotamos  $f := (f_1, \dots, f_n)$  y  $\beta := (d_1, \dots, d_n)$ . Entonces, para todo  $g \in L[\mathbf{x}]$ , existen polinomios  $g_\nu \in L[\mathbf{y}] := L[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ , donde cada  $0 \leq \nu_i < d_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , tales que

$$g = \sum_{0 \leq \nu_i < d_i} g_\nu(f) \mathbf{x}^\nu \quad \text{y} \quad w_\beta(g_\nu) + |\nu| \leq \deg(g)$$

para cada multiíndice  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$  que cumple  $0 \leq \nu_i < d_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.* Consideremos, para cada  $N \geq 1$ , el conjunto

$$\mathcal{N}_N := \{(\alpha, \nu) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n : \langle \alpha, \beta \rangle + |\nu| \leq N, 0 \leq \nu_i < d_i\}$$

y comprobemos en primer lugar que el conjunto  $\mathcal{B}_N := \{f^{\alpha} \mathbf{x}^{\nu} : (\alpha, \nu) \in \mathcal{N}_N\}$  es una base del  $L$ -espacio vectorial  $L[\mathbf{x}]_N := \{g \in L[\mathbf{x}] : \deg(g) \leq N\}$ . En efecto, consideramos  $\mathcal{L}_N := \{\ell \in \mathbb{N}_0^n : |\ell| \leq N\}$  y observamos que la aplicación

$$\Lambda : \mathcal{N}_N \rightarrow \mathcal{L}_N, (\alpha, \nu) \mapsto (\alpha_1 d_1, \dots, \alpha_n d_n) + \nu$$

es biyectiva. Para probarlo construimos su inversa como sigue. Dado  $\ell \in \mathcal{L}_N$  dividimos por defecto la componente  $i$ -ésima  $\ell_i$  de  $\ell$  entre  $d_i$ , por lo que existe un cociente  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  y un resto  $\nu_i \in \mathbb{N}_0$ , donde  $0 \leq \nu_i < d_i$ , tales que  $\ell_i = \alpha_i d_i + \nu_i$ . Así, las  $n$ -tuplas

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \quad \text{y} \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

cumplen que  $(\alpha, \nu) \in \mathcal{N}_N$  y  $\Lambda(\alpha, \nu) = \ell$ , ya que

$$\langle \alpha, \beta \rangle + |\nu| = \sum_{i=1}^n (\alpha_i d_i + \nu_i) = \sum_{i=1}^n \ell_i = |\ell| \leq N, \text{ cada } 0 \leq \nu_i < d_i \text{ y}$$

$$\Lambda(\alpha, \nu) = (\alpha_1 d_1, \dots, \alpha_n d_n) + \nu = (\alpha_1 d_1 + \nu_1, \dots, \alpha_n d_n + \nu_n) = (\ell_1, \dots, \ell_n) = \ell.$$

Esto prueba la sobreyectividad de la aplicación  $\Lambda$ , mientras que la inyectividad es consecuencia de la unicidad del cociente y el resto de la división euclídea. Por tanto, si para cada  $\ell \in \mathcal{L}_N$  denotamos  $q_{\ell} := f^{\alpha} \mathbf{x}^{\nu}$ , donde  $(\alpha, \nu)$  es el único elemento de  $\mathcal{N}_N$  tal que  $\Lambda(\alpha, \nu) = \ell$ , podemos reescribir  $\mathcal{B}_N = \{q_{\ell} : \ell \in \mathcal{L}_N\}$ .

Empleamos esta presentación para demostrar que  $\mathcal{B}_N$  es una base de  $L[\mathbf{x}]_N$  como  $L$ -espacio vectorial. Observamos en primer lugar que  $q_{\ell} \in L_N[\mathbf{x}]$  para cada  $\ell \in \mathcal{L}_N$ , pues

$$\begin{aligned} \deg(q_{\ell}) &= \deg(f^{\alpha}) + |\nu| = \alpha_1 \deg(f_1) + \dots + \alpha_n \deg(f_n) + |\nu| \\ &= \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n + |\nu| = \langle \alpha, \beta \rangle + |\nu| \leq N. \end{aligned}$$

Además, el cardinal de  $\mathcal{B}_N$  coincide con el de la base estándar  $\mathcal{E}_N := \{\mathbf{x}^{\nu} : \nu \in \mathcal{L}_N\}$  del  $L$ -espacio vectorial  $L[\mathbf{x}]_N$ , luego para probar que  $\mathcal{B}_N$  es base de  $L[\mathbf{x}]_N$  es suficiente demostrar que el determinante  $\delta$  de la matriz cuadrada  $M$  cuyas columnas son las coordenadas respecto de la base  $\mathcal{E}_N$  de los vectores de  $\mathcal{B}_N$ , ordenando ambos conjuntos de vectores mediante el orden lexicográfico, es no nulo. Para probar esto empleamos el siguiente artificio.

Como  $\mathfrak{F}$  es algebraicamente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ , y denotando  $\mathbf{e}_i$  el  $i$ -ésimo vector de la base estándar de  $L^n$ , existe un único homomorfismo de  $\mathbb{Q}$ -álgebras

$$\phi : \mathbb{Q}[\mathfrak{F}][\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{Q}[\mathbf{x}], \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \phi(c_{i, d_i \mathbf{e}_i}) = 1, & \text{para todo } 1 \leq i \leq n \\ \phi(c_{i, \alpha}) = 0, & \text{si } \alpha \neq d_i \mathbf{e}_i, \\ \phi(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j & \text{para todo } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Nótese que  $f_i \in \mathbb{Q}[\mathfrak{F}][\mathbf{x}]$  y  $\phi(f_i) = \mathbf{x}_i^{d_i}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ ; por tanto, para cada  $\ell \in \mathcal{L}_N$ ,

$$\phi(q_\ell) = \phi(f^\alpha \mathbf{x}^\nu) = \prod_{i=1}^n \phi(f_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^n \phi(\mathbf{x}_i)^{\nu_i} = \prod_{i=1}^n \mathbf{x}_i^{\alpha_i d_i} \mathbf{x}_i^{\nu_i} = \prod_{i=1}^n \mathbf{x}_i^{\alpha_i d_i + \nu_i} = \prod_{i=1}^n \mathbf{x}_i^{\ell_i} = \mathbf{x}^\ell.$$

Como  $\phi(q_\ell) = \mathbf{x}^\ell = \phi(\mathbf{x}^\ell)$  se deduce que  $\phi(\delta) = 1$ , luego  $\delta \neq 0$ . Una vez demostrado que  $\mathcal{B}_N$  es base de  $L[\mathbf{x}]_N$ , dado  $g \in L[\mathbf{x}]$  fijamos  $N := \deg(g)$  y existen, por lo que acabamos de probar, escalares  $\lambda_\ell \in L$  tales que

$$g = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_N} \lambda_\ell q_\ell = \sum_{0 \leq \nu_i < d_i} \sum_{(\alpha, \nu) \in \mathcal{N}_N} \lambda_{\Lambda(\alpha, \nu)} f^\alpha \mathbf{x}^\nu.$$

Para cada multiíndice  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$  donde  $0 \leq \nu_i < d_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , definimos

$$g_\nu := \sum_{(\alpha, \nu) \in \mathcal{N}_N} \lambda_{\Lambda(\alpha, \nu)} \mathbf{y}^\alpha \in L[\mathbf{y}],$$

y observamos que  $g = \sum_{0 \leq \nu_i < d_i} g_\nu(f) \mathbf{x}^\nu$ . Además,

$$w_\beta(g_\nu) + |\nu| \leq \max\{\langle \alpha, \beta \rangle + |\nu| : (\alpha, \nu) \in \mathcal{N}_N\} = N = \deg(g),$$

con lo que concluye la prueba.  $\square$

**Lema B.2.4** *Mantenemos las hipótesis del Lema B.2.3 y sea  $d := \prod_{i=1}^n d_i$ . En particular, denotamos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  e  $\mathbf{y} := (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ . Entonces, dado un polinomio  $f_{n+1} \in L[\mathbf{x}]$  de grado  $d_{n+1} > 0$ , y denotando  $\beta = (d_1, \dots, d_{n+1})$ , existe un polinomio*

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{n+1}) := \mathbf{y}_{n+1}^d + \sum_{k=1}^d p_k(\mathbf{y}) \mathbf{y}_{n+1}^{d-k} \in L[\mathbf{y}][\mathbf{y}_{n+1}]$$

tal que  $p(f, f_{n+1}) = 0$  y  $w_\beta(p) \leq \prod_{i=1}^{n+1} d_i$ .

*Demostración.* Denotamos los monomios, ordenados lexicográficamente,

$$\{m_k\}_{0 \leq k < d} := \{\mathbf{x}^\nu : 0 \leq \nu_i < d_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Por el Lema anterior B.2.3 existen polinomios  $p_{ij} \in L[\mathbf{y}]$  que satisfacen las condiciones:

- (1)  $m_i f_{n+1} = \sum_{j=0}^{d-1} p_{ij}(f) m_j$  para todo  $0 \leq i \leq d-1$ ;
- (2)  $w_\beta(p_{ij}) + \deg(m_j) \leq \deg(m_i) + d_{n+1}$ .

Consideramos el sistema homogéneo de  $d$  ecuaciones lineales en las incógnitas  $\mathbf{m}_0, \dots, \mathbf{m}_{d-1}$

$$\sum_{j=0}^{d-1} (p_{ij}(f) - \delta_{ij} f_{n+1}) \mathbf{m}_j = 0,$$

donde  $0 \leq i \leq d-1$  y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, que tiene la solución no nula  $\mathbf{m}_i = m_i$  para  $0 \leq i \leq d-1$ . Por tanto, el determinante de la matriz de coeficientes de dicho sistema es idénticamente nulo, es decir,

$$\det(p_{ij}(f) - \delta_{ij} f_{n+1}) = 0.$$

En consecuencia, el polinomio

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{n+1}) := (-1)^d \det(p_{ij}(\mathbf{y}) - \delta_{ij} \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1}^d + \sum_{k=1}^d p_k(\mathbf{y}) \mathbf{y}_{n+1}^{d-k} \in L[\mathbf{y}][\mathbf{y}_{n+1}]$$

cumple que  $p(f, f_{n+1}) = 0$ , y vamos a estimar el peso  $w_\beta(p)$ . Para cada par de índices  $0 \leq i, j \leq d-1$  consideramos el polinomio  $\tilde{p}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{n+1}) := p_{ij}(\mathbf{y}) - \delta_{ij} \mathbf{y}_{n+1}$  cuyo peso, como consecuencia de la condición (2), cumple

$$w_\beta(\tilde{p}_{ij}) \leq d_{n+1} + \deg(m_i) - \deg(m_j).$$

Por tanto, si  $\mathcal{S}_d$  denota el grupo de permutaciones de los números  $0, 1, \dots, d-1$ , para cada  $\sigma \in \mathcal{S}_d$  se cumple que

$$w_\beta\left(\pm \prod_{s=0}^{d-1} \tilde{p}_{s, \sigma(s)}\right) = \sum_{s=0}^{d-1} w_\beta(\tilde{p}_{s, \sigma(s)}) \leq \sum_{s=0}^{d-1} (d_{n+1} + \deg(m_s) - \deg(m_{\sigma(s)})) = dd_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} d_i,$$

y en consecuencia,

$$w_\beta(p) = w_\beta\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_d} \pm \prod_{s=0}^{d-1} \tilde{p}_{s, \sigma(s)}\right) \leq \prod_{i=1}^{n+1} d_i,$$

como queríamos demostrar.  $\square$

*Demostración del Teorema B.2.2.* Escribimos  $f_i := \sum_{0 \leq |\nu| \leq d_i} c_{i, \nu} \mathbf{x}^\nu \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ , donde cada  $d_i := \deg(f_i) \geq 1$  y  $f := (f_1, \dots, f_{n+1})$ . Consideramos el conjunto

$$\Delta = \left\{ a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} a_i d_i \leq \prod_{i=1}^{n+1} d_i \right\}$$

y la familia  $\mathcal{F} := \{f^a : a \in \Delta\}$ . Para probar el Teorema de Perron basta ver (de hecho es equivalente a) que la familia  $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  es  $\mathbb{C}$ -linealmente dependiente. Si  $M(f)$  denota la matriz cuyas columnas son los coeficientes de los polinomios  $f^a \in \mathcal{F}$  respecto de la base

estándar  $\mathcal{E} := \{\mathbf{x}^\nu : \nu \in \mathbb{N}_0^n\}$  de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ , se trata de comprobar que el rango de  $M(f)$  es menor que el cardinal de  $\Delta$ . Consideremos nuevas indeterminadas sobre  $\mathbb{Q}$ , que denotamos

$$\mathcal{C} = \{c_{i,\nu} : 0 \leq |\nu| \leq d_i, 1 \leq i \leq n+1\},$$

el anillo de polinomios  $A = \mathbb{Q}[\mathcal{C}]$  y los polinomios

$$F_i := \sum_{0 \leq |\nu| \leq d_i} c_{i,\nu} \mathbf{x}^\nu \in A[\mathbf{x}], \text{ para } 1 \leq i \leq n+1.$$

Denotemos  $F := (F_1, \dots, F_{n+1})$ . Como los elementos de  $\mathcal{C}$  son algebraicamente independientes sobre  $\mathbb{Q}$  se deduce del Lema B.2.4 que el rango de la matriz  $M(F)$  que se obtiene a partir de  $M(f)$  sustituyendo cada  $c_{i\nu}$  por  $c_{i,\nu}$  es estrictamente menor que el cardinal  $\#\Delta$  de  $\Delta$ . Nótese que  $M(f) = M(\rho(F))$  donde  $\rho : A[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  es el único homomorfismo de anillos que cumple  $\rho(c_{i,\nu}) = c_{i,\nu}$  y  $\rho(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j$ . Como el rango de una matriz coincide con el orden del menor no nulo de dicha matriz de mayor orden, y los homomorfismos preservan determinantes, se tiene

$$\text{rk}(M(f)) = \text{rk}(M(\rho(F))) \leq \text{rk}(M(F)) < \#\Delta,$$

como queríamos demostrar. □

### B.3. Propiedades del conjunto $\mathcal{S}_f$ en el caso complejo.

Tras describir algunas propiedades de las aplicaciones propias, nuestro objetivo principal en esta sección consiste en describir el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos en los que una aplicación polinómica dominante  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia. Por la Proposición B.1.9 un punto  $y \in \mathbb{C}^n$  pertenece a  $\mathcal{S}_f$  si y sólo si su fibra  $f^{-1}(y)$  tiene dimensión  $\geq 1$  o  $f^{-1}(y)$  es finita y  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_x(f) < \mu(f)$ .

La anterior caracterización, de naturaleza “geométrica”, tiene una contrapartida “algebraica”, que presentamos a continuación. Denotamos  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$ , mientras que  $\mathbb{C}[f] := \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  es el menor subanillo de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  que contiene a  $\mathbb{C}$  y a los polinomios  $f_1, \dots, f_n$ . Denotamos  $\mathbb{C}(f)$  su cuerpo de fracciones y observamos que, como  $f$  es dominante, la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$  es finita.

**Proposición B.3.1** Sean  $f := (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación polinómica dominante y para cada polinomio  $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  elegimos un polinomio irreducible

$$P_h(\mathbf{t}) := \sum_{j=0}^{m_h} a_j^h(f) \mathbf{t}^j \in \mathbb{C}[f][\mathbf{t}],$$

donde cada  $a_j^h \in \mathbb{C}[\mathbf{y}]$  y  $a_{m_h}^h \neq 0$ , tal que  $P_h(h) = 0$ . Se cumple que:



(i) El conjunto  $\{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_h}^h(y) = 0\} \subset \mathcal{S}_f$  para cada  $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ .

(ii) Sean  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  tales que  $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_r]$ . Entonces, con las notaciones del apartado anterior,

$$\mathcal{S}_f = \bigcup_{i=1}^r \{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_{h_i}}^{h_i}(y) = 0\}.$$

(iii) El conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que  $f$  no es propia es vacío o una hipersuperficie.

(iv) Si  $\mathcal{S}_f$  no es vacío existe una forma lineal  $h := \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  que es un elemento primitivo de la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$  y para el que se cumple la igualdad

$$\mathcal{S}_f = \{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_h}^h(y) = 0\}.$$

*Demostración.* Los apartados (i) y (iii) son consecuencia inmediata de (ii). Para probar (ii) procedemos como sigue. Denotamos  $a := \prod_{i=1}^r a_{m_{h_i}}^{h_i}$  y  $S := \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^n}(a)$  y demostramos en primer lugar que si  $y \in \mathbb{C}^n \setminus S$ , entonces  $f$  es propia en  $y$ . Para esto es suficiente demostrar que la aplicación  $f : \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus S$  es propia.

Si  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces  $S$  es el conjunto vacío y la extensión  $\mathbb{C}[f] \subset \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  es entera, lo que por la Proposición B.1.1 implica que  $f$  es una aplicación propia. Suponemos en lo que sigue que  $a \notin \mathbb{C}$  y denotamos  $F = a \circ f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \setminus \mathbb{C}$ , por lo que  $S$  y  $f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{C}^n : F(x) = 0\}$  son hipersuperficies. Consideramos las variedades algebraicas afines

$$V := \{(x, v) \in \mathbb{C}^{n+1} : vF(x) = 1\} \quad y \quad W := \{(y, w) \in \mathbb{C}^{n+1} : wa(y) = 1\}$$

y la aplicación polinómica

$$\widehat{f} : V \rightarrow W, \quad (x, v) \mapsto (f(x), v).$$

Como las proyecciones

$$\pi_1 : V \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(S), \quad (x, v) \mapsto x \quad y \quad \pi_2 : W \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus S, \quad (y, w) \mapsto y$$

son homeomorfismos, para probar que  $f|_{\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(S)} : \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus S$  es propia basta demostrar que  $\widehat{f} : V \rightarrow W$  es propia, y será esto último lo que comprobemos. Para ello es suficiente, en virtud de la Proposición B.1.1, demostrar que  $\Gamma[V]$  es una extensión entera de  $\widehat{f}^*(\Gamma[W])$ . Ahora bien, se cumple que

$$\Gamma[V] \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}][1/F] = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_r][1/F] \quad y \quad \Gamma[W] \cong \mathbb{C}[\mathbf{y}][1/a], \quad (\text{B.3.1})$$

y de la última igualdad se sigue que  $\widehat{f}^*(\Gamma[W]) \cong \mathbb{C}[f][1/F]$ . Para cada  $1 \leq i \leq r$  denotamos  $F_i = a_{m_{h_i}}^{h_i} \circ f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \setminus \mathbb{C}$ , y observamos que  $F = F_1 \cdots F_r$ , es decir,

$$F_i \cdot \left(\frac{1}{F}\right) \prod_{j \neq i} F_j = 1, \quad 1 \leq i \leq r,$$

luego  $F_i$  es una unidad en el anillo  $\widehat{f^*}(\Gamma[W]) \cong \mathbb{C}[f][1/F]$ , lo que implica que cada  $h_i$  es entero sobre el anillo  $\widehat{f^*}(\Gamma[W])$ . Como consecuencia del Lema B.1.5 y la primera igualdad de (B.3.1), se deduce que  $\Gamma[V]$  es extensión entera de  $\widehat{f^*}(\Gamma[W])$ , como queríamos probar.

Veamos ahora, recíprocamente, que si la aplicación  $f$  es propia en un punto  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  entonces  $y_0 \notin S$ , es decir  $a(y_0) \neq 0$ . Para ello fijamos un índice  $1 \leq i \leq r$  y consideramos la aplicación polinómica  $g := (f, h_i) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ . La imagen de  $g$  está contenida en la hipersuperficie

$$T := \{(y, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : P_{h_i}(y, z) = 0\}$$

y, como  $f$  es dominante,  $g(\mathbb{C}^n)$  es un subconjunto denso en  $T$  con su topología usual. Como  $f$  es propia en  $y_0$  existe un entorno abierto  $U$  de  $y_0$  en  $\mathbb{C}^n$  cuya clausura  $K := \text{Cl}(U)$  es compacta tal que la restricción  $f|_{f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \rightarrow K$  es propia; en particular el conjunto  $C := f^{-1}(K)$  es compacto. Se cumple además que  $f = \pi \circ g$  donde  $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  es la proyección sobre el primer factor. Como  $C$  es compacto y  $f$  es dominante, y por tanto su imagen es densa en  $\mathbb{C}^n$ , deducimos que  $f(C) = f(f^{-1}(K)) = K$  y, puesto que  $f = \pi \circ g$ , se tiene

$$C = f^{-1}(K) = g^{-1}(\pi^{-1}(K)) = g^{-1}(K \times \mathbb{C}) = g^{-1}(T \cap (K \times \mathbb{C})). \quad (\text{B.3.2})$$

De nuevo por la compacidad de  $C$ , y puesto que  $g(\mathbb{C}^n)$  denso en  $T$ , se deduce de la igualdad B.3.2 que  $g(C) = T \cap (K \times \mathbb{C})$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & T \cap (K \times \mathbb{C}) & \\ g|_C \nearrow & & \downarrow \pi|_{T \cap (K \times \mathbb{C})} \\ C & \xrightarrow{f|_C} & K \end{array}$$

en el que las aplicaciones  $f|_C$  y  $g|_C$  son propias y sobreyectivas. Se deduce del Lema B.1.3 que  $\pi|_{T \cap (K \times \mathbb{C})}$  es propia y sobreyectiva, luego  $\pi|_{T \cap (U \times \mathbb{C})} : T \cap (U \times \mathbb{C}) \rightarrow U$  es también propia y sobreyectiva. Esto implica, por el Lema B.1.2, que  $\mathcal{Z}_U(a_{m_{h_i}}^{h_i}) = \emptyset$  y en particular  $a_{m_{h_i}}^{h_i}(y_0) \neq 0$ , lo que concluye la prueba del aserto (ii).

(iv) Consideramos el polinomio  $\eta_t(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k t^{k-1} \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, t]$  y, para cada  $t \in \mathbb{C}$ , denotamos

$$\eta_t := \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k t^{k-1} \in \mathbb{C}[\mathbf{x}].$$

Como  $f$  es dominante, la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$  es algebraica y finitamente generada, luego finita. Por tanto  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$  tiene un número finito de subextensiones y, en particular, el conjunto de subcuerpos  $\mathbb{C}(f)(\eta_t) \subset \mathbb{C}(\mathbf{x})$ , donde  $t \in \mathbb{C}$ , es finito. Así pues, existe un subconjunto infinito  $A \subset \mathbb{C}$  tal que  $\mathbb{C}(f)(\eta_t) = \mathbb{C}(f)(\eta_s)$  para cualesquiera

$s, t \in A$ . También es finita la familia de hipersuperficies

$$S_t := \{x \in \mathbb{C}^n : a_{m_{\eta_t}}^{\eta_t}(x) = 0\} \subset \mathcal{S}_f, \text{ donde } t \in \mathbb{C},$$

porque todas están contenidas en la hipersuperficie  $\mathcal{S}_f$ . Por tanto, existe un subconjunto infinito  $B \subset A$  tal que  $S_t = S_s$  para todo  $t, s \in B$ . Elegimos  $t_1, \dots, t_n \in B$  distintos. Escribimos en forma matricial las igualdades  $\eta_{t_j} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k t_j^{k-1}$ , esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{t_1} \\ \vdots \\ \eta_{t_n} \end{pmatrix};$$

como el determinante de la matriz  $(t_i^j)$  es el de Vandermonde, que es no nulo por ser  $t_i \neq t_k$  si  $i \neq k$ , este sistema de ecuaciones lineales tiene solución única y cada  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}[\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}]$ . En consecuencia,  $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}]$ , por lo que

$$C(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}) = \mathbb{C}(f)(\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}) = \mathbb{C}(f)(\eta_{t_1}),$$

es decir,  $h := \eta_{t_1}$  es un elemento primitivo de la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$ . Además, por el apartado (ii),

$$\mathcal{S}_f = \bigcup_{i=1}^n S_{t_i} = S_{t_1} = \{y \in \mathbb{C}^n : a_{m_h}^h(y) = 0\}.$$

con lo que concluye la demostración □

**Observación B.3.2** La demostración de la Proposición B.3.1 se generaliza, siguiendo las mismas líneas, para probar el siguiente resultado:

(B.3.2.1) *Sea  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación polinómica entre variedades algebraicas afines complejas no singulares de la misma dimensión. Entonces, el conjunto de puntos donde  $f$  no es propia es vacío o una hipersuperficie de  $Y$ .*

De hecho en [J3, Thm.3.8] se demuestra el resultado anterior sin imponer que  $X$  e  $Y$  sean no singulares.

La siguiente Proposición proporciona otra caracterización de naturaleza geométrica del conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos en que una aplicación continua  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia.

**Proposición B.3.3** *Sean  $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  la proyección sobre el segundo factor y  $\mathfrak{G}_f$  el grafo de una aplicación continua  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Entonces,  $\mathcal{S}_f = \pi(\text{Cl}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f)$ .*

*Demostración.* Por la Observación 1.2.3 (iii), un punto  $y \in \mathbb{C}^n$  pertenece a  $\mathcal{S}_f$  si y sólo si existe una sucesión  $\{x_k\}_k$  en  $\mathbb{C}^n$  tal que  $\|x_k\| \geq k$  para cada  $k \geq 1$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$ ; de hecho, como  $\mathbb{CP}^n$  es compacto podemos suponer que la sucesión  $\{x_k\}_k$  converge a un punto  $p \in \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$ , es decir,  $\{(x_k, f(x_k))\}_k$  converge a  $(p, y) \in \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f$ . Por tanto,  $y \in \mathcal{S}_f$  si y sólo si existe  $p \in \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$  tal que  $(p, y) \in \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f$ , o lo que es igual,  $\pi(\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f) = \mathcal{S}_f$ .  $\square$

**Corolario B.3.4** *Sea  $\mathfrak{G}_f$  el grafo de una aplicación polinómica dominante  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  y supongamos que el conjunto algebraico multi-proyectivo complejo  $\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f$  es irreducible. Entonces,  $f$  es propia.*

*Demostración.* Observamos en primer lugar que  $\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f)$  coincide con la clausura de  $\mathfrak{G}_f$  en  $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$  con la topología de Zarsiki, pues  $\mathfrak{G}_f$  es una variedad algebraica afín compleja de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ . Por tanto, si  $H_\infty$  denota el hiperplano de infinito de  $\mathbb{CP}^n$ ,

$$\begin{aligned} R_1 &:= \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f = \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}^{\text{zar}}(\mathfrak{G}_f) \setminus (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n) \\ &= \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}^{\text{zar}}(\mathfrak{G}_f) \cap ((H_\infty \times \mathbb{CP}^n) \cup (\mathbb{CP}^n \times H_\infty)) \end{aligned}$$

es un conjunto algebraico multi-proyectivo complejo. Consideramos también el conjunto

$$\begin{aligned} R_2 &:= \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f = (\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \cap \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n) \setminus \mathfrak{G}_f \\ &= (\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus \mathfrak{G}_f) \cap (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n) = R_1 \cap (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n) = R_1 \setminus (\mathbb{CP}^n \times H_\infty), \end{aligned}$$

Nótese que  $R_2$  es constructible y  $\dim(R_2) \leq \dim(R_1) \leq \dim(\mathfrak{G}_f) - 1 = n - 1$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $f$  no es propia. Entonces, por la Proposición B.3.1 (iii), el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que  $f$  no es propia es una hipersuperficie de  $\mathbb{C}^n$ . Esto implica, por la Proposición B.3.3, que

$$\dim(R_1) \geq \dim(R_2) \geq \dim(\pi(R_2)) = \dim(\mathcal{S}_f) = n - 1 \geq \dim(R_1),$$

luego  $\dim(R_1) = \dim(R_2) = n - 1$ . En particular  $R_1$  y  $R_2$  tienen la misma dimensión y, como  $R_1$  es irreducible y  $R_2$  es constructible, deducimos que  $R_1 = \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(R_2)$ . En consecuencia,  $\dim(R_1 \setminus R_2) \leq n - 2$ .

Sea  $\pi_2 : \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$  la proyección sobre el segundo factor. Como  $f$  es dominante,  $\pi_2(\text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{G}_f)) = \mathbb{CP}^n$ , y por la Proposición B.3.3, tenemos que

$$\pi_2^{-1}(H_\infty) \cap \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \subset \text{Cl}_{\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n}(\mathfrak{G}_f) \setminus (\mathfrak{G}_f \cup R_2) = R_1 \setminus R_2,$$

es decir,  $H_\infty \subset \pi_2(R_2 \setminus R_1)$ . Pero esto es una contradicción, y por tanto  $f$  es propia, pues  $\dim(R_1 \setminus R_2) \leq n - 2 < n - 1 = \dim(H_\infty)$ .  $\square$

A continuación presentamos una cota superior para el grado de la hipersuperficie formada por el conjunto de puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que no es propia una aplicación polinómica dominante y no propia  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

**Teorema B.3.5** *El conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos de  $\mathbb{C}^n$  en los que una aplicación polinómica dominante  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia es el conjunto vacío o una hipersuperficie  $\mathbb{C}$ -unireglada de grado no superior a*

$$\frac{\prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f)}{\min_{i=1, \dots, n} \deg(f_i)}.$$

Además,  $\deg f^{-1}(\mathcal{S}_f) \leq \prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f)$ .

*Demostración.* Ya hemos visto en la Proposición B.3.1 que  $\mathcal{S}_f$  es el conjunto vacío o una hipersuperficie, y posponemos hasta la prueba del Teorema B.4.3, en la sección siguiente, la demostración de que es  $\mathbb{C}$ -unireglada. Por tanto sólo quedan por probar las cotas referentes al grado de las hipersuperficies  $\mathcal{S}_f$  y  $f^{-1}(\mathcal{S}_f)$ . Denotamos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Por el Lema B.3.1 (iv) existen un polinomio  $h := \sum_{i=1}^n c_i x_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  y un polinomio irreducible  $P_h(f, \mathbf{t}) := \sum_{k=0}^m a_k(f) \mathbf{t}^k \in \mathbb{C}[f][\mathbf{t}]$  tales que

$$P_h(f, h) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_f = \{x \in \mathbb{C}^n : a_m(x) = 0\}.$$

Como  $h$  es un elemento primitivo de la extensión de cuerpos  $\mathbb{C}(\mathbf{x})|\mathbb{C}(f)$ , se cumple que  $\mu(f) = m$ . Estimemos ahora el grado del polinomio  $a_m$ . Para ello, aplicando el Teorema de Perron B.2.2 al conjunto de polinomios  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} := h$  y al peso  $w_\beta$  en  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_{n+1}]$  con ponderación  $\beta = (\deg(f_1), \dots, \deg(f_{n+1}))$ , existe un polinomio  $Q \in \mathbb{C}[y][y_{n+1}]$  tal que  $Q(f, f_{n+1}) = 0$  y  $w_\beta(Q) \leq \prod_{i=1}^{n+1} \deg(f_i)$ . Como el polinomio  $P_h(y, y_{n+1})$  es irreducible divide a  $Q$ , y por tanto

$$w_\beta(P_h) \leq w_\beta(Q) \leq \deg(h) \prod_{i=1}^n \deg(f_i) = \prod_{i=1}^n \deg(f_i),$$

pues  $\deg(h) = 1$ . De este modo,

$$w_\beta(a_m) + m \leq \prod_{i=1}^n \deg(f_i) \implies w_\beta(a_m) \leq \prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f).$$

Vimos en B.2.1 (iii) que  $\deg(a_m) \cdot \min_{i=1, \dots, n} \{\deg(f_i)\} \leq w_\beta(a_m)$ , y por ello

$$\deg(\mathcal{S}_f) \leq \deg(a_m) \leq \frac{w_\beta(a_m)}{\min_{i=1, \dots, n} \{\deg(f_i)\}} \leq \frac{\prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f)}{\min_{i=1, \dots, n} \{\deg(f_i)\}},$$

lo que proporciona la primera estimación.

Para la segunda basta observar que  $f^{-1}(\mathcal{S}_f) = \{x \in \mathbb{C}^n : F(x) = 0\}$ , donde  $F = a_m \circ f$ , y por tanto

$$\deg(f^{-1}(\mathcal{S}_f)) \leq \deg(F) \leq w_\beta(a_m) \leq \prod_{i=1}^n \deg(f_i) - \mu(f),$$

con lo que concluye la prueba. □

## B.4. Compactificaciones proyectivas de variedades afines

El objetivo de esta sección es estudiar algunas propiedades de los residuos de las compactificaciones proyectivas de una variedad algebraica afín compleja.

**Definiciones B.4.1** (i) Una *compactificación proyectiva*  $(\widehat{X}, j)$  de una variedad algebraica afín compleja  $X$  es el par formado por una variedad proyectiva compleja  $\widehat{X}$  y una aplicación polinómica inyectiva  $j : X \hookrightarrow \widehat{X}$  tales que  $Y := \widehat{X} \setminus j(X) \subsetneq \widehat{X}$  es un conjunto algebraico proyectivo complejo y la aplicación  $j : X \rightarrow j(X) = \widehat{X} \setminus Y$  es un isomorfismo polinómico. Por comodidad identificaremos  $X$  con  $j(X)$  y escribiremos  $X \subset \widehat{X}$ .

(ii) La diferencia  $\widehat{X} \setminus X$  se denomina *residuo* de la compactificación  $(\widehat{X}, j)$ .

**Proposición B.4.2** Sea  $\widehat{X}$  una compactificación proyectiva de una variedad algebraica afín  $X \subset \mathbb{C}^n$ . Entonces,  $\widehat{X} \setminus X$  es una hipersuperficie conexa.

*Demostración.* Comenzamos demostrando que  $\widehat{X} \setminus X$  es una hipersuperficie. Para ello consideramos la normalización  $(Z, \pi)$  de  $\widehat{X}$  y el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X' := \pi^{-1}(X) & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & \widehat{X} \end{array}$$

Observamos que  $\pi(Z \setminus X') = \widehat{X} \setminus X$  y, como  $\pi$  es un morfismo finito, para probar que  $\widehat{X} \setminus X$  es hipersuperficie basta demostrar que  $Z \setminus X'$  lo es. Para ello demostraremos que sus componentes irreducibles  $Y_1, \dots, Y_r$  tienen codimensión 1. Suponemos, por reducción al absurdo que, por ejemplo, la codimensión de  $Y_1$  es  $\geq 2$ . Consideramos la aplicación racional  $\phi := (\phi_1, \dots, \phi_m) : Z \dashrightarrow X' \subset \mathbb{C}^m$  asociada a la inclusión  $X' \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ . Como  $Z$  es una variedad algebraica proyectiva normal compleja, cada función racional  $\phi_i : Z \dashrightarrow \mathbb{C}$  se extiende, en virtud de [Na, VI.2. Prop.4, pag. 118], como función regular, a todos los puntos de  $Y_1 \setminus \bigcup_{j=2}^r Y_j$ . Además, como  $X'$  es cerrado en  $\mathbb{C}^m$ ,  $\phi(z) \in X'$  para cada punto  $z \in Z \setminus \bigcup_{j=2}^r Y_j$ , luego se tiene una aplicación regular

$$\psi := \phi|_{Z \setminus \bigcup_{j=2}^r Y_j} : Z \setminus \bigcup_{j=2}^r Y_j \rightarrow X' \subset Z.$$

Sean  $y \in Y_1 \setminus \bigcup_{j=2}^r Y_j$  y  $x := \phi(y)$ ; como  $X'$  es abierto en  $Z$ , el punto  $\{x\}$  es una componente conexa aislada de la fibra  $\phi^{-1}(x)$ , luego  $\phi^{-1}(x)$  tiene al menos dos componentes conexas. Esto contradice el Teorema de conexión de Zariski ([Mu, 3.24]) que afirma, por ser  $Z$  una variedad algebraica normal, que las fibras de la aplicación regular  $\psi$  son conexas. Esto demuestra que  $Z \setminus X'$  es una hipersuperficie.

Para demostrar que  $\widehat{X} \setminus X = \pi(Z \setminus X')$  es conexo es suficiente comprobar la conexión de  $Z \setminus X'$ . Como  $\pi$  es un morfismo finito se deduce de [H1, II.5.17] que  $\pi$  es un morfismo

afín, luego  $X'$  es una variedad algebraica afín compleja. Ahora, como  $Z$  es una variedad algebraica proyectiva normal compleja y  $X'$  es una variedad algebraica afín compleja, deducimos de [H2, Ch. II, §3] que  $Z \setminus X'$  es conexo.  $\square$

En la demostración del Teorema B.3.5 hemos dejado sin probar que el conjunto  $\mathcal{S}_f$  de puntos de  $\mathbb{C}^n$  donde una aplicación polinómica  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  no es propia es una hipersuperficie  $\mathbb{C}$ -unireglada. Para comprobarlo es suficiente, en virtud de la Proposición B.3.3 y de que las aplicaciones racionales transforman curvas racionales en curvas racionales, demostrar el siguiente resultado.

**Teorema B.4.3** *Sea  $Z$  una compactificación proyectiva de  $\mathbb{C}^n$ . Entonces cada componente irreducible del conjunto  $Z \setminus \mathbb{C}^n$  es una hipersuperficie  $\mathbb{C}$ -unireglada.*

Antes de probar el Teorema B.4.3, necesitamos el siguiente lema.

**Lema B.4.4** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación regular dominante entre superficies algebraicas afines complejas. Sean  $\widehat{X}$  y  $\widehat{Y}$  compactificaciones proyectivas de  $X$  e  $Y$  tales que  $\widehat{X} \setminus X$  es una unión finita de curvas racionales. Entonces,  $\widehat{Y} \setminus Y$  es también una unión finita de curvas racionales.*

*Demostración.* Sea  $\widehat{f} : \widehat{X} \dashrightarrow \widehat{Y}$  la aplicación racional inducida por la aplicación regular  $f$ . Como consecuencia de [Sh1, IV.3.3.Thm.3], existen

- Una superficie algebraica proyectiva compleja no singular  $\widehat{Z}$ ,
- La composición de una sucesión finita de explosiones  $\pi : \widehat{Z} \rightarrow \widehat{X}$ , y
- Una aplicación regular  $g : \widehat{Z} \rightarrow \widehat{Y}$ ,

tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{Z} & & \\
 \pi \downarrow & \searrow g & \\
 \widehat{X} & \dashrightarrow \widehat{f} & \widehat{Y}
 \end{array}$$

Se deduce de las afirmaciones III.1.c.1 y III.1.c.4 (ii) que el conjunto  $\pi^{-1}(\widehat{X} \setminus X)$  es unión finita de curvas racionales. Además, el conjunto  $\widehat{Y} \setminus Y$  es, por la Proposición B.4.2, una hipersuperficie contenida en  $g(\pi^{-1}(\widehat{X} \setminus X))$ , que es la imagen de una unión finita de curvas racionales. Por tanto,  $\widehat{Y} \setminus Y$  es también unión finita de curvas racionales.  $\square$

*Demostración del Teorema B.4.3.* Si  $n = 1$  el resultado es trivialmente cierto; por tanto, suponemos  $n \geq 2$  y consideramos un punto  $p \in Z \setminus \mathbb{C}^n$ . Se trata de probar que existe

una curva racional contenida en  $Z \setminus \mathbb{C}^n$  que pasa por  $p$ . Elegimos una curva algebraica proyectiva irreducible  $C \subset Z$  tal que  $C \cap \mathbb{C}^n \neq \emptyset$ . Por [Mu, Ch.7 §7B] existe una curva algebraica plana irreducible  $\Gamma \subset \mathbb{CP}^2$  tal que  $\Gamma \cap \mathbb{C}^2 \neq \emptyset$  y un isomorfismo birracional  $F : \Gamma \dashrightarrow C$ . Sean  $F_0, F_1, \dots, F_n \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  polinomios homogéneos del mismo grado tales que  $F = (F_0 : F_1 : \dots : F_n)|_\Gamma$ . Consideramos la función racional

$$F' := (F_0 : F_1 : \dots : F_n) : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^n,$$

y podemos suponer que la imagen de  $F'$  tiene dimensión 2. En caso contrario, estará contenida en  $C$  y procedemos del modo siguiente. Elegimos un punto  $q \in \mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{Z}_{\mathbb{CP}^2}(x_0 F_0) \cup \Gamma)$  y un polinomio homogéneo  $G \in \mathcal{J}(\Gamma)$  tal que  $G(q) \neq 0$ . Sin más que multiplicar por una potencia adecuada de  $x_0$  podemos suponer que el grado de  $G$  coincide con el de los polinomios  $F_i$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{C}^n$ , consideramos la aplicación racional

$$F_\lambda := (F_0 : F_1 : \dots : F_n) + (0 : \lambda)G : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow \mathbb{CP}^n,$$

cuya imagen contiene un subconjunto denso de  $C$ . Como  $G(q) \neq 0$  podemos elegir  $\lambda \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\text{Im}(F_\lambda)$  no está contenida en  $C$ ; por tanto, para esa elección de  $\lambda$  la dimensión de  $\text{Im}(F_\lambda)$  es necesariamente 2, pues su clausura de Zariski es un conjunto algebraico irreducible que contiene estrictamente a  $C$ . En lo sucesivo denotaremos de nuevo  $F'$ , para simplificar la notación, a la aplicación  $F_\lambda$ , y suponemos que  $\dim(\text{Im}(F')) = 2$ .

Comprobemos que existe una curva racional  $\Lambda \subset \mathbb{CP}^2$  que contiene todos los polos y puntos de indeterminación  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{CP}^2$  de  $F'$ . Tras un cambio proyectivo de coordenadas en  $\mathbb{CP}^2$  podemos suponer que  $p_1 := (a_1, b_1), \dots, p_r := (a_r, b_r) \in \mathbb{C}^2$  y que  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ . Sea  $P \in \mathbb{C}[t]$  un polinomio de grado  $r$  tal que  $P(a_i) = b_i$  para cada  $1 \leq i \leq r$  y consideramos la aplicación polinómica  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $t \mapsto (t, P(t))$ . La curva racional  $\Lambda := \mathcal{Z}_{\mathbb{CP}^2}(x_0^{r-1}x_2 - x_0^r P(x_1/x_0))$  de  $\mathbb{CP}^2$  contiene al conjunto  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .

Por tanto, si tomamos  $X := \mathbb{C}^2 \setminus \Lambda$ , la restricción  $f' := F'|_X : X \rightarrow \mathbb{CP}^n$  es una aplicación regular y  $\widehat{X} := \mathbb{CP}^2$  es una compactificación proyectiva de  $X$  cuyo residuo  $\widehat{X} \setminus X = \mathcal{Z}_{\mathbb{CP}^2}(x_0) \cup \Lambda$  es unión de dos curvas racionales. Sean  $Y$  la clausura de Zariski de  $\text{Im}(f')$  en  $\mathbb{C}^n$ , que es una superficie algebraica afín irreducible, e  $\widehat{Y}$  la clausura de Zariski en  $\mathbb{CP}^n$  de  $\text{Im}(f')$ , que está contenida en  $Z$ . Observamos que

$$p \in C \setminus \mathbb{C}^n \subset \widehat{Y} \setminus Y \subset Z \setminus \mathbb{C}^n.$$

Como consecuencia del Lema B.4.4, el conjunto  $\widehat{Y} \setminus Y$  es una unión finita de curvas racionales; por tanto, existe una curva racional contenida en  $Z \setminus \mathbb{C}^n$  que pasa por  $p$ , es decir,  $Z \setminus \mathbb{C}^n$  es  $\mathbb{C}$ -unireglado.  $\square$

## B.5. Propiedades de $\mathcal{S}_f$ en el caso real.

De los resultados anteriores se desprenden los Teoremas B.5.1 y B.5.2, que enunciamos y demostramos a continuación, acerca de la naturaleza del conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los



puntos de  $\mathbb{R}^m$  en los que una aplicación polinómica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es propia, que son relevantes al estudiar la geometría de su imagen  $f(\mathbb{R}^n)$ . En lo que resta de esta sección, si  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto algebraico denotaremos por  $X_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$  la clausura de Zariski de  $X$  en  $\mathbb{C}^n$ . Esta definición puede extenderse a conjuntos algebraicos de  $\mathbb{RP}^n$ ,  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m$ , etc. Los dos resultados citados son los siguientes:

**Teorema B.5.1** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación polinómica no constante. Entonces, el conjunto  $\mathcal{S}_f$  formado por los puntos de  $\mathbb{R}^2$  en los que  $f$  no es propia es unión de una familia finita, tal vez vacía, de semilíneas paramétricas.*

*Demostración.* Este resultado ya ha sido probado, incluso con más generalidad, en los apartados (vi) y (vii) del Lema III.4.2. □

Empleando una estrategia similar a la de la prueba del Teorema III.4.1 (iii) obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema B.5.2** *Sean  $n \geq 2$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación polinómica no constante. Entonces el conjunto  $\mathcal{S}_f$  es semialgebraico,  $\mathbb{R}$ -unireglado, cerrado en  $\mathbb{R}^m$  y, si es no vacío, la dimensión de cada una de sus componentes conexas está comprendida entre 1 y  $n - 1$ .*

*Demostración.* Veamos en primer lugar una descripción alternativa de  $\mathcal{S}_f$  que será útil para determinar sus propiedades. Sean  $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m$  el grafo de  $f$  y

$$\mathcal{D} := \pi_2(\text{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X) \cap \mathbb{R}^m, \text{ donde } \pi_2 : \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m \rightarrow \mathbb{RP}^m, (x, y) \rightarrow y.$$

Vamos a comprobar que  $\mathcal{S}_f = \mathcal{D}$ . Denotamos  $H_{\infty}(\mathbb{R})$  el hiperplano de infinito de  $\mathbb{RP}^m$  y observamos que, como la restricción

$$\rho := \pi_2|_{\text{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X)} : \text{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \rightarrow \mathbb{RP}^m$$

es propia y  $\rho^{-1}(H_{\infty}(\mathbb{R})) \subset \text{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X$ , también es propia la restricción

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D})} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D},$$

lo que demuestra que  $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{D}$ . Recíprocamente, para cada punto  $y \in \mathcal{D}$  existe una sucesión totalmente no acotada  $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\{f(x_k)\}_k$  converge a  $y$ , lo que demuestra que  $f$  no es propia en  $y$ , por lo que  $\mathcal{S}_f = \mathcal{D}$ .

De esta igualdad se desprende inmediatamente que  $\mathcal{S}_f$  es un conjunto semialgebraico, cerrado en  $\mathbb{R}^m$  y que la dimensión de sus componentes conexas es  $\leq n - 1$  pues, en virtud de [BCR, 2.8.13],  $\dim(\text{Cl}_{\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m}(X) \setminus X) \leq \dim(X) - 1 = n - 1$ . Sólo falta comprobar que si  $\mathcal{S}_f$  no es vacío, entonces es unireglado. Tomamos un punto  $x \in \mathcal{S}_f$ ; por el Lema III.1.6 existen, tras un cambio afín de coordenadas,

- enteros  $r, k_i$  con  $k_1 = \min\{k_1, \dots, k_n\} < 0$ , y
- polinomios  $p_i \in \mathbb{R}[\mathbf{t}]$  con  $p_i(0) \neq 0$  para  $2 \leq i \leq n$ ,

tales que  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f \circ \alpha)(t)$ , donde  $\alpha(\mathbf{t}) := (\mathbf{t}^{k_1} + \mathbf{t}^r, \mathbf{t}^{k_2} p_2(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{t}^{k_n} p_n(\mathbf{t}))$ . Tras la sustitución  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}^2$  podemos suponer que  $k_1$  y  $r$  son pares. Escribimos  $h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := y^{|k_1|} + \mathbf{x}^r$  y para todo  $2 \leq i \leq n$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} y^{-k_i} p_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i < 0, \\ \mathbf{x}^{k_i} p_i(\mathbf{x}) & \text{si } k_i \geq 0. \end{cases}$$

Observamos que la aplicación

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (h_1(x, y), \dots, h_n(x, y))$$

es propia, pues si  $\{z_k\}_k$  es una sucesión no acotada en  $\mathbb{R}^2$ , tampoco es acotada la sucesión  $\{h_1(z_k)\}_k \subset \mathbb{R}$ , lo que implica que también la sucesión  $\{h(z_k)\}_k \subset \mathbb{R}^n$  no es acotada. Más aún,  $x = \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t, 1/t) \in \mathbb{R}^n$ .

Ahora escribimos  $g := f \circ h$ , cuya restricción  $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{S}_f)} : \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}(\mathcal{S}_f) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{S}_f$  es propia porque tanto  $h$  como la restricción  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{S}_f)} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{S}_f) \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{S}_f$  lo son. Esto implica que  $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$  y, como del Teorema B.5.1 se desprende que  $\mathcal{S}_g$  es  $\mathbb{R}$ -unireglado y de dimensión 1, se deduce que también  $\mathcal{S}_f$  lo es.  $\square$

# Apéndice C: Poliedro sin proyecciones seccionales

El objetivo de este Apéndice C es demostrar que para  $n \geq 3$  existen poliedros convexos en  $\mathbb{R}^n$  sin proyecciones seccionales. Recordamos que dados un poliedro convexo  $\mathcal{K}$ , un hiperplano  $H$  y una recta vectorial  $\vec{\ell}$  decimos que  $H \cap \mathcal{K}$  es la *proyección seccional* de  $\mathcal{K}$  en la dirección de  $\vec{\ell}$  si  $H \cap \mathcal{K} = \pi(\mathcal{K})$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota la proyección sobre  $H$  en la dirección de  $\vec{\ell}$ . Concretamente, demostraremos el siguiente resultado.

**Teorema C.3** *Para cada  $n \geq 3$  existe un poliedro convexo acotado  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  que no tiene proyecciones seccionales.*

## C.1. Propiedades de las proyecciones seccionales

El siguiente resultado es la clave de la estrategia que existen poliedros convexos acotados sin proyecciones seccionales.

**Lema C.1.1** *Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo de dimensión  $n \geq 3$  y  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección en la dirección de una recta  $\vec{\ell}$  sobre un hiperplano  $H$ . Sean  $p_1, \dots, p_\ell$  los vértices de  $\mathcal{K}$  que están en  $H$  y  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  las aristas de  $\mathcal{K}$  paralelas a  $\vec{\ell}$ . Supongamos que  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cap H$  y escribimos  $\{q_j\} = \pi(\mathcal{A}_j)$  para  $j = 1, \dots, k$ . Entonces, los vértices de  $\mathcal{P}$  son  $q_1, \dots, q_k$  y  $p_1, \dots, p_\ell$ . En particular,*

- (i) *Si  $\vec{\ell}$  no es paralela a ninguna de las aristas de  $\mathcal{K}$ , entonces los vértices de  $\mathcal{P}$  son  $p_1, \dots, p_\ell$ .*
- (ii) *Si  $\mathcal{K}$  no tiene un par de aristas paralelas y  $\mathcal{A}$  es una arista de  $\mathcal{K}$  paralela a  $\vec{\ell}$  (y de hecho la única), entonces los vértices de  $\mathcal{P}$  son  $p_1, \dots, p_\ell$  y (el único punto de)  $\pi(\mathcal{A})$ .*

La demostración del resultado anterior requiere un poco de trabajo previo.

**Lema C.1.2** *Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo de dimensión  $n \geq 3$ ,  $\mathcal{A}$  una arista de  $\mathcal{K}$ ,  $\ell$  la recta que contiene a  $\mathcal{A}$  y  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección en la dirección de la recta  $\vec{\ell}$  sobre un hiperplano  $H \subset \mathbb{R}^n$  (cuya dirección  $\vec{H}$  no contiene a  $\vec{\ell}$ ). Sea  $E$  un hiperplano de soporte*

de  $\mathcal{K}$  tal que  $E \cap \mathcal{K} = \mathcal{A}$ . Entonces,  $E \cap H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$  en  $H$  tal que  $E \cap \mathcal{P} = H \cap \ell$  contiene un único punto, que es un vértice de  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* En primer lugar, observamos que como  $\dim \mathcal{K} = n$  entonces  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$  tiene dimensión  $n - 1 \geq 2$ ; además, como  $\vec{\ell} \notin \vec{H}$ , tenemos que  $H \cap \ell = \{p\}$ . De esta manera, si demostramos que  $E \cap \mathcal{P} = H \cap \ell$ , deducimos por el Corolario I.4.6 que  $E \cap H$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$  en  $H$  y que  $p$  es un vértice de  $\mathcal{P}$ . En efecto, como  $\ell \subset E$  se cumple que  $\pi(E) = E \cap H$  y  $E = \pi^{-1}(\pi(E))$ ; por tanto, si  $y \in E \cap \mathcal{P} = \pi(E) \cap \mathcal{P}$  existe  $x \in \mathcal{K}$  tal que  $\pi(x) = y$  y así  $x \in \pi^{-1}(y) \subset \pi^{-1}(\pi(E)) = E$ . Esto significa que  $x \in E \cap \mathcal{K} = \mathcal{A}$  y así  $y = \pi(x) \in \pi(\mathcal{A}) = H \cap \ell$ .  $\square$

**Lema C.1.3** Sean  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro convexo de dimensión  $n \geq 3$  y  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección en la dirección de la recta  $\vec{\ell}$  sobre el hiperplano  $H$ . Sean  $p_1, \dots, p_r$  los vértices de  $\mathcal{K}$  (si tiene alguno) y sean  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  las aristas de  $\mathcal{K}$  paralelas a  $\vec{\ell}$  (si tiene alguna). Entonces,

- (i)  $\pi(\mathcal{A}_1), \dots, \pi(\mathcal{A}_k)$  son vértices de  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$ .
- (ii) Si  $p$  es un vértice de  $\mathcal{P}$  tal que  $p \notin \pi(\mathcal{A}_i)$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $W$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P}$  en  $H$ , entonces existe  $j = 1, \dots, r$  tal que  $\pi(p_j) = p$ . Además, el hiperplano  $\Pi := p_j + \vec{W} + \vec{\ell}$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  tal que  $\Pi \cap \mathcal{K} = \{p_j\}$ .

*Demostración.* En primer lugar, como consecuencia del Corolario I.4.5 y del Lema C.1.2 deducimos que  $\pi(\mathcal{A}_1), \dots, \pi(\mathcal{A}_k)$  proporcionan vértices de  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$ , lo que prueba (i).

Sea ahora  $p$  uno de los vértices restantes de  $\mathcal{P}$  (si hay alguno) y sea  $W$  un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P}$  en  $H$  tal que  $W \cap \mathcal{P} = \{p\}$  (véase el Corolario I.4.6). Tras un cambio afín de coordenadas, podemos suponer que  $H := \{x_n = 0\}$ ,  $\vec{\ell}$  es la recta vectorial generada por el vector  $\vec{e}_n$ ,  $p := \mathbf{0}$ ,  $W := \{x_{n-1} = 0\} \cap H$  y  $\mathcal{P} \subset \{x_{n-1} \geq 0\} \cap H$ .

Sea  $\Pi$  el hiperplano que contiene a  $W$  y a la recta  $p + \vec{\ell}$ , es decir,  $\Pi := \{x_{n-1} = 0\}$ . Observamos que

$$\mathcal{K} \subset \pi^{-1}(\mathcal{P}) \subset \pi^{-1}(\{x_{n-1} \geq 0\} \cap H) = \{x_{n-1} \geq 0\} = \Pi^+.$$

Para comprobar que  $\Pi$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  basta comprobar que  $\Pi$  corta a  $\mathcal{K}$ . Para ello, observamos que si  $x \in \mathcal{K}$  cumple que  $\pi(x) = p \in W$  entonces  $x \in \pi^{-1}(W) = \Pi$ .

Ahora, por el Lema I.4.3, tenemos que  $\mathcal{E} := \mathcal{K} \cap \Pi$  es una cara de  $\mathcal{K}$  que cumple que  $p \in \pi(\mathcal{E}) = \pi(\mathcal{K} \cap \Pi) \subset \mathcal{P} \cap W = \{p\}$  y por tanto  $\pi(\mathcal{E}) = \{p\}$ . Esto implica que  $\mathcal{E}$  tiene dimensión 0 o tiene dimensión 1 y es paralela a  $\vec{\ell}$ . Pero como  $\{p\}$  no es la proyección de una arista de  $\mathcal{K}$  paralela a  $\vec{\ell}$ , deducimos que  $\dim \mathcal{E} = 0$ , es decir,  $\mathcal{E}$  se corresponde con un vértice  $p_j$  de  $\mathcal{K}$ . Por tanto,  $p = \pi(p_j)$  y  $\mathcal{K} \cap \Pi = \{p_j\}$ .  $\square$

*Demostración del Lema C.1.1.* En primer lugar, como consecuencia del Lema C.1.3,  $q_1, \dots, q_k$  son vértices de  $\mathcal{K}$ . Por otro lado, observamos que  $\mathcal{P}$  es un poliedro de dimensión  $n - 1 \geq 2$ . Sea  $\Pi_i$  un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  tal que  $\Pi_i \cap \mathcal{K} = \{p_i\}$ ; como  $\dim \mathcal{P} \geq 2$  y  $p_i \in H$ , deducimos que  $\Pi_i \neq H$  no es paralelo a  $H$ . Definimos  $W_i := \Pi_i \cap H$  que es un hiperplano de  $H$ ; como  $p_i \in H$ , entonces  $W_i \cap \mathcal{P} = (\Pi_i \cap H) \cap (\mathcal{K} \cap H) = \{p_i\}$  y por el Corolario I.4.6,  $p_i$  es un vértice de  $\mathcal{P}$ .

Sea ahora  $p$  un vértice de  $\mathcal{P}$  distinto de  $q_1, \dots, q_k$ . Elegimos un hiperplano  $W$  de  $H$  tal que  $W \cap \mathcal{P} = \{p\}$ . Por el Lema C.1.3, existe un vértice  $q$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $\pi(q) = p$  y además el hiperplano  $\Pi := q + \vec{W} + \vec{\ell}$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{K}$  tal que  $\Pi \cap \mathcal{K} = \{q\}$ . Como  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap H$ , entonces  $p \in \mathcal{K}$  y el segmento  $\overline{pq} \subset \mathcal{K}$ ; además, dicho segmento está contenido en la recta  $q + \vec{\ell} \subset \Pi$ . Por tanto,  $\overline{pq} \subset \mathcal{K} \cap \Pi = \{q\}$ , es decir,  $p = q$  es un vértice de  $\mathcal{K}$  contenido en  $H$  y así  $p = p_i$  para algún  $i = 1, \dots, \ell$ .

Una vez probado esto, los apartados (i) y (ii) son inmediatos. □

## C.2. Poliedros esféricos

Decimos que un poliedro  $n$ -dimensional  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  se llama *esférico* si es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos  $\mathfrak{F} := \{p_1, \dots, p_k\}$  de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nótese que, como el hiperplano tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}$  en el punto  $p_i$  corta a  $\mathcal{K}$  exactamente en el punto  $p_i$ , cada uno de los puntos  $p_i$  es un vértice de  $\mathcal{K}$ . Por otra parte, como el conjunto de los vértices de la envoltura convexa  $\mathcal{K}$  del conjunto  $\mathfrak{F}$  es un subconjunto de  $\mathfrak{F}$ , concluimos que el conjunto de los vértices de  $\mathcal{K}$  coincide con  $\mathfrak{F}$ . Por otra parte, dado que la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  es convexa,  $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{B}}_n(\mathbf{0}, 1)$ . Además, como  $\mathcal{K}$  es  $n$ -dimensional, necesariamente  $\mathfrak{F}$  contiene  $n + 1$  puntos afínmente independientes. Diremos que  $\mathcal{K}$  es además *genérico* si cada subconjunto de  $n + 1$  vértices de  $\mathcal{K}$  es afínmente independiente. Nótese que entonces cada subconjunto de  $j \leq n + 1$  vértices de un poliedro esférico genérico es afínmente independiente y, si  $n \geq 3$ ,  $\mathcal{K}$  no puede tener dos aristas paralelas, ya que en caso contrario  $\mathcal{K}$  tendría  $4 \leq n + 1$  puntos contenidos en un plano que serían afínmente dependientes.

**Lema C.2.1** *Sea  $\mathcal{K}'$  el poliedro esférico cuyo conjunto de vértices es  $\mathfrak{F}' := \{p'_1, \dots, p'_k\}$  y sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Entonces, existe un poliedro esférico genérico  $\mathcal{K}$  cuyo conjunto de vértices es  $\mathfrak{F} := \{p_1, \dots, p_k\}$  tal que  $p_i \in \mathcal{B}_n(p'_i, \varepsilon)$  para cada  $i = 1, \dots, k$ .*

*Demostración.* Consideramos la variedad algebraica real irreducible y de dimensión pura

$$\mathbb{T} := \mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{kn}.$$

A cada poliedro esférico  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  de vértices  $\{q_1, \dots, q_k\}$  le asociamos (unívocamente salvo el orden de los vértices) el punto  $q := (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{T}$ ; obviamente, no todo punto de  $\mathbb{T}$

define un poliedro esférico porque dichos poliedros son  $n$ -dimensionales y sus vértices son diferentes. Consideramos en  $\mathbb{T}$  la métrica dada por

$$d(q, q') = \sqrt{\sum_{i=1}^k d^2(q_i, q'_i)} : q := (q_1, \dots, q_k), q' := (q'_1, \dots, q'_k) \in \mathbb{T}.$$

En particular, si  $d(q, q') < \varepsilon$ , entonces  $d(q_i, q'_i) < \varepsilon$  para  $i = 1, \dots, k$ . Veamos que el conjunto  $\mathbb{G}$  de los puntos de  $\mathbb{T}$  correspondientes a poliedros esféricos genéricos es denso en  $\mathbb{T}$ . Como  $\mathbb{T}$  es irreducible y tiene dimensión pura, basta comprobar que  $Z := \mathbb{T} \setminus \mathbb{G}$  es un subconjunto algebraico propio de  $\mathbb{G}$ . Obsérvese que  $Z$  es el conjunto de puntos  $q := (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{T}$  tales que existe un subconjunto de  $n+1$  puntos en  $\{q_1, \dots, q_k\} \subset \mathbb{R}^n$  afínmente dependientes. Escribimos  $\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ ,  $\mathbf{x}_i := (\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{in})$  y para cada conjunto  $I := \{i_1, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, \dots, k\}$  consideramos el polinomio

$$F_I(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_{i_1 1} & \cdots & \mathbf{x}_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathbf{x}_{i_j 1} & \cdots & \mathbf{x}_{i_j n} \end{pmatrix}$$

Claramente, los puntos  $q_{i_1}, \dots, q_{i_{n+1}}$  son afínmente dependientes si y sólo si  $F_I(q) = 0$  y por tanto  $Z = \{\prod_I F_I(x) = 0\}$  es un conjunto algebraico. Además, dicho subconjunto es propio porque  $\mathbb{G}$  es no vacío. Para construir un punto  $q$  de  $\mathbb{G}$ , elegimos  $n+1$  puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  afínmente independientes, y añadimos sucesivamente nuevos puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  (hasta obtener  $k$ ) de modo que, una vez elegidos  $\{q_1, \dots, q_r\}$  con  $r \geq n+1$ , elegimos  $q_{r+1} \in \mathbb{S}^{n-1}$  fuera de los hiperplanos afines generados por los subconjuntos de  $n$  puntos de  $\{q_1, \dots, q_r\}$ .

Finalmente, la bola  $\mathcal{B}_{nk}(p', \varepsilon)$  contiene puntos de  $\mathbb{G}$ , y cualquier  $p := (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{G} \cap \mathcal{B}_{nk}(p', \varepsilon)$  nos proporciona un poliedro esférico genérico  $\mathcal{K}$  con vértices  $p_i \in \mathcal{B}_n(p'_i, \varepsilon)$ .  $\square$

**Lema C.2.2** *Para cada  $0 < r < 1$  existe un poliedro esférico genérico  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r) \subset \mathcal{K}$ .*

*Demostración.* Denotamos  $\varepsilon' := \frac{1}{2}\sqrt{2(1-r)}$  y consideramos el recubrimiento abierto  $\{\mathcal{B}_n(p', \varepsilon') : p' \in \mathbb{S}^{n-1}\}$  de la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Como  $\mathbb{S}^{n-1}$  es compacta, podemos extraer un subrecubrimiento finito  $\{\mathcal{B}_n(p'_i, \varepsilon') : 1 \leq i \leq k\}$ . Por el Lema C.2.1 existen puntos  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{S}^{n-1}$  tales que  $d(p_i, p'_i) < \varepsilon'$  para  $i = 1, \dots, k$  y cuya envoltura convexa es un poliedro esférico genérico.

A continuación escribimos  $\varepsilon := 2\varepsilon'$ , y observamos que  $\{\mathcal{B}_n(p_i, \varepsilon) : i = 1, \dots, k\}$  es un recubrimiento abierto de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , porque  $\mathcal{B}_n(p'_i, \varepsilon') \subset \mathcal{B}_n(p_i, \varepsilon)$ . Veamos ahora que, si  $\mathcal{F}$  es una faceta arbitraria del poliedro  $\mathcal{K}$  y  $H$  es el hiperplano generado por  $\mathcal{F}$ , entonces

$$d(\mathbf{0}, H) \geq r = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que  $d(\mathbf{0}, H) = d < r$ . Podemos suponer que  $H := \{x_1 = d\}$  y  $\mathcal{K} \subset H^+ := \{x_1 \leq d\}$ . Sean  $q := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in \mathbb{S}^{n-1}$  un vértice de  $\mathcal{K}$ ; se cumple que  $\sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1$  y  $p_{i1} \leq d$ . Por tanto,

$$d(p_i, q) = \sqrt{(p_{i1} - 1)^2 + p_{i2}^2 + \dots + p_{in}^2} = \sqrt{2(1 - p_{i1})} > \sqrt{2(1 - r)} = \varepsilon.$$

Pero entonces  $q \notin \mathcal{B}_n(p_i, \varepsilon)$  para  $i = 1, \dots, k$ , contradicción. Concluimos que  $d(\mathbf{0}, H) \geq r$ .

Ahora, como  $\mathcal{K} = \bigcap_{i=1}^r H_i^+$ , donde cada  $H_i^+$  es el semiespacio de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{K}$  y cuya frontera  $H_i$  contiene una faceta de  $\mathcal{K}$ , y además  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r) \subset H_i^+$  para cada  $i = 1, \dots, r$ , deducimos que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r) \subset \mathcal{K}$ .  $\square$

**Lema C.2.3** *Sea  $m > n$  un entero positivo. Entonces, existe  $r > 0$  tal que si  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  es un poliedro convexo con  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r)} \subset \mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$ , se cumple que  $\mathcal{K}$  tiene más de  $m$  vértices.*

*Demostración.* En primer lugar, fijamos  $\varepsilon > 0$ , definimos  $r := 1 - \varepsilon$  y elegimos dos puntos  $p_1, p_2 \in \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)} \setminus \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r)}$  tales que la recta  $\ell$  generada por los puntos  $p_1$  y  $p_2$  no interseca la bola abierta  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r)$ . Se cumple que  $d(p_1, p_2) \leq 2\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$

En efecto, sea  $q_0 \in \ell$  el punto de  $\ell$  más próximo al origen y sean  $q_1, q_2$  los puntos de intersección de  $\ell$  con  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Claramente,  $d(p_1, p_2) \leq d(q_1, q_2)$  y la recta generada por  $\mathbf{0}$  y  $q_0$  es perpendicular a  $\ell$ . Como

$$1 = d(\mathbf{0}, q_1)^2 = d(\mathbf{0}, q_0)^2 + d(q_0, q_1)^2 \geq (1 - \varepsilon)^2 + d(q_0, q_1)^2 \implies d(q_0, q_1) \leq \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2},$$

y por tanto,

$$d(p_1, p_2) \leq d(q_1, q_2) = 2d(q_0, q_1) = 2\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

Sean ahora  $0 < \varepsilon < 1/4$  tal que  $2(m - 1)\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} < 1/4$  y  $r := 1 - \varepsilon$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe un poliedro convexo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  con a lo sumo  $m$  vértices tal que  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r)} \subset \mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)}$ . Después de un cambio ortogonal de coordenadas, podemos suponer que uno de los vértices de  $\mathcal{K}$  es  $(0, \dots, 0, t)$  para cierto  $r < t \leq 1$ . Sean  $\mathcal{A}$  una arista de  $\mathcal{K}$  y  $\ell'$  la recta generada por  $\mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{K}$ , se cumple que  $\ell' \cap \mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r) = \emptyset$  y, como hemos probado antes, la longitud de  $\mathcal{A}$  no supera  $2\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$ . Por tanto, como  $\mathcal{K}$  tiene  $m$  vértices, la distancia entre dos vértices de  $\mathcal{K}$  es a lo sumo  $2(m - 1)\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} < 1/4$ . Ahora, como uno de los vértices de  $\mathcal{K}$  es  $(0, \dots, 0, t)$  y  $t > 3/4$ , deducimos que todos los vértices de  $\mathcal{K}$  (y por tanto  $\mathcal{K}$ ) están contenidos en la semibola  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1)} \cap \{x_n \geq 0\}$ , lo que contradice el hecho de que  $\overline{\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, 1 - \varepsilon)} \subset \mathcal{K}$ .  $\square$

### C.3. Demostración del resultado

*Demostración del Teorema C.3.* Sean  $\ell$  una recta con dirección  $\vec{\ell}$ ,  $H$  un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  no paralelo a  $\ell$ ,  $r$  el número positivo del Lema C.2.3 para  $m := n + 1$  y  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro esférico genérico tal que  $\mathcal{B}_n(\mathbf{0}, r) \subset \mathcal{K}$  (véase el Lema C.2.2). Consideremos la proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow H$  en la dirección  $\vec{\ell}$ , y sea  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K})$ . Sea  $H'$  el hiperplano perpendicular a  $\ell$  que pasa por el origen. Tras un cambio ortogonal de coordenadas, podemos suponer que  $\vec{\ell}$  está generada por el vector  $\vec{e}_n := (0, \dots, 0, 1)$  y  $H' := \{x_n = 0\}$ . Sea

$$\pi' : \mathbb{R}^n \rightarrow H', \quad x := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \rightarrow (x', 0) := (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

la proyección sobre  $H'$  en la dirección de  $\vec{\ell}$  y denotamos  $\mathcal{P}' := \pi(\mathcal{K})$  y

$$\mathcal{P}'_0 := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', 0) \in \mathcal{P}'\}.$$

Nótese que  $\pi'^{-1}(\mathcal{P}') := \mathcal{P}'_0 \times \mathbb{R}$  y que  $\mathcal{P} := \pi(\mathcal{K}) = (\mathcal{P}'_0 \times \mathbb{R}) \cap H$ . De este modo,  $\mathcal{P}$  se puede interpretar como el grafo de una función afín sobre  $\mathcal{P}'_0$  y así es afinmente equivalente a  $\mathcal{P}'_0$ . Además, tenemos que  $\pi(\overline{\mathcal{B}}_n(\mathbf{0}, s)) = \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, s) \times \{0\}$  para cada  $s > 0$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{K} \cap H = \mathcal{P}$ . Como  $\mathcal{K}$  es un poliedro esférico genérico, cada hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  contiene a lo sumo  $n$  vértices de  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}$  no tiene aristas paralelas. Por el Lema C.1.1, el poliedro  $\mathcal{P} = \mathcal{K} \cap H$  tiene a lo sumo  $n + 1$  vértices.

Por otra parte, el poliedro convexo  $\mathcal{P}'_0$  satisface  $\overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, r) \subset \mathcal{P}' \subset \overline{\mathcal{B}}_{n-1}(\mathbf{0}, 1)$  y, por el Lema C.2.3, tiene al menos  $n + 2$  vértices. Pero esto contradice el hecho de que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'_0$  son afinmente equivalentes y concluimos que  $\mathcal{K}$  no tiene proyecciones seccionales.  $\square$



## Bibliografía

- [AG] C. Andradas, J.M. Gamboa: On projections of real algebraic varieties. *Pacific J. Math.* **121** (1986), no. 1, 281–291.
- [AC] D. Auckly, J. Cleveland: Totally real origami and impossible paper folding. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), no. 3, 215–226.
- [AM] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald: Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ontario: 1969.
- [Be1] M. Berger: Geometry. I. *Universitext*. Springer-Verlag, Berlin: 1987.
- [Be2] M. Berger: Geometry. II. *Universitext*. Springer-Verlag, Berlin: 1987.
- [BCR] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: Real algebraic geometry. *Ergeb. Math.* **36**. Springer-Verlag, Berlin: 1998.
- [B] M. Brown: A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960) 74–76.
- [C] H. Clemens: Curves in generic hypersurfaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **19** (1986), 629–636.
- [DR] E. Demaine, J. O’Rourke: Geometric folding algorithms. Linkages, origami, polyhedra. *Cambridge University Press*, Cambridge: 2007.
- [E] D. Eisenbud, D: Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. *Graduate Texts in Math.* **150**. Springer-Verlag, New York: 1995.
- [F1] J.F. Fernando: Sumas de cuadrados de gérmenes de función analítica. *Tesis Doctoral UCM* (2001).
- [F2] J.F. Fernando: On the one dimensional polynomial and regular images of  $\mathbb{R}^n$ . *Preprint RAAG* (2012).
- [FG1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial images of  $\mathbb{R}^n$ . *J. Pure Appl. Algebra* **179** (2003), no. 3, 241–254.
- [FG2] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial and regular images of  $\mathbb{R}^n$ . *Israel J. Math.* **153** (2006), 61–92.
- [FG3] J.F. Fernando, J.M. Gamboa: On the irreducible components of a semialgebraic set. *Internat. J. Math.* **23** (2012) no. 4, 1250031, (40 pages).
- [FGU1] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On convex polyhedra as regular images of  $\mathbb{R}^n$ . *Proc. London Math. Soc.* (3) **103** (2011), 847–878.
- [FU1] J.F. Fernando, C. Ueno: On the set of infinite points of a polynomial image of  $\mathbb{R}^n$ . *Preprint RAAG* (2011).
- [FU2] J.F. Fernando, C. Ueno: On complements of convex polyhedra as polynomial and regular images of  $\mathbb{R}^n$ . *Preprint RAAG* (2012).

- [FU3] J.F. Fernando, C. Ueno: On the complements of 3-dimensional convex polyhedra as polynomial images of  $\mathbb{R}^3$  and its relation with sectional projections of convex polyhedra. *Preprint RAAG* (2012).
- [G] J.M. Gamboa: Reelle Algebraische Geometrie, June, 10<sup>th</sup> – 16<sup>th</sup> (1990), Oberwolfach.
- [GU] J.M. Gamboa, C. Ueno: Proper polynomial maps: the real case. *Lecture Notes in Math.* **1524** (1992), 240–256.
- [Gr] B. Grünbaum: Convex Polytopes. *Graduate Texts in Mathematics*, **221**. Springer-Verlag, New York: 2003.
- [Ha] J. Harris: Algebraic Geometry. A first course. *Graduate Texts in Mathematics*, **133**. Springer-Verlag, New York: 1992.
- [H1] R. Hartshorne: Algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg: 1977.
- [H2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. *Lecture Notes in Math.*, **156**. Springer-Verlag, Berlin-New York: 1970
- [Ho] C.W. Ho: A note on proper maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* **51** (1975), 237–241.
- [Ja] N. Jacobson: Basic Algebra II. W. H. Freeman and Company, New York: 1989.
- [J1] Z. Jelonek: The extension of regular and rational embeddings. *Math. Ann.* **277** (1987), 113–120.
- [J2] Z. Jelonek: The set of points at which a polynomial map is not proper. *Ann. Polon. Math.* **58** (1993), no. 3, 259–266.
- [J3] Z. Jelonek: Testing sets for properness of polynomial mappings. *Math. Ann.* **315** (1999), no. 1, 1–35.
- [J4] Z. Jelonek: A geometry of polynomial transformations of the real plane, *Bull. Polish Acad. Sci. Math* **48** (2000), no. 1, 57-62.
- [J5] Z. Jelonek: Geometry of real polynomial mappings. *Math. Z.* **239** (2002), no. 2, 321-333.
- [L] R.J. Lang: Origami design secrets. Mathematical methods for an ancient art. Second edition. *CRC Press*, Boca Raton, FL: 2012.
- [MR] M.G. Marinari, M. Raimondo: Integral morphisms and homeomorphisms of affine  $k$ -varieties. Commutative algebra. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **84**. Dekker, New York (1983) 183–196.
- [Ma] W. Massey: A Basic Course in Algebraic Topology, *Graduate Texts in Mathematics*, **127**. Springer-Verlag, New York: 1991.
- [M] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Math. Studies*, **61** Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo: 1968.
- [Mo] T.S. Motzkin: The real solution set of a system of algebraic inequalities is the projection of a hypersurface in one more dimension. *Inequalities II*, O. Shisha ed., 251-254. New York, Academic Press: 1970.
- [Mu] D. Mumford: Algebraic geometry. I. Complex projective varieties. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **221**. Springer-Verlag, Berlin-New York: 1976.

- [Na] R. Narasimhan: Introduction to the theory of analytic spaces, *Lecture Notes in Math.* **25**. Springer-Verlag, Berlin-New York: 1966.
- [N] E. Noether: Körper und Systeme rationaler Funktionen. *Math. Ann.* **76** (1915), 161–196.
- [P1] A. Ploski: Algebraic dependence and polynomial automorphisms, *Bull. Acad. Polon. Math.* **34** (1986), 653–659.
- [P2] A. Ploski: Algebraic Dependence of Polynomials After O. Perron and Some Applications, *Computational commutative and non-commutative algebraic geometry*, 167–173, *NATO Sci. Ser. III Comput. Syst. Sci.*, **196**, IOS, Amsterdam, 2005.
- [Ra] M. Raimondo: On normalization of Nash varieties. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **73** (1985), 137–145.
- [R] T.R. Rockafellar: Convex analysis. *Princeton Mathematical Series*, **28**. Princeton University Press, Princeton, N.J: 1970.
- [RS] C.P. Rourke, B.J. Sanderson: Introduction to piecewise-linear topology. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **69**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg: 1972.
- [Sch] A. Schinzel: Selected topics on Polynomials. University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich.: 1982.
- [S] A. Seidenberg: A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math.* **60** (1954), 365–374.
- [Sh1] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry I. Varieties in projective space. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.
- [Sh2] I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry II. Schemes and complex manifolds. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin: 1994.
- [Sp] E. H. Spanier: Algebraic Topology. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London: 1966.
- [S] G. Stengle: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math. Ann.* **207** (1974), 87–97.
- [T] A. Tarski: A decision method for elementary algebra and geometry. Prepared for publication by J.C.C. Mac Kinsey, Berkeley: 1951.
- [TW] P. Tworzewski, T. Winiarski: Analytic sets with proper projections. *J. Reine Angew. Math.* **337** (1982), 68–76.
- [U1] C. Ueno: A note on boundaries of open polynomial images of  $\mathbb{R}^2$ . *Rev. Mat. Iberoam.* **24** (2008), no. 3, 981–988.
- [U2] C. Ueno: On convex polygons and their complements as images of regular and polynomial maps of  $\mathbb{R}^2$ . *J. Pure Appl. Algebra* **216**, no. 11, 2436–2448.
- [U3] C. Ueno: On the open quadrant as a polynomial image of  $\mathbb{R}^2$ . *Preprint RAAG* (2012).
- [U4] C. Ueno: Convex Polygons via Polynomial Origami. *Preprint RAAG* (2012).
- [V] C. Voisin: On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces. *J. Differential Geom.* **44** (1996), 200–214.

